BUKU AJAR TEORI HIMPUNAN

Buku ajar Teori Himpunan ini secara umum mencakup teori, contoh soal, dan latihan soal pada akhir bab. Bahasan dalam buku ajar ini, meliputi: (1) Pendahuluan, (2) Konsep dasar himpunan, (3) Jenis himpunan, (4) Operasi himpunan, (5) Relasi dan fungsi.

Buku ajar ini disusun secara sistematis dan sederhana disesuaikan dengan rencana pembelajaran semester (RPS) yang menjadi satu kesatuan yang tak terpisahkan selama perkuliahan mata kuliah ini.

Awal bahasan dimulai pada Bab 1 menyajikan deskripsi matakuliah, petunjuk penggunaan, capaian pembelajaran, analisis pembelajaran, dan organisasi materi. Bab 2 menyajikan konsep dasar himpunan, mencakup definisi himpunan, penyajian himpunan, hubungan antar himpunan, himpunan finit dan infinit. Bab 3 menyajikan jenis-jenis himpunan, mencakup himpunan bagian, himpunan kosong, himpunan semesta, himpunan sama, himpunan lepas, dan himpunan ekuivalen. Bab 4 menyajikan operasi himpunan, mencakup macam-macam operasi himpunan, prinsip dualitas himpunan, prinsip inklusi-eksklusi. Bab 5 menyajikan relasi dan fungsi, mencakup definisi relasi dan fungsi, jenis relasi dan fungsi, fungsi komposisi, fungsi invers.

Buku ajar ini bertujuan untuk dapat membantu mahasiswa menguasai konsep-konsep himpunan melalui contoh-contoh soal dan latihan-latihan soal yang disajikan pada akhir bab.

Klik Media

Jl. Bromo 302 RT. 1 RW. 3, Kebonagung, Sukodono, Kabupaten Lumajang, Jawa Timur 67352

buku.kmedia.id

kmedia.id

klikmedialumajang@gmail.com

KlikMedia

ISBN 978-623-363-073-3

Dr. FATQURHOHMAN, M.Pd.

BUKU AJAR TEORI HIMPUNAN

Dr. FATQURHOHMAN, M.Pd.

BUKU AJAR TEORI HIMPUNAN

Buku Ajar

TEORI HIMPUNAN

Dr. Fatqurhohman, M.Pd.

KLIK MEDIA

Buku Ajar

TEORI HIMPUNAN

Penulis:

Dr. Fatqurhohman, M.Pd.

ISBN:

978-623-363-073-3

Ukuran Buku:

14,8 x 21

Tebal Buku:

viii + 93 halaman

Desain Cover:

Sendy Boy

Layouter:

Ainunrh

Editor:

Dr. Fatqurhohman, M.Pd.

Cetakan 1

September 2021

Dicetak & Diterbitkan Oleh:

KLIK MEDIA

Jl. Bromo 302 RT 01 RW 03 Kebonagung

Sukodono-Lumajang-Jawa Timur

Telp. 085259488719-081336335612

Anggota IKAPI

No. 275/JTI/2021

Kata Pengantar

Puji syukur atas kehadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmatnya, penyusunan buku ajar mata kuliah “Teori Himpunan” dapat terselesaikan. Buku ajar ini disusun sebagai literatur dan sumber mahasiswa serta bagi dosen dalam pembelajaran perkuliahan.

Buku ajar ini menyajikan lima bab, yaitu (1) Pendahuluan, (2) Konsep dasar himpunan, (3) Jenis himpunan, (4) Operasi himpunan, (5) Relasi dan fungsi. Buku ajar ini disusun secara sistematis dan sederhana sesuai Rencana Pembelajaran Semester yang menjadi satu kesatuan tak terpisahkan selama permbelajalajaran perkuliahan mata kuliah ini.

Pada kesempatan ini, penulis ingin berterima kasih kepada teman-teman, kolega-kolega, dan pihak lain terkait sehingga buku ini terselesaikan. Selain itu, mengingat buku ini merupakan terbitan edisi pertama, penulis menyadari masih banyak kekurangan dan kesalahan baik dari segi penulisan maupun kedalaman isi materi. Maka segala kritik, saran dan masukan oleh para pengguna sangat kami harapkan untuk kesempurnaan isi buku ini, diucapkan terimakasih.

Jember, September 2021

Penulis,

Daftar Isi

Daftar Tabel

Daftar Gambar

Bab 1 Pendahuluan

1.1. Deskripsi Mata Kuliah

Mata Kuliah "Teori Himpunan" dilaksanakan pada semester 2 dengan bobot 2 SKS. Secara umum bahasan materi yang akan dipelajari, meliputi: konsep dasar himpunan, jenis himpunan, operasi himpunan, relasi dan fungsi, fungsi komposisi dan fungsi invers.

1.2. Petunjuk Penggunaan

1. Kegiatan Pembelajaran

   Pembelajaran pada mata kuliah ini menggunakan model *Student Center Learning* dengan strategi pembelajarannya secara ekspositori dan *small group discussion*. Selain itu mahasiswa juga diberikan permasalahan-permasalahan yang akan dibahas pada setiap pertemuannya, agar dapat menerapkan konsep yang dipelajari melalui permasalahan yang diberikan.

2. Latihan

   Latihan yang diberikan pada akhir setiap bab bertujuan untuk mengukur pencapaian hasil belajar mahasiswa. Latihan yang diberikan berupa soal formatif dan objektif.

3. Waktu Belajar

   Mahasiswa menyediakan waktu belajar dalam perkuliahan selama 14 pertemuan dan 2 pertemuan untuk UTS dan UAS. Sehingga waktu yang dibutuhkan mahasiswa mempelajari mata kuliah teori himpunan, antara lain:

1) 2 x 50 menit per minggu tatap muka/belajar melalui sinkron maya/asinkron maya
2) 2 x 60 menit per minggu untuk mengerjakan latihan
3) 2 x 170 menit per minggu dalam proses pembelajaran

4. Manfaat

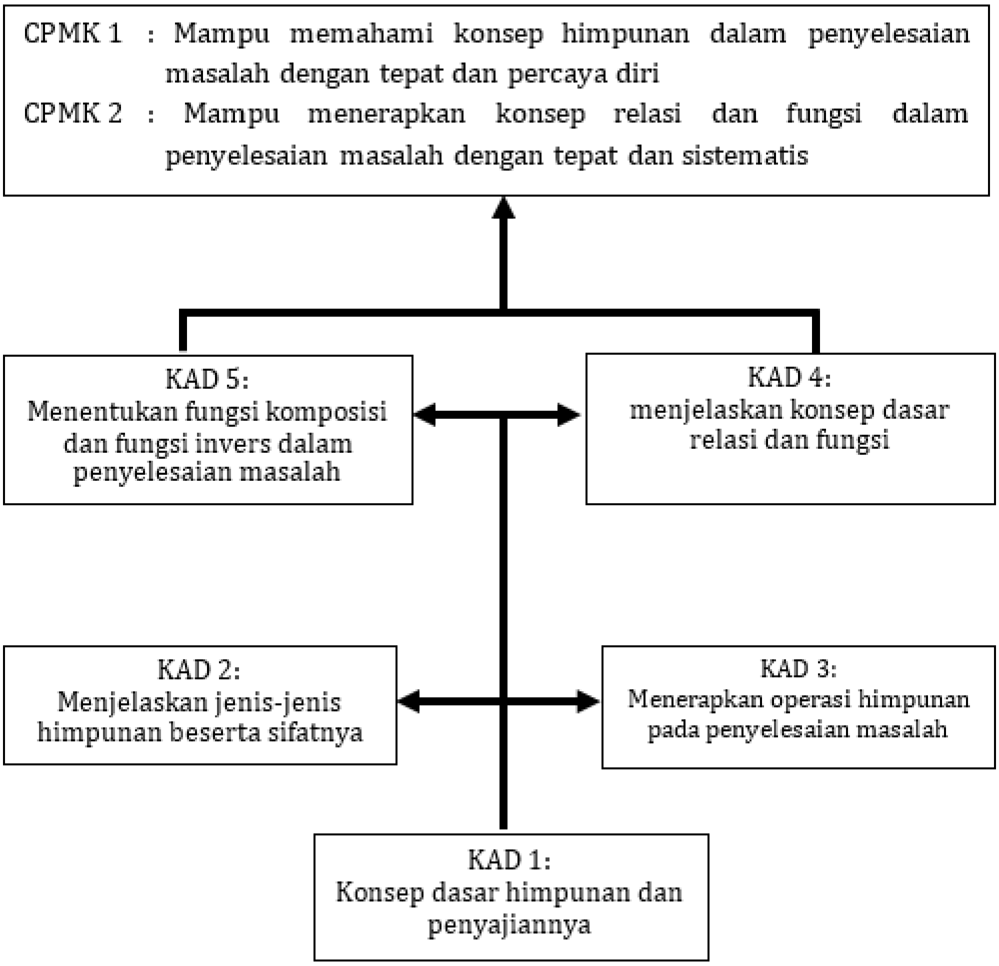
Manfaat buku ajar ini adalah sebagai berikut:

1) Meningkatkan efektivitas pembelajaran di kelas tanpa harus melalui tatap muka secara teratur;
2) Menentukan kondisi dan waktu belajar yang lebih sesuai dengan kebutuhan mahasiswa;
3) Menentukan pencapaian kompetensi mahasiswa secara terstruktur;
4) Membantu mahasiswa memperbaiki proses belajar melalui evaluasi yang ditetapkan,

1.3. Capaian Kompetensi

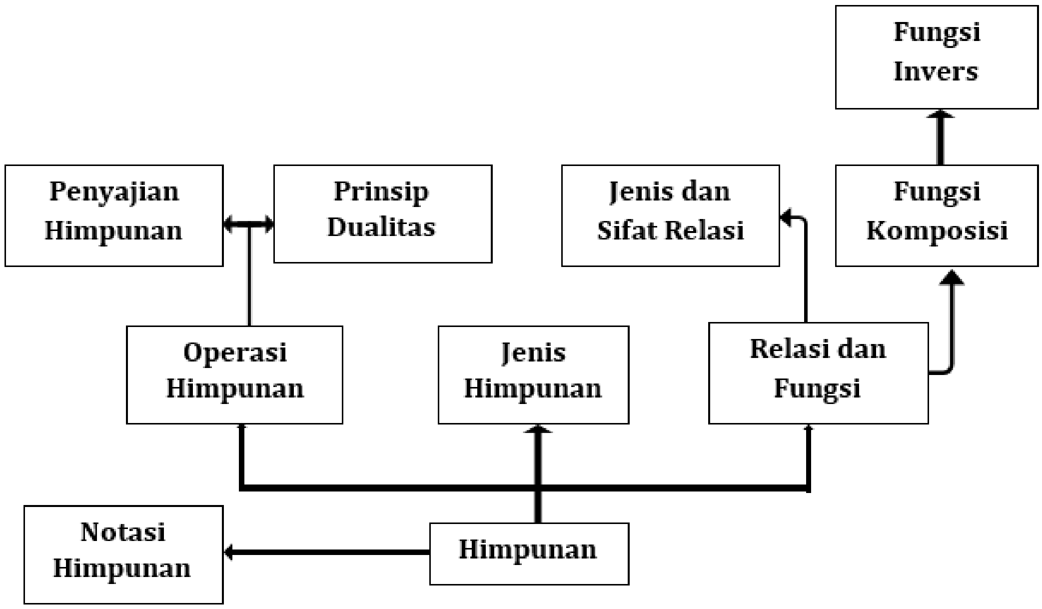
CPMK-1	Mampu memahami konsep himpunan dalam penyelesaian masalah dengan tepat dan percaya diri	
	KAD 1	Konsep dasar himpunan dan penyajiannya
	KAD 2	Menjelaskan jenis-jenis himpunan beserta sifatnya
	KAD 3	Menerapkan operasi himpunan dalam penyelesaian masalah
CPMK-2	Mampu menerapkan konsep relasi dan fungsi dalam penyelesaian masalah dengan tepat dan sistematis	
	KAD 4	Menjelaskan konsep dasar relasi dan fungsi
	KAD 5	Menentukan fungsi komposisi dan fungsi invers dalam penyelesaian masalah

1.4. Analisis Pembelajaran



1.5. Organisasi Materi

Organisasi materi di dasarkan pada kompetensi yang akan dicapai. Adapun organisasi materi berdasarkan peta kompetensi mata kuliah ini adalah sebagai berikut:



Bab 2

Konsep Himpunan

Tujuan Pembelajaran:

1. Mahasiswa mampu menjelaskan definisi himpunan dan notasinya
2. Mahasiswa mampu menyajikan himpunan dalam bentuk diagram venn
3. Mahasiswa mampu menyajikan himpunan dalam bentuk aljabar

2.1. Deskripsi Singkat

Dalam kehidupan sehari-hari, kegiatan mengumpulkan atau mengkoleksi suatu benda atau objek tertentu merupakan sesuatu yang dilakukan dengan sengaja dan teratur, tetapi juga ada tanpa memperhatikan aturan tertentu. Kumpulan benda atau objek yang dikumpulkan dengan menggunakan aturan tertentu disebut sebagai himpunan benda atau objek.

Objek dalam himpunan disebut elemen, unsur, atau anggota. Objek-objek yang terdapat dalam suatu kelompok himpunan haruslah mempunyai sifat-sifat tertentu yang sama. Sifat tertentu suatu himpunan harus didefinisikan secara tepat, agar kita tidak salah mengumpulkan objek-objek yang terdapat pada himpunan tersebut. Misalnya kumpulan bilangan, huruf, negara, alat musik tradisional, buku-buku, dan sebagainya.

2.2. Uraian Materi

2.2.1. Definisi Himpunan

Definisi 2.1: Himpunan adalah kumpulan benda-benda (objek) yang terdefinisi (menggunakan aturan tertentu).

himpunan dinotasikan dengan huruf kapital: A, B, X, Y

anggota (unsur) himpunan berupa benda atau objek: a, b, c, d, s, t dll.

Jika x anggota dari himpunan X, ditulis: $x \in X$ (dibaca "x dalam X"). Jika x bukan anggota suatu himpunan X, ditulis: $x \notin X$.

2.2.2. Penyajian Himpunan

a. Enumerasi

Setiap anggota himpunan didaftarkan secara rinci

Contoh 1: Himpunan empat bilangan asli pertama:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

Himpunan lima bilangan genap positif pertama:

$$B = \{4, 6, 8, 10\}$$

$$C = \{kucing, a, Amir, 10, paku\}$$

$$R = \{\ a, b, \{a, b, c\}, \{a, c\}\}$$

$$C = \{a, \{a\}, \{\{a\}\}\}$$

$$K = \ \{\{\}\}$$

Himpunan 100 buah bilangan asli pertama:

$$\{1,2,\ldots,100\}$$

Himpunan bilangan bulat: $\{\ldots, -2, -1,0,1,2, \ldots\}$

b. Keanggotaan

Misalkan:

$x \in A$, x merupakan anggota himpunan A

$x \notin A$, x merupakan anggota himpunan A

Contoh 2: $A = \{1,2,3,4\}$, $R = \{a, b, \{a, b, c\}, \{a, c\}\}$, $K = \{\{\quad\}\}$.

Sehingga:

$3 \in A$

$\{a, b, c\} \in R$, $c \notin R$ dan $\{\quad\} \notin R$

$\{\quad\} \in K$

Contoh 3: Jika $P_1 = \{a, b\}$, $P_2 = \{\{a, b\}\}$, $P_3 = \{\{\{a, b\}\}\}$

Sehingga:

$a \in P_1$, $a \notin P_1$.;

$P_1 \in P_2$; $P_1 \notin P_3$;

$P_2 \in P_3$

c. Simbol Baku

P	Bilangan bulat positif	$\{1,2,3, \ldots.\}$
N	Bilangan natural	$\{1,2,, \ldots.\}$
Z	Bilangan bulat	$\{\ldots, -2, -1,0,1,2, \ldots\}$
Q	Bilangan rasional	$\left\{\ldots, -2, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 1, \frac{3}{2}, 2 \ldots.\right\}$
R	Bilangan riil	$\{\ldots, -2, -1.77, 0, 0.21, 1, 2, 2.6789, ..\}$
C	Bilangan kompleks	
U	Himpunan universal	

Contoh 4: Misalkan: $U = \{1,2,3,4,5\}$,

Maka $A = \{1,3,5\}$ adalah himpunan bagian dari U

d. Notasi Pembentuk Himpunan

Notasi: $\{x|$syarat yang harus dipenuhi oleh $x\}$

Contoh 5: A adalah himpunan bilangan positif lebih kecil dari 5

Maka:

$$A = \{x | x \text{ bilangan positif lebih kecil 5}\}$$

Atau

$$A = \{x | x \in P, x < 5\}$$

ekuivalen dengan

$$A = \{1,2,3,4\}$$

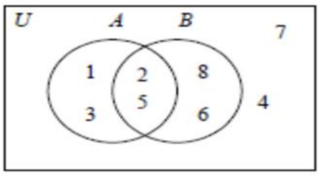
e. Diagram Venn

Diagram yang menampilkan korelasi atau hubungan antarhimpunan yang berkesuaian dalam suatu kelompok.

Contoh 6: Misalkan

$U = \{1, 2, \dots, 7, 8\}, A = \{1, 2, 3, 5\}, B = \{2, 5, 6, 8\}$.

Maka:



Gambar 1.1 Diagram Venn

2.2.3. Hubungan Antar Himpunan

a. Himpunan Bagian

Definisi 2.2: Himpunan A disebut himpunan bagian atau subset dari himpunan B, dinotasikan $A \subseteq B$, jika setiap anggota A juga merupakan anggota B.

$\forall x \in A, x \in b$ atau $x \in A \Longrightarrow x \in B$

Dimana: Relasi $\subseteq$ disebut juga sebagi relasi inklusi.

Pada beberapa buku, himpunan bagian dinotasikan " $\subset$ ", pada buku ini tanda " $\subset$ " menyatakan himpunan bagian sejati (*proper subset*). Dalam hal ini, lambang "$A \subset B$" berarti setiap anggota A adalah anggota B, tetapi ada anggota B yang bukan merupakan anggota A.

<u>Catatan</u>: Perhatikan perbedaan antara " $\in$ " dan " $\subset$ ".

Jika $A = \{1,2,3\}$ maka $1 \in A$ bukan $1 \in A$ dan

sebaliknya $1 \not\subset A$ melainkan $\{1\} \subseteq A$.

Jika $A = \{1, \{1\}, \{1,2\}, 2,3\}$,

maka $1 \in A$ dan $\{1\} \in A$ tetapi $1 \neq \{1\}$.

Contoh 7: Misalkan:

$A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, B = \{4,6,7,9\}, C = \{4,6,7,10\}$

Maka:

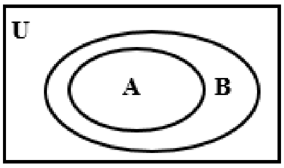
$$A \subseteq A$$

$$B \subseteq A$$

$C \not\subset A$ (karena ada anggota yang bukan dari himpunan A)

Contoh 8: Himpunan B disebut superset dari A, dinotasikan $A \subseteq B$

Maka dapat dilukiskan berikut:



Gambar 1.2 Himpunan Bagian

Himpunan yang tidak memiliki anggota disebut himpunan kosong, yang dinotasikan dengan ϕ atau { }. Tetapi $P = \{\phi\}$ bukan merupakan himpunan kosong, sebab P memiliki anggota yaitu himpunan kosong itu sendiri.

Teorema 2.1 *Himpunan kosong ϕ merupakan subset dari setiap himpunan*

Bukti: Misalkan A sebarang himpunan dan $x \in \phi$.
Akibatnya $x \in A$. Jadi, $\phi \subseteq A$.

Definisi 2.3: Dua buah himpunan A dan B dikatakan sama yaitu:

$$(A = B)$$

Jika berlaku sifat $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$, yaitu:

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ dan } B \subseteq A$$

Contoh 9: Jika $A = \{1,2,3\}$ dan $B = \{2,3,1\}$, maka $A = B$

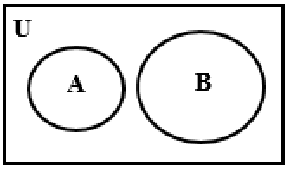
Jika $P = \{x | x \text{ solusi dari } x^2 = 1\}$ dan $Q = \{-1,1\}$, Maka: $A = B$

Jika $M = \{a, b, c\}$ dan $N = \{c, d, e\}$,

Maka: $M \neq N$

b. Himpunan Saling Lepas

Dua himpunan A dan B dikatakan saling lepas (*disjoint*) jika keduanya tidak memiliki elemen yang sama. Dinotasikan $A\ //\ B$.



Gambar 1.3 Himpunan Saling Lepas

Contoh 10: Jika $A = \{x | x \in P, x < 8\}$ dan $B = \{10,20,30\}$,

Maka: $A\ //\ B$

2.2.4. Himpunan Finit dan Infinit

Definisi 2.4: Himpunan M dikatakan finit, jika $M = \phi$ atau

- Jika terdapat bilangan asli n sehingga anggota dari M dapat diurutkan dengan indeks $1,2,3, \dots, n$ atau
- Setiap anggota M berkorespodensi satu-satu dengan bilangan $1,2,3, \dots, n$

Jika tidak, M disebut himpunan infinit.

Contoh 11:

- $P = \{a, b, c, \dots, z\}$ merupakan himpunan finit, karena dapat memasangkan anggota P dengan bilangan asli dari 1 sampai 26.
- Q adalah himpunan solusi $x^2 = -1$ yang merupakan himpunan finit karena $Q = \phi$.
- Himpunan bilangan ganjil adalah infinit

- Himpunan $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ merupakan himpunan infinit

2.3. Rangkuman

Himpunan merupakan kumpulan dari benda-benda (objek) yang terdefinisi dengan jelas (menggunakan aturan tertentu). Himpunan bagian dinotasikan " $\subset$ ", menyatakan himpunan bagian sejati (*proper subset*) dan $A \subseteq B, \forall x \in A, b$ atau $x \in A \Longrightarrow x \in B$. Relasi $\subseteq$ disebut juga sebagi relasi inklusi. Himpunan M dikatakan finit, jika $M = \phi$ dan infinit jika $M \neq \phi$.

2.4. Referensi

1. Kunen, K. 2011. *Set Theory*. UK: King College London
2. Pinter, C. C. 2014. *Set Theory*. South Korea: Kyung Moon Publishers
3. Weiss, W. A.R. 2008. *An Introduction to Set Theory*. USA: Toronto University
4. Smith, J. T. 2008. *Basic Set Theory*. San Francisco State University.

2.5. Latihan

Soal Formatif 1

1. Dari kumpulan berikut, yang dapat dinyatakan sebagai himpunan adalah ....
   A. Kumpulan orang pandai
   B. Kumpulan orang kaya
   C. Kumpulan siswa di kelas yang berkacamata
   D. Kumpulan bunga indah
2. Notasi pembentuk himpunan berikut yang benar untuk himpunan $A = \{2,3,5,7\}$, adalah …
   A. $A = \{x \mid x \leq 7, x \in bilangan\ prima\}$
   B. $A = \{x \mid x \leq 8, x \in bilangan\ asli\}$
   C. $A = \{x \mid x \leq 7, x \in bilangan\ cacah$
   D. $A = \{x \mid x < 8, x \in bilangan\ prima\}$
3. Himpunan B adalah himpunan warna pada lampu lalu-lintas, maka pernyataan di bawah ini yang salah adalah …
   A. Kuning B
   B. Hijau B
   C. Merah B

D. Hitam A

4. Himpunan G adalah himpunan bilangan genap antara 24 dan 35, jika himpunan G ditulis dengan cara mendaftar anggota-anggotanya maka diperoleh …

A. $\{24, 26, 28, 30, 32, 34\}$

B. $\{26, 28, 30, 32, 34\}$

C. $\{26, 28, 30, 32, 34, 36\}$

D. $\{24, 26, 28, 30, 32, 34, 36\}$

5. Berikut ini pernyataan yang bukan himpunan adalah …

A. Kumpulan bunga putih

B. Kumpulan bilangan

C. Kumpulan makanan enak

D. Kumpulan huruf vokal

6. Anggota himpunan $A = \{2,5,6,7\}$ dan $B = \{1,3,5,6,7,9\}$ adalah …

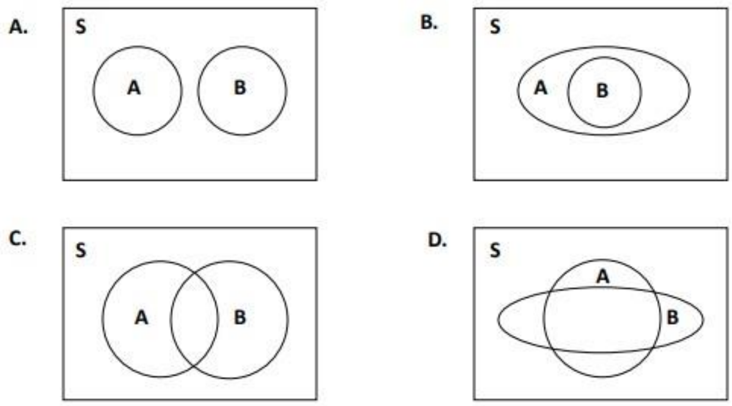
A. $A = 4$ dan $B = 6$

B. $A = 6$ dan $B = 5$

C. $A = 3$ dan $B = 4$

D. $A = 4$ dan $B = 3$

7. Diketahui: $S = \{$ bilangan asli$\}$, $A = \{$ bilangan ganjil$\}$, $B = \{$ bilangan prima $> 2\}$. Jika dinyatakan dalam diagram venn adalah...



8. Diketahui $K = \{$ bilangan prima antara 2 dan 12$\}$, $L = \{$ 4 bilangan kelipatan 3 pertama $\}$. maka $K \cap L$ adalah …

A. $\{3, 5, 6, 7, 9, 11, 12\}$ C. $\{3, 6, 9\}$

B. $\{5, 6, 7, 9, 11, 12\}$ D. $\{3\}$

9. Diketahui $P = \{1, 2, 3, 9, 12, 13\}$. Himpunan kelipatan 3 yang terdapat di P adalah…

   A. $\{9\}$
   B. $\{3, 9\}$
   C. $\{3, 9, 12\}$
   D. $\{3, 6, 9, 12\}$

10. Jika himpunan $A \subset B, n(A) = 11$ dan $n(B) = 18$

    Maka: $n(A \cap B)$ adalah ...

    A. 7
    B. 11
    C. 18
    D. 28

Soal Uraian 1

1. P adalah himpunan bilangan genap yang kurang dari 25. Sebutkan anggota-anggota dari P dalam tanda kurung kurawal!
2. P adalah himpunan bilangan genap yang kurang dari 25. Nyatakan P dengan notasi pembentuk himpunan dan tentukan (P)!
3. Tentukan 2 himpunan semesta untuk himpunan $= \{2,4,6,8\}$
4. Tentukan 2 himpunan semesta dari himpunan $\{Jupiter, Saturnus, Uranus, Neptunus\}$
5. Diketahui $P = \{a, b, c, d, e\}$. Tentukan himpunan bagian dari P yang memiliki 2 anggota.
6. Misalkan P himpunan sebarang. Apakah P selalu mempunyai subset?
7. Diberikan $\{15, 4, 7, 6, 2\} \cap \{2, 4, 6, 8\} = \{4, x, 6\}$. Maka tentukan:
   a. Nilai x
   b. Gambarkan dalam bentuk diagram venn
8. Dari suatu kelas terdapat 25 siswa suka membaca, 30 siswa suka mengarang. Jika 12 orang siswa suka membaca dan mengarang, banyak siswa dalam kelas tersebut adalah …
9. Diketahui himpunan $P = \{1, 3, 4, 5\}$, $Q = \{1, 2, 5, 6\}$. Tentukan:
   a. $P \cap Q$
   b. $P \cup Q$
   c. Gambarkan diagram vennya.
10. Manakah himpunan berikut yang merupakan himpunan finit?
    a. S adalah himpunan manusia yang tinggal dibumi
    b. T adalah himpunan bilangan riil antara 0 sampai 1

c. U adalah himpunan garis yang dibuat melalui sebuah titik

d. $P = \{n | n$ bilangan prima$\}$.

2.6. Kunci Jawaban

Kunci Soal Formatif 1

1.	C	6.	A
2.	A	7.	B
3.	D	8.	D
4.	B	9.	C
5.	C	10.	B

Periksalah jawaban anda dengan kunci jawaban formatif 1. Hitunglah jawaban yang benar untuk mengetahui tingkat penguasaan anda.

Skor	Keterangan
90 – 100	Baik sekali
80 – 89	Baik
70 – 79	Cukup
< 70	Kurang

Apabila anda mencapai tingkat penguasaan di bawah 80 diharapkam untuk mempelajari kembali bagian materi yang dianggap belum dikuasai.

Bab 3 Jenis Himpunan

Tujuan Pembelajaran:
1. Mahasiswa mampu menjelaskan jenis-jenis himpunan
2. Mahasiswa mampu menjelaskan sifat-sifat dari jenis himpunan
3. Mahasiswa mampu menyebutkan contoh jenis himpunan
4. Mahasiswa mampu menyelesaikan soal berdasarkan jenis himpunan

3.1. Deskripsi Singkat

Himpunan merupakan kumpulan benda atau objek yang terdefinisi dengan menggunakan aturan tertentu. Himpunan dapat dibedakan menjadi beberapa jenis diantaranya himpunan bagian, himpunan kosong, himpunan semesta, himpunan sama, himpunan lepas, himpunan ekuivalen. Perlu dipahami bahwa antara himpunan kosong dengan bukan himpunan sesuai syarat-syarat keanggotaannya. Oleh karena, jika keanggotaannya benar-benar tidak ada, maka kumpulan anggota himpunan tersebut termasuk himpunan kosong. Sebaliknya bila anggotanya tidak jelas, dalam arti tidak dapat dibedakan apakah suatu objek termasuk anggotanya atau tidak, maka kumpulan tersebut bukanlah himpunan. Sehingga bukan himpunan merupakan sebagai himpunan kosong.

3.2. Uraian Materi

Pada dasarnya ada beberapa jenis himpunan yang perlu diketahui, diantaranya yaitu himpunan bagian, himpunan kosong, himpunan semesta, himpunan sama, himpunan lepas, dan himpunan ekuivalen.

1) Himpunan Bagian

Definisi 3.1 Himpunan A dikatakan himpunan bagian B, jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen dari B.

Catatan: (1) $A \subset B$ ("A himpunan bagian B"), atau $B \supset A$ ("B sumber dari A"). Apabila setiap anggota A termasuk anggota B.

(2) $A \not\subset B$ atau $B \not\supset A$ ("B mengandung A", "B super himpunan dari A"), apabila A tidak merupakan himpunan bagian dari B.

(3) A himpunan bagian murni (sejati) B, jika dan hanya jika setiap anggota himpunan A adalah anggota himpunan B, tetapi sekurang-kurangnya ada sebuah anggota himpunan B yang bukan anggota himpunan A.

(4) Banyaknya himpunan bagian dari himpunan A, dituliskan rumus: $2^{n(A)}$.

Tabel 1. Banyaknya Himpunan Bagian dari Suatu Himpunan

Himpunan	**Semua Himpunan Bagian**	**Banyak Himpunan Bagian**
ϕ	ϕ	1
$\{1\}$	$\phi, \{1\}$	2
$\{1,2\}$	$\phi, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}$	4
dst	...	...

Contoh 1:

(1) $A = \{\ 1, 3, 5\ \}$ dan $B = \{\ 1, 2, 3, 4, 5, 6\ \}$

Buktikan himpunan A merupakan himpunan bagian B?

Jawab:

$A \subseteq B$ karena 2, 4, 6 tidak termasuk anggota A

Setiap elemen A merupakan elemen B.

(2) Jika $A = \{ 1 \}$

Maka himpunan bagian dari A adalah $\{\ \ \}, \{1\}$.

Banyaknya himpunan bagian adalah 2.

Dengan rumus: $2^{n(A)} = 2^1 = 2$

(3) Jika $B = \{ a, b \}$

Maka himpunan bagian dari B adalah $\{\ \ \}, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$.

Banyaknya himpunan bagian adalah 4.

Dengan rumus: $2^{n(A)} = 2^2 = 4$

(4) Jika $C = \{ piring, sendok, gelas \}$

Maka himpunan bagian dari C adalah $\{\ \ \}$, $\{piring\}$, $\{sendok\}$, $\{gelas\}$ $\{piring, sendok\}$, $\{piring, gelas\}$, $\{gelas, sendok\}$, $\{piring, sendok, gelas\}$.

Banyaknya himpunan bagian adalah 8.

Dengan rumus: $2^{n(A)} = 2^3 = 8$.

2) Himpunan Kosong

Definisi 3.2 Himpunan kosong merupakan himpunan yang tidak memiliki satupun elemen atau anggota, dinotasikan ϕ atau $\{\ \ \}$.

Perlu dipahami bahwa antara himpunan kosong dengan bukan himpunan. Biasanya bukan himpunan dianggap sebagai himpunan kosong. Sehingga perlu memahami dan memperhatikan syarat-syarat keanggotaannya.

Jika anggotanya benar-benar tidak ada, maka kumpulan anggota himpunan tersebut termasuk himpunan kosong. Sebaliknya bila anggotanya tidak jelas, dalam arti tidak dapat dibedakan apakah suatu objek termasuk anggotanya atau tidak, maka kumpulan tersebut bukanlah himpunan.

Perhatikan contoh himpunan kosong di bawah ini:

Contoh 2: Himpunan $A = \{ 2, 4, 6, 8 \}$

Himpunan $B = \{ 4, 8, 10 \}$

Sebutkan bilangan ganjil yang ada?

Jawab: Tidak ada, karena tidak terdapat bilangan ganjil pada masing-masing himpunan tersebut,

Maka: { } atau ∅.

Contoh 3:
- Himpunan A adalah himpunan mahasiswa UMJ yang berusia 16 tahun
- Himpunan B adalah himpunan bilangan asli lebih kecil dari 1
- Himpunan C adalah himpunan hari yang berawalan huruf "H"
- Himpunan D adalah himpunan bilangan ganjil yang habis dibagi 2.

Teliti dalam menuliskan angka nol (0), dikarenakan nol (0) bukanlah himpunan kosong, tetapi merupakan anggota dari himpunan yang bernilai nol (0).

3) Himpunan Semesta (*Universum*)

Definisi 3.3 Himpunan semesta (semesta pembicaraan) adalah himpunan yang memuat semua anggota atau objek himpunan yang dibicarakan.

Himpunan semesta biasanya dinotasikan dengan S atau U.

Contoh 4:

(1) $A = \{\text{kucing, harimau, kambing}\}$

Maka:

$U = \left\{binatang, \{binatang\ berkakiempat\}\right\}$ atau

$U = \{binatang\ memamah\ biak\}$

(2) Himpunan anak TK Pertiwi yang memakai jepit rambut

Maka:

Himpunan semestanya adalah himpunan semua anak TK Pertiwi

(3) Misalkan $A = \{2, 3, 5, 7\}$

Himpunan semesta yang mungkin adalah $S = \{bilangan\ prima\}$.

Himpunan bilangan prima bukanlah satu-satunya himpunan semesta bagi A , akan tetapi masih banyak himpunan lain yang dapat dianggap sebagai himpunan semestanya.

Misalnya himpunan bilangan asli, himpunan bilangan cacah, himpunan bilangan bulat, dan sebagainya.

(4) Misalkan $B = \{merah, kuning, hijau\}$.

Maka:

Himpunan semesta yang mungkin di antaranya adalah

$S = \{warna - warna\ lampu\ lalu\ lintas\}$ atau

$S = \{warna - warna\ pelangi\}$, dan sebagainya.

4) Himpunan Sama

Definisi 3.4 Himpunan A dan himpunan B sama, jika dan hanya jika keduanya mempunyai elemen yang sama tanpa melihat urutannya.

Misalkan: Himpunan $A = B$,
Jika A himpunan bagian dari B dan
B himpunan bagian dari A.

Maka: $A \neq B$.
Notasi: $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$

Contoh 5:

(1) $A = \{1,2,3\}$ dan $B = \{3,1,2\}$.

Maka: $A = B$,

Karena setiap anggota himpunan A ada pada himpunan B,

setiap anggota himpunan B termasuk anggota himpunan A.

(2) $C = \{k, a, r, t, u\}$ dan $D = \{\mathrm{t, a, u, r, k}\}$.

Maka: $C = D$,

Karena setiap anggota himpunan C ada pada himpunan D,

setiap anggota himpunan D termasuk anggota himpunan C.

(3) $A = \{1,2,3\}$ dan $B = \{a, \mathrm{b}, \mathrm{c}\}$.

Maka: $A \neq B$

(4) $P =$ {alat transportasi} dan $Q = \{sayuran\}$.

Maka: $P \neq Q$.

Karena anggota himpunan P tidak merupakan anggota himpunan Q,

Anggota himpunan Q tidak merupakan anggota himpunan P.

5) Himpunan Lepas

Definisi 3.5 Dua buah himpunan yang tidak kosong dikatakan saling lepas jika kedua himpunan tersebut tidak mempunyai satupun anggota yang sama

Contoh 6: Himpunan $A = \{ 2, 4, 6, 8, 10, 12 \}$
Himpunan $B = \{ 1, 3, 5, 7, 9, 11 \}$

Maka:

Himpunan A dan B dikatakan saling lepas ($A \parallel B$), karena tidak ada anggota yang sama antara himpunan A dan himpunan B.

6) Himpunan Ekuivalen

Definisi 3.6 Dua buah himpunan dikatakan ekuivalen:

(1) Apabila jumlah anggota kedua himpunan itu sama tetapi bendanya ada yang tidak sama.

(2) Apabila banyaknya anggota himpunan–himpunan tersebut sama.

(3) Apabila antara setiap anggota himpunan yang satu mempunyai hubungan satu-satu dengan setiap anggota himpunan lainnya.

Notasinya: $A \sim B$.

Dikatakan bahwa $A \sim B$, apabila $n\ (A) = n\ (B)$ atau

Banyaknya anggota himpunan A sama dengan B.

Contoh 7:

(1) $A\ = \{\ a, b, c, d, e, f\ \}$ dan
$B\ = \{\ 1, 2, 3, 4, 5, 6\ \}$.

Maka: $A \sim B$,

Karena, banyaknya anggota himpunan A dan B adalah sama yaitu 6, meskipun anggotanya tidak sama.

(2) $C = \{$nama hari diawali huruf $S\}$ dan
$D = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}\}$.

Maka: $C \sim D$,

Karena $C = \{senin, selasa, sabtu\}$,

$n(C) = 3$ dan $n(D) = 3$

Sehingga: $C \sim D$ karena $n(C) = n(D)$.

3.3. Rangkuman

Himpunan memiliki beberapa jenis, diantaranya yaitu: himpunan bagian, himpunan kosong, himpunan semesta (semesta pembicaraan), himpunan sama, himpunan lepas, himpunan ekuivalen. Himpunan ekuivalen memiliki banyaknya anggota yang sama dengan anggota himpunan lain. Sedangkan himpunan sama dibedakan dari kesamaan anggota (elemen) bukan banyaknya anggota.

Perbedaan himpunan kosong dengan bukan himpunan didasarkan pada syarat-syarat keanggotaannya. Jika keanggotaannya benar-benar tidak ada, maka kumpulan anggota himpunan tersebut termasuk himpunan kosong, sedangkan bukan himpunan adalah jika anggotanya tidak jelas (tidak dapat dibedakan anggota/tidak).

3.4. Referensi

1. Kunen, K. 2011. *Set Theory*. UK: King College London
2. Pinter, C. C. 2014. *Set Theory*. South Korea: Kyung Moon Publishers
3. Weiss, W. A.R. 2008. *An Introduction to Set Theory*. USA: Toronto University
4. Smith, J. T. 2008. *Basic Set Theory*. San Francisco State University

3.5. Latihan

Soal Formatif 2

1. $A = \{1,2,3,4\}$ dan $B = \{a, b, c, d\}$. Himpunan A dan B adalah dua himpunan yang ...

   A. Sama C. Berisikan
   B. Equivalen D. Berkomplemen

2. Berikut ini yang merupakan contoh himpunan yang sama adalah ...

   A. $\{1,2,3,4\}$ dan $\{5,6,7,8\}$
   B. $\{merah, putih\}$ dan $\{warna\ bendera\ negara\ belanda\}$
   C. $\{a, b, c\}$ dan $\{1,2,3\}$
   D. $\{r, a, t, u\}$ dan $\{u, r, a, t\}$

3. Jika $P = \{k, e, l, a, b, u\}$ dan $Q = \{l, u, k, a\}$ maka pernyataan beirkut yang benar adalah ...

   A. $P \subset Q$ C. $P = Q$
   B. $Q \subset P$ D. $P \sim Q$

4. Jika banyaknya himpunan bagian dari P adalah 32, maka $n(P) = \cdots$

   A. 3 C. 5
   B. 4 D. 6

5. Banyaknya himpunan bagian dari $P = \{warna\ lampu\ lalu\ lintas\}$ adalah ...

   A. 8 C. 4
   B. 7 D. 3

6. Jika $A = \{0, 1\}$, maka $n(A) = \cdots$

   A. 0 C. 2
   B. 1 D. 3

7. Manakah dari pernyataan berikut yang termasuk bukan himpunan!
   A. Himpunan nama bulan dalam satu tahun yang huruf awalnya dimulai dengan huruf "K"
   B. Himpunan bilangan asli yang kurang dari 1
   C. Himpunan bilangan prima genap
   D. Megawati, Prabowo, Ahok, Hatta, Jokowi adalah Presiden Indonesia
8. Jika $S = \{\text{bilangan ganjil kurang dari } 11\}$. Maka himpunan S adalah…
   A. $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ C. $\{1, 3, 5, 7, 9\}$
   B. $\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$ D. $\{1, 3, 4, 5, 9\}$
9. Banyak himpunan bagian S adalah ….
   A. 64 C. 32
   B. 27 D. 16
10. Jika $P = \{\text{bilangan prima kurang dari } 20\}$. Banyak himpunan bagian P adalah …
   A. 64 C. 128
   B. 256 D. 512

Soal Uraian 2

Berdasarkan pasangan himpunan berikut, tentukan himpunan sama dan himpunan ekuivalen!

1. $A = \{k, l, m\}$ dan $B = \{p, g, r\}$
2. $E = \{l, a, u, t\}$ dan $F = \{u, l, a, t\}$
3. $I = \{m, a, r, e, t\}$ dan $J = \{a, p, r, i, l\}$

   Perhatikan penyataan berikut.

   (1) Q adalah himpunan empat huruf konsonan pertama dalam abjad.
   (2) X adalah himpunan bilangan ganjil yang kurang dari 23
   (3) K adalah nama-nama jari di tangan
   (4) B adalah himpunan nama-nama nabi yang huruf awalnya vokal.
   (5) L adalah himpunan bilangan caca antara 5 dan 30
   (6) C adalah himpunan nama presiden indonesia
   (7) D adalah himpunan nama-nama jenis warna

4. Tuliskan himpunan pernyataan himpunan: Q, X, K, B, L, C, D.
5. Tentukan pasangan dari pernyataan diatas, apakah himpunan lepas, himpunan sama, atau himpunan ekuivalen
   a. Q, X, dan K
   b. L, C, dan D
   c. B, C, dan D
   d. X, L, dan Q

3.6. Kunci Jawaban

Kunci Soal Formatif 2

1. B
2. D
3. B
4. C
5. A
6. C
7. D
8. C
9. C
10. B

Periksalah jawaban anda dengan kunci jawaban formatif 2. Hitunglah jawaban yang benar untuk mengetahui tingkat penguasaan anda.

Skor	Keterangan
90 – 100	Baik sekali
80 – 89	Baik
70 – 79	Cukup
< 70	Kurang

Apabila anda mencapai tingkat penguasaan di bawah 80 diharapkam untuk mempelajari kembali bagian materi yang dianggap belum dikuasai.

Bab 4

Operasi Himpunan

Tujuan Pembelajaran:
1. Mahasiswa mampu menentukan operasi himpunan
2. Mahasiswa mampu menjelaskan sifat-sifat operasi himpunan
3. Mahasiswa mampu menerapkan operasi himpunan menggunakan diagram venn dan aljabar
4. Mahasiswa mampu menyelesaikan soal-soal menggunakan operasi himpunan

4.1. Deskripsi Singkat

Operasi himpunan meliputi penjumlahan, pengurangan, perkalian, irisan, gabungan, komplemen, beda setangkup. Pada prinsip dualitas himpunan, menggunakan sifat dan aturan (hukum) dari operasi himpunan. Sedangkan pada prinsip inklusi-eksklusi menggunakan operasi irisan dan gabungan dengan dengan menerapkan diagram venn.

Penggunaan operasi himpunan, pada umumnya sering digambarkan dengan menggunakan diagram venn. Diagram venn merupakan penyajian himpunan menggunakan diagram, biasanya berbentuk gambar lingkaran dalam himpunan semesta, dengan tujuan agar lebih mudah dipahami. Seluruh himpunan atau himpunan semesta pada diagram venn disimbolkan dengan gambar segi empat kecil.

4.2. Uraian Materi

4.2.1. Operasi Himpunan

Operasi adalah suatu relasi atau hubungan yang berkenaan dengan satu unsur atau lebih sehingga menghasilkan unsur lain yang unik (tunggal). operasi-operasi yang digunakan tidak dilakukan pada anggota-anggota himpunan, tetapi merupakan operasi pada himpunan itu sendiri. Misalnya, operasi penjumlahan bilangan $3 + 7$, dimana 3 dan 7 merupakan anggota dari suatu himpunan bilangan asli. Hal inilah yang menjadi jumlah anggota kumpulan/himpunan yang baru dari hasil penggabungan dua kumpulan anggota.

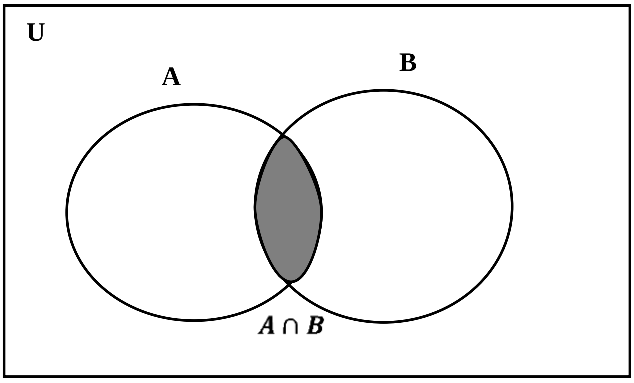
Ada beberapa operasi himpunan di dalam matematika, diantaranya yaitu irisan, gabungan, penjumlahan, selisih, komplemen, perkalian, dan beda setangkup.

1. Operasi Irisan (*Intersection*)

Definisi 4.1 Irisan dikenal juga dengan sebutan interseksi

Dua himpunan A dan B dikatakan beririsan, apabila anggota himpunan A juga dimiliki B

Notasi operasi irisan A dan B yaitu $A \cap B$
(dibaca: "A irisan B", atau "A interseksi B")



Gambar 4.1 Operasi Irisan

Operasi irisan juga dapat dituliskan dalam bentuk aljabar yaitu

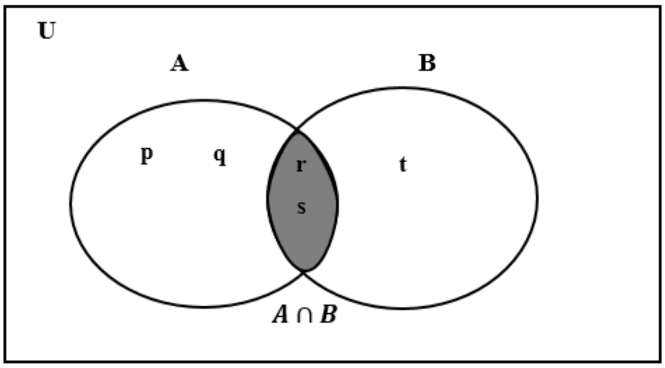
$$A \cap B = \{x | x \in A, x \in B\}$$

Operasi irisan antara dua buah himpunan melibatkan suatu relasi, yaitu relasi berpotongan dan relasi lepas. Relasi berpotongan, jika dan hanya jika (j.h.j) irisannya bukan himpunan kosong ($A \cap B \neq \emptyset$). Relasi lepas, jika dan hanya jika (j.h.j) irisannya merupakan himpunan kosong ($A \cap B = \emptyset$).

Contoh 1: Jika $A = \{p, q, r, s\}$ dan $B = \{r, s, t\}$

Maka: $A \cap B = \{r, s\}$

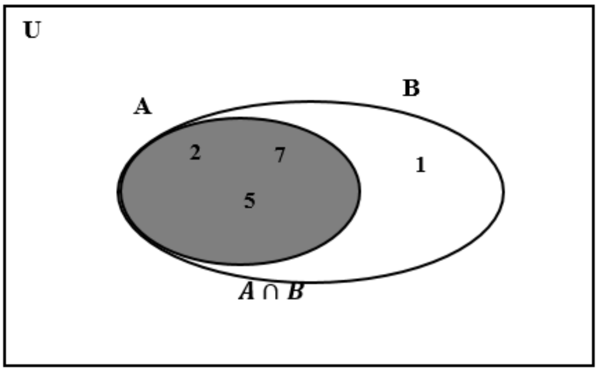
Berikut gambar bentuk diagram vennya



Contoh 2: Jika $A = \{1,2,5,7\}$ dan $B = \{2,5,7\}$

Maka: $A \cap B = \{2,5,7\}$

Berikut gambar bentuk diagram vennya



2. Operasi Gabungan (*Union*)

Operasi gabungan dua buah himpunan adalah membentuk himpunan baru yang anggota-anggotanya, meliputi semua anggota dua himpunan yang digabungkan.

Definisi 4.2 Gabungan (*union*) dari himpunan A dan B adalah himpunan elemen-elemen yang menjadi anggota himpunan A saja atau B saja, atau anggota himpunan A dan B kedua-duanya

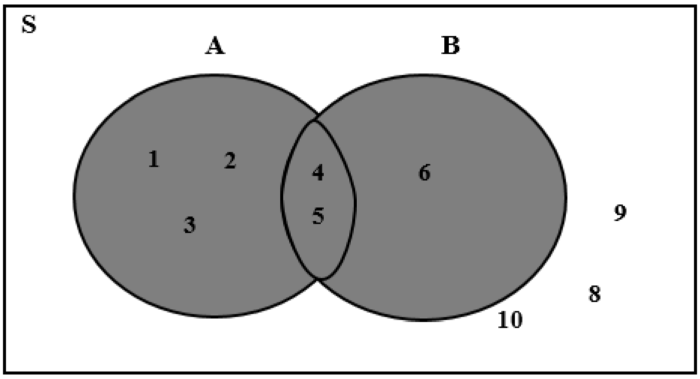
Dinotasikan $A \cup B$ ("A gabungan B" atau "A union B")

Contoh 3: $S = \{1,2,3, \dots ,10\}$

$A = \{1,2,3,4,5\}$ dan $B = \{4,5,6,7\}$

Maka: $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$

Berikut gambar bentuk diagram vennya



Gambar 4.2 Operasi Gabungan

Daerah arsiran pada diagram venn menunjukkan $A \cap B = \{4,5\}$.

Operasi gabungan dua himpunan dituliskan dalam bentuk aljabar yaitu

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ atau } x \in B\}$$

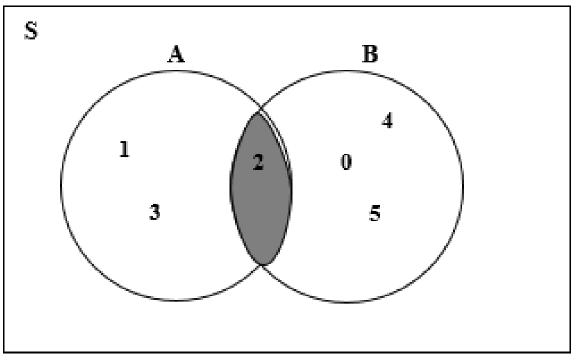
Arti "atau" ini bersifat inklusif, yaitu untuk x anggota A saja, x anggota B saja, dan x anggota irisannya keduanya.

Contoh 4: $S = \{1,2,3, \dots ,10\}$

$A = \{1,2,3\}$ dan $B = \{0,2,4,5\}$

Maka: $A \cup B = \{0,1,2,3,4,5\}$

Berikut gambar bentuk diagram vennya



3. Operasi Penjumlahan

Definisi 4.3 Penjumlahan himpunan A dengan B adalah himpunan yang anggotanya merupakan anggota himpunan A atau himpunan B, tetapi bukan anggota $A \cap B$

Dinotasikan: $A + B$

Notasi bentuk aljabar operasi penjumlahan himpunan A dan B:

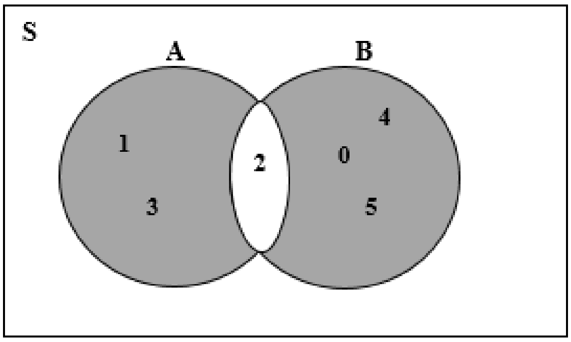
$A + B = \{x | x \in A, x \in B, x \notin (A \cap B)\}$ atau

$A + B = \{x | x \in A$ atau $x \in B$ dan $x \notin (A \cap B), x \in S\}$

Contoh 5: $A = \{1,2,3\}$ dan $B = \{0,2,4,5\}$

Maka: $A + B = \{0,1,3,4,5\}$

Berikut gambar bentuk diagram vennya



Gambar 4.3 Operasi Penjumlahan

Sifat-sifat operasi penjumlahan himpunan

1. Ketertutupan (Closure)

Misalkan: $H = \{A, B, C, \ldots\} = \{\text{himpunan}\}$

Untuk setiap A dan B anggota H

Maka: $A + B$ anggota H.

Bukti: Definisi:

$A + B = \{x | x \in A, x \in B, x \notin (A \cap B)\}$

atau

$A + B = \{x | x \in A$ atau $x \in B$ dan $x \notin (A \cap B), x \in S\}$

Diketahui bahwa hasil ruas kanan membentuk himpunan yaitu $A + B \in H$.

Jadi, untuk setiap A dan B anggota H.

2. Komutatif

Misalkan Jika $A + B = B + A$.

Bukti: Ambil sembarang $x \in A + B$, maka:

$x \in A$ atau $x \in B$ $(x \in (A \cup B))$ dan

$x \notin (A \cap B)$.

Karena: $x \in (A \cup B)$, maka:

$x \in B$ atau $x \in A$ $(x \in (B \cup A))$ dan

$x \notin (B \cap A)$

Jadi, $A + B = B + A$.

3. Assosiatif

Misalkan: Jika terdapat tiga himpunan A, B, C

Maka: $A + B + C$.

Bukti:

$$A + B + C = (A + B) + C$$

$$A + B + C = A + (B + C)$$

$$A + B + C = (A + C) + B$$

Jadi, $(A + B) + C = A + (B + C) = (A + C) + B$.

4. Identitas

Misalkan Jika A adalah himpuna tidak kosong,

Sehingga: $A + I = I + A = A$

Maka: I sebagai identitas dari operasi penjumlahan.

Bukti:

(1) $A + I = I + A$

Ambil sembarang $x \in A + I$

Maka:

$x \in A$ atau $x \in I$ dan $x \notin (A \cap I)$ atau

$x \in I$ atau $x \in A$ dan $x \notin (I \cap A)$

Sehingga dapat ditulis: $A + I = I + A$

(2) $A + I = A$

Ambil sembarang $x \in A + I$

Maka:

$x \in A$ atau $x \in I$ dan $x \notin (A \cap I)$

Karena I himpunan kosong, maka:

$A \cup I = A$ dan $A \cap I = \{\ \ \}$

Sehingga: $A + I = A$

Karena $A + I = I + A$ dan $A + I = A$.

Maka: $A + I = I + A = A$

4. Operasi Pengurangan/Selisih (Difference)

Definisi 4.4 Pengurangan atau selisih dua himpunan merupakan himpunan yang berupa semua anggota himpunan yang tidak dimiliki himpunan lain

Dinotasikan: $A - B$

Notasi bentuk aljabar:
Selisih dua himpunan A dan B adalah

$A - B = \{x | x \in A, x \notin B\}$ atau

$B - A = \{x | x \in B, x \notin A\}$

$A - B$, himpunan barunya berupa semua anggota A yang tidak ada pada B.

$B - A$, himpunan barunya berupa semua anggota B yang tidak ada pada A.

Misalkan: $A = \{a, b, c, d, e\}$ dan $B = \{a, i, u, e, o\}$

$A - B = \{b, c, d\}$

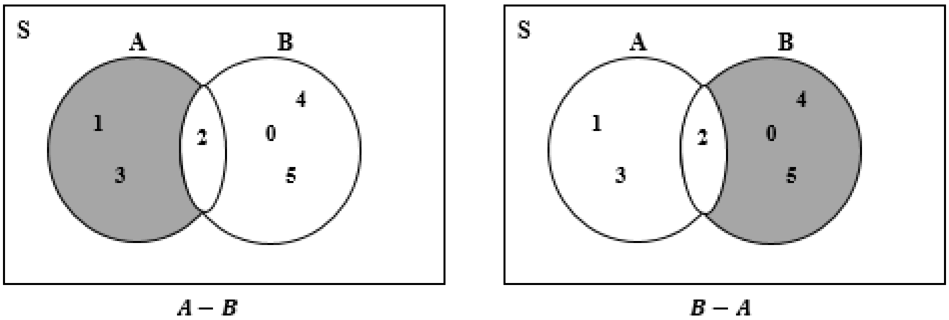
$B - A = \{i, u, o\}$

Contoh 6: $A = \{1,2,3\}$ dan $B = \{0,2,4,5\}$

$A - B = \{1,3\}$

$B - A = \{0,4,5\}$

Berikut gambar bentuk diagram vennya



Gambar 4.4 Operasi Pengurangan

Selisih dari dua himpunan pada diagram venn diatas adalah yang diarsir.

Sifat-sifat operasi pengurangan/selisih himpunan

1) Ketertutupan (Closure)

Misalkan $H = \{A, B, C, \dots\} = \{\text{himpunan}\}$

Untuk setiap A dan B anggota H

Maka: $A - B$ anggota H.

Bukti: Definisi:

$A - B = \{x | x \in A, x \notin B, x \notin (A \cap B)\}$ atau

$A + B = \{x | x \in A \text{ dan } x \notin (A \cap B), x \in S\}$

Diketahui bahwa hasil ruas kanan membentuk himpunan yaitu $A - B \in H$.

Jadi, untuk setiap A dan B anggota H.

Misalkan Jika himpunan A sama dengan himpunan B, maka hasil pengurangannya adalah himpunan kosong.

$$A - B = \{\quad\} \Leftrightarrow A = B$$

Bukti: Ambil sembarang $x \in A$, karena $A = B$, maka $x \in B$.

Karena setiap anggota A merupakan anggota B,

Maka: $A = A \cap B$

Sehingga: $A - B = \{\quad\}$.

2) Komutatif, Asosiatif, identitas

Pada operasi pengurangan, sifat komutatif, asosiatif, identitas tidak berlaku.

Komutatif $A = \{a, b, s, d, f, g, h\}$ dan $B = \{c, h, i, l, d\}$

$A - B = \{a, b, s, f, g\}$ karena $A \cap B = \{d, h\}$

$B - A = \{c, h, i\}$ karena $B \cap A = \{d, h\}$

Asosiatif $S = \{r, n, a, k, m, e, i\}, T = \{l, a, s, i, m, n\}, U = \{l, i, u\}$

$S - (T - U) = \{e, i, k, r\}$ karena $T - U = \{a, s, m, n\}$

$(S - T) - U = \{e, n, k, r\}$ karena $S - T = \{r, n, k, e\}$

$(S - U) - T = \{e, k, r\}$ karena $S - U = \{r, n, a, k, m, e\}$

Identitas Tidak berlaku, karena sifat komutatif tidak terpenuhi

5. Operasi Komplemen

Definisi 4.5 Komplemen dari himpunan A didefinisikan semua anggota himpunan semesta yang bukan anggota himpunan A.

Dinotasikan: A' atau A^c ("A aksen" atau "A komplemen")

Notasi bentuk aljabar: $A^c = \{x | x \in S, x \notin A\}$

Catatan: Jika suatu himpunan diberikan definisi secara jelas dengan notasi yang lengkap, maka hasil operasi dari gabungan, irisan, penjumlahan dan pengurangan, Sehingga hasil operasi tesebut tidak mempengaruhi himpunan semestanya.

Misalkan: Operasi gabungan himpunan $A = \{ 3, 6, 9, \ldots\}$ dan $B = \{ 4, 7, 11, \ldots\}$ adalah sama dalam semesta pembicaraan bilangan asli ataupun bilangan bulat, atau bahkan bilangan real.

Jika himpunan $A = \{ 2, 4, 6 \ldots\}$

Maka komplemen A atau A^c adalah $\{1, 3, 5, \ldots\}$,
Jika semesta pembicaraannya adalah bilangan asli

Maka komplemen A adalah $\{1, 3, 5, \ldots, 0, -1, -2, \ldots\}$.

Jika himpunan semestanya bilangan bulat

Jadi, ketika mengoperasikan komplemen suatu himpunan, semesta pembicaraan harus terlebih dahulu didefinisikan.

Contoh 7:

(1) $S = \{ 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 \}$ dan $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5, \}$.

Maka: $A^c = \{6,7,8,9,10\}$.

(2) Jika S adalah himpunan bilangan cacah
dan A adalah himpunan genap.

Maka: A^c adalah himpunan bilangan ganjil.

Contoh 8: Diketahui

$A = \{1,2,3\}, B = \{2,4,6\}, C = \{3,4,5,7\}$.

$S = \{x | 1 \leq x \leq 8, x \in Asli\} = \{ 1,2,3,4,5,6,7,8\}$,

Tentukan:

(1) $A^c = S - A = \{ 1,2,3,4,5,6,7,8 \} - \{ 1,2,3\} = \{ 4,5,6,7,8 \}$

(2) $B^c = S - B = \{ 1,2,3,4,5,6,7,8 \} - \{ 2,4,6\} = \{1,3,5,7,8\}$

(3) $C^c = S - B = \{ 1,2,3,4,5,6,7,8 \} - \{ 3,4,5,7\} = \{1,2,6,8\}$

(4) $A \cup B = \{1,2,3,4,6\}$

$(A \cup B)^c = S - (A \cup B) = \{5,7,8\}$

(5) $A \cup C = \{1,2,3,4,5,7\}$

$(A \cup C)^c = S - (A \cup C) = \{6,8\}$

(6) $A \cap B = \{2\}$

$(A \cap B)^c = S - (A \cap B) = \{1,3,4,5,6,7,8\}$

(7) $A \cap C = \{3\}$

$(A \cap C)^c = S - (A \cap C) = \{1,2,4,5,6,7,8\}$

(8) $A \cap B = \{2\}$ dan $A \cup B = \{1,2,3,4,6\}$

$A + B = (A \cup B) - (A \cap B) = \{1,3,4,6\}$

$(A + B)^c = S - (A + B) = \{2,5,7,8\}$

(9) $A - B = \{1,2,3\} - \{2,4,6\} = \{1,3\}$

$(A - B)^c = S - (A - B) = \{2,4,5,6,7,8\}$

(10) $C - B = \{3,4,5,7\} - \{2,4,6\} = \{3,5,7\}$

$(C - B)^c = S - (C - B) = \{1,2,4,6,8\}$

6. Operasi Perkalian (Cartesian Product)

Definisi 4.6 Operasi perkalian himpunan A dan B adalah hasil himpunan barunya merupakan semua pasangan berurut yang dibentuk dari anggota-anggota himpunan A dan B

Notasi bentuk aljabar: $A \times B = \{(A, B) | a \in A \text{ dan } b \in B\}$

Pasangan terurut x dan y, ditulis (x, y) merupakan suatu pasangan yang unsur pertamanya x dan unsur keduanya y

Banyaknya pasangan terurut x dan y dari himpunan A dan B adalah hasil kali hitung antara jumlah anggota himpunan A dan jumlah anggota himpunan B

Misalkan: $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{a, b\}$

Maka:

$A \times B = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$

$B \times A = \{(a,1),(b,1),(a,2),(b,2),(a,3),(b,3)\}$

Sehingga:

Hasil perkalian tersebut adalah $(x,y) \neq (y,x)$

Jadi, operasi perkalian tidak berlaku **sifat komutatif**

Contoh 9:

(1) $A = \{x|-2 < x < 4, x \in B\}$

$B = \{x|0 < x < 10, x \in bil.prima\}$.

Jumlah kemungkinan pasangan terurut adalah:

$n(A) = 5$, yaitu $\{-1,0,1,2,3\}$; $n(B) = 4$, yaitu $\{2,3,5,7\}$

Sehingga: $5 \times 4 = 20$

$$A \times B = \left\{\begin{matrix} (-1,2),(-1,3),(-1,5),(-1,7), \\ (0,2),(0,3),(0,5),(0,7), \\ (1,2),(1,3),(1,5),(1,7), \\ (2,2),(2,3),(2,5),(2,7), \\ (3,2),(3,3),(3,5),(3,7) \end{matrix}\right\}.$$

$$B \times A = \begin{Bmatrix} (2,-1),(2,0),(2,1),(2,2),(2,3) \\ (3,-1),(3,0),(3,1),(3,2),(3,3) \\ (5,-1),(5,0),(5,1),(5,2),(5,3) \\ (7,-1),(7,0),(7,1),(7,2),(7,3) \end{Bmatrix}.$$

(2) Jika A adalah himpunan makanan,

Maka: $A = \{s = soto, g = gado - gado, n = nasi, m = mie\}$

Jika B adalah himpunan minuman,

Maka: $B = \{c = cola - cola, t = teh, d = dawet\}$

Sehingga dapat dituliskan:

$A = \{s,g,n,m\}$, $B = \{c,t,d\}$

Kombinasi makanan dan minuman dituliskan:

$$A \times B = |A|.|B| = 4.3 = 12$$

Sehingga:

$$A \times B = \begin{Bmatrix} (s,c),(s,t),(s,d), \\ (g,c),(g,t),(g,d), \\ (n,c),(n,t),(n,d) \\ (m,c),(m,t),(m,d) \end{Bmatrix}$$

7. Operasi Beda Setangkup (*Symmetric Difference*)

Definisi 4.7 Beda setangkup antara dua buah himpunan merupakan suatu himpunan yang anggotanya ada pada himpunan A dan B, tetapi tidak pada keduanya.

Notasi: $A \oplus B$

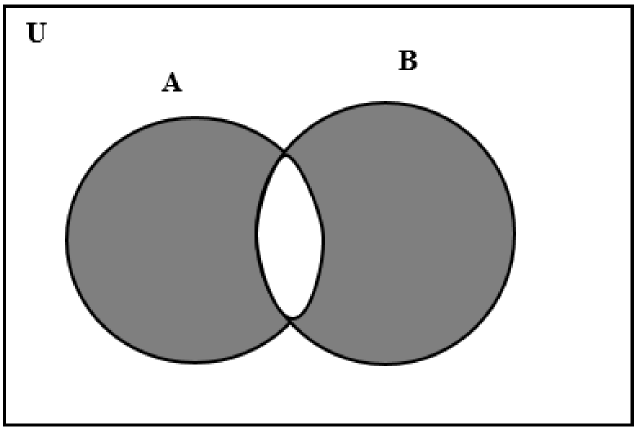
Misalkan: A dan B adalah himpunan, maka beda setangkup antara A dan B adalah:

$$A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

atau

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$$

Berikut bentuk diagram venn-nya



Gambar 4.5 Operasi Beda Setangkup

Contoh 10: Jika $A = \{2,3,5,7\}$ dan $B = \{1,2,3,4,5\}$

Maka:

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \{1,4,7\}$$

Siafat Beda Setangkup:

(1) $A \oplus B = B \oplus A$ (hukum komutatif)

(2) $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ (hukum asosiatif)

4.2.2. Prinsip Dualitas Himpunan

Prinsip dualitas berlaku bila kita menukar " $\cup$ " dengan " $\cap$ ", "S" dengan "$\emptyset$", dan sebaliknya. Pernyataan baru tersebut disebut dual dari pernyataan aslinya.

Dualitas pada Hukum Ajabar Himpunan

Jika S adalah suatu kesamaan (*identity*) yang melibatkan himpunan dan operasi-operasinya berupa irisan, gabungan, dan komplemen.

Misalkan: Jika: S merupakan kesamaan yang berupa dual dari S.

Maka: $\cup \rightarrow \cap$ atau $\cap \rightarrow \cup$ dan $\emptyset \rightarrow U$ atau $U \rightarrow \emptyset$

Sedangkan, komplemen dibiarkan seperti semula.

Maka: operasi-operasi tersebut pada kesamaan S juga benar.

Contoh 11: Diketahui pernyataan $(A \cup \emptyset) \cap (S \cup B) = A$.
Tentukan dual dari pernyataan tersebut

Maka Dual dari pernyataan $(A \cup \emptyset) \cap (S \cup B) = A$ adalah:

$$(A \cap S) \cup (\emptyset \cap B) = A$$

Contoh 12: Tentukan Dual dari $(A \cap B) \cup (A \cap B) = A$

Jawab: $(A \cap B) \cup (A \cap B) = A$

$= \big(A \cup (A \cap B)\big) \cap \big(B \cup (A \cap B)\big)$

$= \big((A \cup A) \cap (A \cup B)\big) \cap \big((B \cup A) \cap (B \cap B)\big)$

$= \big(A \cap (A \cup B)\big) \cap \big((B \cup A) \cap B\big)$

$= (A \cup B) \cap (B \cup A)$

Karena: $(B \cup A) = (A \cup B)$

Maka: $(A \cup B) \cap (A \cup B) = A$

Tabel 2. Hukum Operasi Himpunan

Hukum	**Bentuk operasi**	**Contoh**
Komutatif	$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$	
	$A \cup B = B \cup A$	$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ $B \cup A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
	$A \cap B = B \cap A$	$A \cap B = \{4, 5\}$ $B \cap A = \{4, 5\}$
Asosiatif	$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2,3,4\}$, $C = \{3, 4, 5, 6\}$ $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$, $B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{2, 3\}$, $\mathrm{B} \cap \mathrm{C} = \{3, 4\}$	
	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cup \mathrm{C} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\mathrm{A} \cup (\mathrm{B} \cup \mathrm{C}) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cap \mathrm{C} = \{3\}$ $\mathrm{A} \cap (\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = \{3\}$
Distributif	$A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{2, 3, 4\}$; dan $C = \{3, 4, 5, 6\}$ $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{1, 2, 3, 4\}$; $\mathrm{B} \cup \mathrm{C} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$; $\mathrm{A} \cup \mathrm{C} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{2, 3\}$; $\mathrm{B} \cap \mathrm{C} = \{3, 4\}$; $\mathrm{A} \cap \mathrm{C} = \{3\}$	
	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$\mathrm{A} \cap (\mathrm{B} \cup \mathrm{C}) = \{2, 3\}$ $(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{C}) = \{2, 3\}$
	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$\mathrm{A} \cup (\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = \{1, 2, 3, 4\}$ $(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cap (\mathrm{A} \cup \mathrm{C}) = \{1, 2, 3, 4\}$
Identitas	$A \cap \emptyset = \emptyset$	$A \cup \emptyset = A$
	$A \cap S = A$	$A \cup S = S$
Idempotent	$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
Komplemen	$A \cap A^C = \emptyset$	$\emptyset^C = S$

Hukum	Bentuk operasi	Contoh
	$A \cup A^C = S$	$S^C = \emptyset$
	$(A^C)^C = A$	
Selisih	$A - B \neq B - A$	$A - \emptyset \neq \emptyset - A$
	$A - (B - C) \neq (A - B) - C$	
Absorption	$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$
	$A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{0, 3, 4, 5\}$ $A \cap B = \{3\}$, $A \cup B = \{0,1,2, 3, 4, 5\}$	
	$A \cup (A \cap B) = \{1, 2, 3\} \cup \{3\}$ $A \cup (A \cap B) = \{1, 2, 3\}$ $A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B)$ $= \{1, 2, 3\} \cap \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ $A \cap (A \cup B) = \{1, 2, 3\} = A$ $A \cap (A \cup B) = A$

Tabel 3. Prinsip Dualitas Himpunan

Hukum	Lambang	Lambang Dualitas
Identitas	$A \cup \emptyset = A$	$A \cap U = A$
Null/Dominasi	$A \cap \emptyset = \emptyset$	$A \cup U = U$
Komplemen	$A \cup A = U$	$A \cap A = \emptyset$
Idempotent	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
Penyerapan	$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$
Komutatif	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Asosiatif	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Distributif	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

4.2.3. Prinsip Inklusi-Eksklusi

Prinsip inklusi-eksklusi merupakan perluasan ide dalam diagram venn beserta operasi irisan dan gabungan.

Perhatikan informasi pernyataan berikut.

Mahasiswa yang hadir dalam perkuliahan, 20 orang memiliki kegemaran membaca dan 30 orang memiliki kegemaran menulis. Berapa orang mahasiswa yang memiliki kegemaran membaca atau menulis?

Berdasarkan ilustrasi tersebut, informasi yang diketahui belumlah lengkap, dikarenakan untuk dapat menghitung banyaknya mahasiswa yang memiliki kegemaran membaca atau menulis haruslah ada informasi mengenai mahasiswa yang menyukai keduanya.

Misalkan: A dan B sembarang himpunan

Penjumlahan $|A| + |B|$, artinya:

- Menghitung banyaknya elemen A yang tidak terdapat dalam B
- Banyaknya elemen B yang tidak terdapat dalam A tepat satu kali
- Banyaknya elemen yang terdapat dalam $A \cap B$ sebanyak dua kali

Sehingga:

Pengurangan banyaknya elemen yang terdapat dalam $A \cap B$ dari $|A| + |B|$ membuat banyaknya anggota $A \cap B$ dihitung tepat satu kali.

Dengan demikian:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \oplus B| = |A| + |B| - |2A \cap B|$$

Sedangkan untuk tiga himpunan, ,misalnya himpunan A, B dan C adalah:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Pernyataan tersebut terhadap operasi gabungan dari sejumlah himpunan dinamakan prinsip inklusi-eksklusi.

Contoh 13: Dalam sebuah kelas terdapat 25 mahasiswa yang menyukai matematika diskrit, 13 mahasiswa menyukai aljabar linier dan 8 orang diantaranya menyukai matematika diskrit dan aljabar linier. Berapa mahasiswa terdapat dalam kelas tersebut?

Jawab: A himpunan mahasiswa menyukai matematika diskrit

B himpunan mahasiswa menyukai aljabar linier

$A \cap B$ mahasiswa menyukai kedua mata kuliah

Sehingga:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B| = 25 + 13 - 8 = 30$$

Jadi, terdapat 30 orang mahasiswa yang terdapat di kelas

Contoh 14: Berapa banyak bilangan bulat positif yang tidak melampaui 1000 yang habis dibagi oleh 7 atau 11?

Jawab: P bilangan bulat positif tidak lebih 1000 habis dibagi 7

Q bilangan bulat positif tidak lebih 1000 habis dibagi 11

Dengan demikian:

- $P \cup Q$ adalah bilangan bulat positif tidak lebih 1000 habis dibagi 7 atau 11
- $P \cap Q$ bilangan bulat positif tidak lebih 1000 habis dibagi 7 dan 11

Maka:

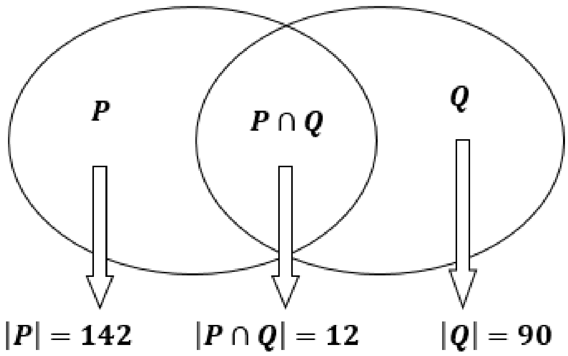
$|P| = \left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor = 142$ dan $|Q| = \left\lfloor \frac{1000}{11} \right\rfloor = 90$

$|P \cap Q| = \left\lfloor \frac{1000}{kpk(7,11)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1000}{77} \right\rfloor = 12$

$$|P \cup Q| = |P| + |Q| - |P \cap Q| = 142 + 90 - 12 = 220$$

Jadi, terdapat 220 bilangan bulat positif tidak melampaui 1000 yang habis dibagi 7 atau habis dibagi 11

Berikut bentuk diagram venn-nya



Gambar 4.6 Prinsip Inklusi-Eksklusi Dua Himpinan

Contoh 15: Berapa banyak bilangan bulat positif yang tidak melampaui 1000 yang habis dibagi oleh 5, 7 atau 11?

Jawab: P bilangan bulat positif tidak lebih 1000 habis dibagi 5

Q bilangan bulat positif tidak lebih 1000 habis dibagi 7

R bilangan bulat positif tidak lebih 1000 habis dibagi 11

Dengan demikian:

- $P \cup Q \cup R$ bilangan bulat positif tidak lebih 1000 yang habis dibagi 5 atau 7 atau 11
- $P \cap Q \cap R$ bilangan bulat positif tidak lebih 1000 yang habis dibagi 5, 7, 11
- $P \cap Q$ bilangan bulat positif tidak lebih 1000 yang habis dibagi 5 dan 7
- $P \cap R$ bilangan bulat positif tidak lebih 1000 yang habis dibagi 5 dan 11
- $Q \cap R$ bilangan bulat positif tidak lebih 1000 yang habis dibagi 7 dan 11

Maka:

$|P| = \left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor = 200$;

$|Q| = \left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor = 142$;

$|R| = \left\lfloor \frac{1000}{11} \right\rfloor = 90$

$|P \cap Q| = \left\lfloor \frac{1000}{kpk(5,7)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1000}{35} \right\rfloor = 28$

$|P \cap R| = \left\lfloor \frac{1000}{kpk(5,11)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1000}{55} \right\rfloor = 18$

$|Q \cap R| = \left\lfloor \frac{1000}{kpk(7,11)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1000}{77} \right\rfloor = 12$

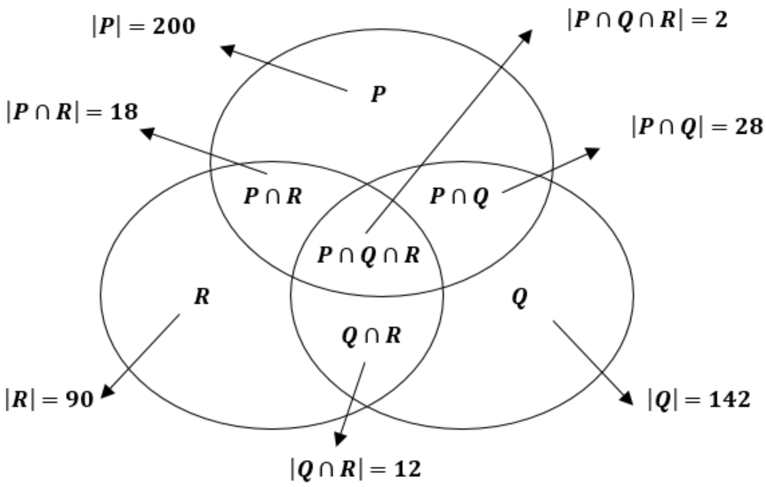
$|P \cap Q \cap R| = \left\lfloor \frac{1000}{kpk(5,7,11)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1000}{385} \right\rfloor = 2$

$|P \cup Q \cup R| = 200 + 142 + 90 + 90 - 28 - 18 - 12 + 2$

$|P \cup Q \cup R| = 376$

Jadi, terdapat 376 bilangan bulat positif tidak melampaui 1000 yang habis dibagi 5, 7 atau habis dibagi 11

Berikut bentuk diagram venn-nya



Gambar 3.7 Prinsip Inklusi-Eksklusi Tiga Himpunan

4.3. Rangkuman

Operasi adalah suatu relasi atau hubungan yang berkenaan dengan satu unsur atau lebih, sehingga menghasilkan unsur lain yang unik (tunggal). Operasi-operasi yang digunakan tidak dilakukan pada anggota-anggota himpunan, melainkan operasi pada himpunan itu sendiri. Operasi himpunan meliputi: penjumlahan, pengurangan, perkalian, irisan, gabungan, komplemen, beda setangkup. Pada prinsip dualitas himpunan berlaku operasi himpunan dalam menerapkan sifat-sifatnya, seperti: komutatif, asosiatif, distributive, identitas, idempotent, komplemen, selisih, absorption. Sedangkan pada prinsip inklusi-eksklusi berlaku pada operasi irisan, gabungan, dan beda setangkup dengan menerapkan penggunaan diagram venn.

4.4. Referensi

1. Kunen, K. 2011. *Set Theory*. UK: King College London
2. Pinter, C. C. 2014. *Set Theory*. South Korea: Kyung Moon Publishers
3. Weiss, W. A. R. 2008. *An Introduction to Set Theory*. USA: Toronto University
4. Smith, J. T. 2008. *Basic Set Theory*. San Francisco State University

4.5. Latihan

Soal Formatif 3

1. Diketahui $A = \{\text{bilangan prima kurang dari } 12\}$ dan $B = \{1,3,5,7,9\}$. Maka $A \cap B$ adalah ...

   A. $\{1, 3, 5\}$ C. $\{2, 3, 5, 7\}$

   B. $\{2, 3, 5\}$ D. $\{3, 5, 7\}$

2. Jika $A = \{2, 3, 5\}$ dan $B = \{\text{bilanga ganjil kurang dari } 10\}$ maka $A \cup B$ adalah ...

   A. $\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$ C. $\{2, 3, 5, 7, 9\}$

   B. $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ D. $\{1, 5, 7, 9\}$

3. Jika:

   P ={tiga bilangan prima yang pertama}

   Q ={bilangan asli kurang dari 10}

   Maka: $Q - P$ adalah ...

   A. $\{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ C. $\{1, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

   B. $\{1, 2, 4, 6, 8\}$ D. $\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

4. Jika $A = \{1,2,3,4,5\}$ dan $B = \{4,5,6,7,8,9\}$, maka $A + B$ adalah ...

   A. $\{1, 2, 3, 6, 7, 8, 9\}$ C. $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

   B. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ D. $\{6, 7, 8, 9\}$

5. Jika $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4\}$, dan $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, maka $(A \cup B) \cap C$ adalah ....

   A. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ C. $\{2, 4\}$

   B. $\{5\}$ D. $\{1, 2, 3, 4\}$

6. Tentukan $A - (B \cap C)$ dan $A - (B \cup C)$,

   jika $A = \{10, 11, 12, 13\}$, $B = \{$bilangan cacah antara 10 dan 15$\}$

   $C = \{x \mid 8 \leq 5 \leq 12, x \in$ bilangan asli).

   A. $\{11, 12\}$ dan $\{10, 11, 12, 13\}$ C. $\{10, 13\}$ dan $\{10, 11, 12, 13\}$

   B. $\{11, 12\}$ dan $\{8, 9, 14\}$ D. $\{10, 13\}$ dan $\{8, 9, 14\}$

7. Dikelas 10 terdapat 35 siswa. $(25 - x)$ siswa suka permen dan $(18 - x)$ suka coklat. Jika 7 siswa tidak suka permen dan coklat, maka banyaknya anak yang suka coklat adalah .... siswa

   A. 3 C. 5

   B. 4 D. 6

8. Dari sekelompok anak kelas 8 diperoleh data, 15 anak suka minum susu, 10 anak suka minum teh dan 5 anak suka minum keduanya, serta 3 anak tidak suka keduanya. Jumlah anak dalam kelompok tersebut adalah …

   A. 23 C. 20

   B. 33 D. 17

9. Dari 40 anak, diketahui 16 anak suka menulis, 22 anak suka membaca, dan 12 anak tidak suka menulis dan membaca. Banyaknya anak yang suka menulis dan membaca adalah .... anak

   A. 10 C. 14

   B. 12 D. 16

10. Sebuah agen majalah dan koran ingin memiliki pelanggan sebanyak 75 orang. Banyak pelanggan yang dimiliki adalah 20 orang berlangganan majalah, 35 orang berlangganan koran, dan 5 orang berlangganan keduanya. Agar keinginannya tercapai, banyak pelanggan yang harus ditambahkan adalah …

    A. 10 orang C. 25 orang

    B. 15 orang D. 70 orang

Soal Uraian 3:

1. Jika $S = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{4,5,6,7\}$. Tentukanlah:
   a) $A \cap B$ dan $A \cup B$
   b) $A + B$ dan $A - B$
   c) $A \times B$ dan $B \times A$
   d) A' dan B'
2. Jika $A = \{2,3,4,5\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $C = \{a, b, c, d, e\}$. Tentukanlah:

a) $A + B$ dan $B + C$

b) $A - B$ dan $B - A$

c) $A \times B$; $B \times C$ dan $A \times C$

d) $C - (A + B)$ dan $(A - B) - (B \times C)$

3. Jika diketahui $n(S) = 50$, $n(A) = (15 - x)$, $n(B) = (27 + x)$, tentukan gambar diagram vennya dan banyaknya irisan A dan B.
4. Diketahui $A = \{8, 9, 10, 11, 12\}$, $B = \{bilangan\ cacah\ kurang\ dari\ 10\}$, dan $C = \{x \mid 2 \leq x \leq 12, x \in bilangan\ asli)$. Tentukan $A - (B \cap C)$ dan $A - (B \cup C)$.
5. Jika $A = \{1, 2,3,4,5\}$, $B = \{ 4, 6, 8\}$, $C = \{3, 6, 9, 15, 21\}$. Tentukanlah:

   a) $A \oplus B$

   b) $A \oplus C$

   c) $C - (A \oplus B)$

   d) $B - (A \oplus C)$

4.6. Kunci Jawaban

Kunci Soal Formatif 3

1.	D	6.	D
2.	C	7.	A
3.	B	8.	A
4.	A	9.	A
5.	B	10.	C

Periksalah jawaban anda dengan kunci jawaban formatif 3. Hitunglah jawaban yang benar untuk mengetahui tingkat penguasaan anda.

Skor	Keterangan
90 – 100	Baik sekali
80 – 89	Baik
70 – 79	Cukup
< 70	Kurang

Apabila anda mencapai tingkat penguasaan di bawah 80 diharapkam untuk mempelajari kembali bagian materi yang dianggap belum dikuasai.

Bab 5	Relasi dan Fungsi

Bab 5 Relasi dan Fungsi

Tujuan Pembelajaran:

1. Mahasiswa mampu menjelaskan relasi dan fungsi beserta sifatnya
2. Mahasiswa mampu menjelaskan jenis-jenis relasi dan fungsi
3. Mahasiswa mampu menjelaskan perbedaan fungsi komposisi dan fungsi invers
4. Mahasiswa mampu menentukan sifat-sifat fungsi komposisi, dan fungsi invers
5. Mahasiswa mampu menyelesaikan soal-soal relasi dan fungsi
6. Mahasiswa mampu menyelesaikan soal-soal fungsi komposisi, dan fungsi invers

KEGIATAN BELAJAR 4

5.1. Deskripsi Singkat

Relasi merupakan aturan yang menghubungkan anggota pada suatu himpunan dengan anggota himpunan lainnya. Sehingga Relasi antara himpunan A dan himpunan B merupakan himpunan yang berisi pasangan terurut yang mengikuti aturan tertentu (relasi biner). Hasil semua pasangan terurut merupakan hasil *Cartesian product* dua buah himpunan.

Fungsi dikatakan juga sebagai sebuah relasi yang memiliki aturan khusus. Jika A dan B suatu himpunan, maka fungsi dari A ke B adalah suatu aturan yang mengaitkan satu (tepat satu) unsur di B untuk setiap unsur di A. Penyajian fungsi dapat melalui himpunan pasangan terurut, formula pengisian nilai, kata-kata.

Fungsi komposisi merupakan penggabungan operasi dua jenis fungsi untuk menghasilkan fungsi baru. **Fungsi invers** merupakan sebuah fungsi berkebalikan dari fungsi asalnya. Untuk menentukan invers suatu fungsi $y = f(x)$, maka dapat dilakukan dengan mengubah persamaan $y = f(x)$ ke bentuk $x = f(y)$.

5.2. Uraian Materi

5.2.1. Relasi Pada Himpunan

1. Definisi Relasi Pada Himpunan

Pada kegiatan belajar sebelumnya, telah dipelajari tentang *Cartesian product* yaitu berupa pasangan terurut dengan menghubungkan dari dua himpunan. Hasil semua pasangan terurut merupakan hasil *Cartesian product* dua buah himpunan. Sebagian dari anggota himpunan *Cartesian product* mempunyai hubungan khusus (tertentu) antara dua unsur pada pasangan terurut dengan aturan tertentu.

Relasi merupakan aturan yang menghubungkan anggota pada suatu himpunan dengan anggota himpunan lainnya. Sehingga **Relasi** antara himpunan A dan himpunan B merupakan himpunan yang berisi pasangan terurut yang mengikuti aturan tertentu. Aturan yang menghubungkannya disebut **relasi biner**.

Definisi 5.1 **Relasi Biner** R antara himpunan A dan B merupakan himpunan bagian dari *Cartesian product:*

$$A \times B \text{ atau } R \subseteq (A \times B).$$

Notasi relasi biner dituliskan: $\boldsymbol{a\ R\ b}$ atau $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \boldsymbol{R}$,

Artinya bahwa a dihubungankan dengan b oleh R

Notasi bukan relasi biner adalah $\boldsymbol{a} \not{\boldsymbol{R}}\ \boldsymbol{b}$ atau $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \notin \boldsymbol{R}$,

Artinya bahwa a tidak dihubungkan oleh b oleh relasi R

Himpunan A disebut daerah asal (*domain*) dari R

Himpunan B disebut daerah hasil (*range*) dari R.

Contoh 1: Misalkan: $A = (2,3,4)$ dan $B = (2, 4, 8, 9, 15)$,

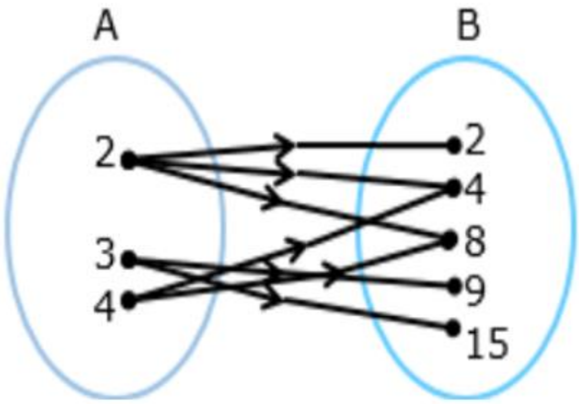
Jika didefinisikan relasi R dari A ke B dengan aturan:

$$(a, b) \in R, \text{ jika } a \text{ faktor prima } b$$

Jawab: Berdasarkan *Cartesian product:* $A \times B$ diperoleh:

$$A \times B = \begin{Bmatrix} (2,2), (2,4), (2,8), (2,9), (2,15), \\ (3,2), (3,4), (3,8), (3,9), (3,15), \\ (4,2), (4,4), (4,8), (4,9), (4,15) \end{Bmatrix}$$

Dengan menggunakan definisi relasi R dari A ke B, Maka: $R = \{(2,2),(2,4),(2,8),(3,9),(3,15)\}$



Gambar 5.1 Relasi $A \times B$

Contoh 2: Misalkan: R adalah relasi pada himpunan $A = (2,3,4)$,

Didefinisikan $(x, y) \in R$,

Jika dan hanya jika x habis dibagi y

Jawab: Berdasarkan *Cartesian product:* $A \times B$

Maka relasi R pada A diperoleh:

$$R = \{(2,2),(4,4),(4,2),(8,8),(8,2),\\ (8,4),(3,3),(9,9),(9,3)\}$$

2. Penyajian Relasi Pada Himpunan

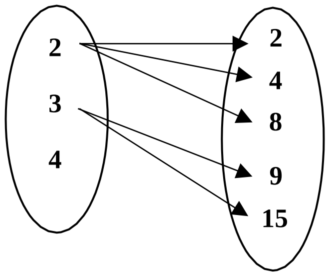
a) Penyajian Relasi dengan Diagram Panah

Contoh 3: Misalkan: $A = \{2,3,4\}$ dan $B = \{2,4,8,9,15\}$

Jika relasi R dari A ke B dengan aturan: $(a, b) \in R$

Maka: a faktor prima dari b

Sehingga diagram panah sebagai berikut:



Gambar 5.2 Diagram Panah ": a faktor prima dari

b) Penyajian Relasi berupa Pasangan Terurut

Contoh 4: Berdasarkan Relasi pada contoh 3,

Maka dapat dinyatakan dalam bentuk pasangan terurut berikut, yaitu:

$$R = \{(2,2),(2,4),(2,8),(3,9),(3,15)\}$$

c) Penyajian Relasi dengan Tabel

Dalam penyajian bentuk tabel, pada kolom pertama menyatakan daerah asal (*domain*), kolom kedua menyatakan daerah hasil (*range*).

Contoh 5: Misalkan: $A = \{2,3,4\}$ dan $B = \{2,4,8,9,15\}$

Jika relasi R dari A ke B dengan aturan: $(a,b) \in R$

Maka:

$$R = \{(2,2),(2,4),(2,8),(3,9),(3,15)\}$$

Sehingga bentuk penyajian tabelnya sebagai berikut:

Tabel 4. Relasi a faktor prima dari b.

Domain	Range
2	2
2	4
2	8
3	9
3	15

d) Penyajian Relasi dengan Matriks

Contoh 6: Misalkan: R relasi yang menghubungkan,

Himpunan $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ dan

Himpunan $B = \{b1, b2, \ldots, bn\}$.

Maka relasi tersebut dapat disajikan dalam bentuk matriks berikut:

$$M = \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_m \end{array} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & m_{2n} \\ m_{m1} & m_{m2} & m_{mm} \end{bmatrix}$$

Unsur-unsur m_{ij} pada matriks bernilai satu atau nol, tergantung apakah unsur a_i pada himpunan A mempunyai relasi dengan unsur b_j pada himpunan B.

Pernyataan tersebut dapat dituliskan dalam bentuk:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & (a_i, b_j) \in R \\ 0, & (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

e) Penyajian Relasi dengan Graf Berarah

Relasi pada sebuah himpunan dapat disajikankan secara grafis dengan graf berarah (*directed graph* atau *digraph*). Graf berarah digunakan hanya sebagai representasi relasi pada suatu himpunan (bukan antara dua himpunan). Tiap unsur himpunan dinyatakan dengan sebuah titik (disebut juga simpul atau *vertex*), dan tiap pasangan terurut dinyatakan dengan busur (*arc*).

Jika $(a, b) \in R$, maka sebuah busur dibuat dari simpul a ke b.

Simpul a disebut simpul asal (*initial vertex*)

Simpul b disebut simpul tujuan (*terminal vertex*).

Pasangan terurut (a, a) dinyatakan dengan busur dari simpul a ke a sendiri.

Busur semacam itu disebut *loop*.

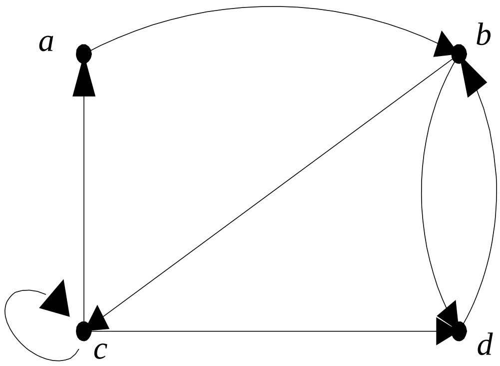
Contoh 7: Misalkan

$R = \{(a, b), (b, c), (b, d), (c, c)\ (c, a), (c, d), (d, b)\}$

adalah relasi pada himpunan $\{a, b, c, d\}$.

Maka:

Relasi R dapat di sajikan dalam bentuk graf berarah berikut



Gambar 5.3 Relasi Pada Graf Berarah

3. Sifat-sifat Relasi Pada Himpunan

Ada beberapa sifat relasi pada himpunan, yaitu:

a) Refleksif

Relasi pada himpunan A disebut refleksif, jika $(a, a) \in R, \forall a \in R$.

Contoh 8: Jika $A = \{1,2,3\}$

Maka:

$$R = \{(1,1), (1,3), (2,2), (2,1), (2,3), (2,3)\}$$

adalah relasi refleksif

b) Setangkup (*Symmetric*)

Relasi R pada himpunan A disebut setungkup:

Jika $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$, untuk semua $a, b \in A$

Contoh 9: Jika $A = \{1,2,3,4\}$

Maka:

$$R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,3), (3,2), (4,4)\}$$

adalah relasi setungkup

c) Tolak Setangkup (*Antisymmetric*)

Relasi R pada himpunan A disebut tolak setungkup:

Jika $(a,b) \in R$ dan $(b,a) \in R$ untuk semua $a,b \in A$

Contoh 10: Jika $A = (1,2,3)$

Maka:

$$R = \{(1,1),(2,2),(1,2)\}$$

adalah relasi tolak setungkup

d) Menghantar (*transitive*)

Relasi R pada himpunan A disebut transitive:

Jika $(a,b)\ R$ dan $(b,c)R$, Maka $(a,c) \in R$, untuk semua $a,b,c \in A$

Contoh 11: Jika $A = \{1,2,3,4\}$

Maka:

$$R = \{(1,2),(1,3),(2,3),(3,4),(1,4),(2,4)\}$$

adalah relasi transitif

e) Kesetaraan (*equivalence relation*)

Relasi R pada himpunan A disebut relasi kesetaraan:

Jika meliputi reflektif, setungkup, dan menghantar

Contoh 12: Jika $A = \{1,2,3,4\}$

Maka:

$$R = \{(1,1,),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),$$
$$(3,2),(3,3),(4,4)\}$$

adalah relasi kesetaraan

4. Jenis-jenis Relasi pada Himpunan

a) Relasi Simetrik

Misalkan: $R = \{A, B, P(x, y)\}$ suatu relasi.

R disebut relasi simetrik:

Jika tiap $(a, b)R$, berlaku $(b, a)R$ atau Jika $a\ R\ b$, berakibat $b\ R\ a$

Catatan: Jika ada suatu pasangan, misalnya (a, b),

Maka: apakah (b, a) juga ada.

Jika tidak ada,

Maka: dipastikan relasi tersebut tidak simetrik

b) Relasi Anti Simetrik

Suatu relasi R disebut relasi anti simetrik:

Jika $(a, b)R$ dan $(b, a)R$, maka $a = b$

Jika $a, b \in R$, $a \neq b$, maka: $(a, b)R$ atau $(b, a)R$, tidak kedua-duanya

Misalkan: R suatu relasi himpunan bilangan asli,

Didefinisikan bahwa "y habis dibagi x",

Maka: R merupakan relasi anti simetrik,

Dikarenakan:

Jika b habis dibagi a dan a habis dibagi b

Maka: $a = b$

Contoh 13: Jika $A = \{1, 2, 3\}$,

$$R_1 = \{(1,1), (2,1), (2,2), (2,3), (3,2)\}$$

Maka: R_1 bukan relasi anti simetrik,

Karena $(2,3)R_1$ dan $(3,2)R_1$

c) Relasi Transitif

Misalkan: R relasi pada himpunan A

R disebut relasi transitif:

Jika $(a, b)R$ dan $(b, c)R$, maka $(a, c)R$

Sehingga:

Jika a berelasi dengan b, b berelasi dengan c,

Maka: a berelasi dengan c.

Contoh 14: Jika $A = \{a, b, c\}$ dan

$$R = \{(a, b), (a, c), (b, a), (c, b)\}$$

Maka: R **bukan** relasi transitif

Karena $(b, a)R$ dan $(a, c)R$,

akan tetapi tetapi $(b, c)R$

Agar R menjadi relasi transitif:

Maka:

$$\lambda R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c),$$
$$(c, a), (c, b), (c, c)\}$$

d) Relasi Refleksif

Misalkan: $R = \{A, B, P(x, y)\}$ suatu relasi.

R disebut relasi refleksif:

Jika setiap A berlaku: $(a, a)R$

Artinya setiap anggota pada A berelasi dengan dirinya sendiri

Maka: a berelasi dengan c.

Contoh 15: Diketahui:

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ dan

$R = \{(1,1),(2,3),(3,3),(4,2),(4,4)\}$.

Apakah R relasi refleksif?

Maka: R bukan relasi refleksif,

Karena: $(2,2)$ tidak termasuk dalam R

Jika $(2,2)$ termasuk dalam R, yaitu:

$$R_1 = \{(1,1),(2,2),(2,3),(3,3),(4,2),(4,4)\}$$

Maka: R_1 merupakan relasi refleksif

e) Relasi Invers

Misalkan: R adalah relasi dari himpunan A ke B

Invers R dinyatakan dengan relasi dari B ke A yang mengandung semua pasangan terurut yang apabila dipertukarkan masih termasuk dalam R.

Dinotasikan: $R^{-1} = \{(b,a):(a,b)R\}$

Contoh 16: $A = \{1,2,3\}$ dan $B = \{x,y\}$

$R = \{(1,x),(1,y),(3,x)\}$ relasi dari A ke B

$$R^{-1} = \{(x,1),(y,1),(x,3)\}$$

adalah relasi invers dari B ke A

5. Operasi Relasi pada Himpunan

Relasi merupakan himpunan pasangan terurut, maka beberapa operasi aljabar yang berlaku pada himpunan juga berlaku pada relasi. Pada operasi himpunan, seperti: irisan, gabungan, selisih, dan beda setangkup juga berlaku antara dua relasi.

Misalkan: Jika R_1 dan R_2 merupakan relasi dari himpuna A ke B

Maka:

$R_1 \cap R_2$; $R_1 \cup R_2$; $R_1 - R_2$; $R_1 \oplus R_2$

Juga merupakan relasi dari A ke B

Contoh 17: Misalkan $A = \{a, b, c\}$ dan $B = \{a, b, c, d\}$

Relasi $R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$

Relasi $R_2 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d)\}$

Maka:

$R_1 \cap R_2 = \{(a, a)\}$

$R_1 \cup R_2 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (a, d)\}$

$R_1 - R_2 = \{(b, b), (c, c)\}$

$R_2 - R_1 = \{(a, b), (a, c), (a, d)\}$

$R_1 \oplus R_2 = \{(b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (a, d)\}$

Jika relasi R_1 dan R_2 disajikan dalam bentuk matriks M_{R1} dan M_{R2}.
Maka matriks yang menyatakan gabungan dan irisan dari kedua relasi tersebut adalah:

$$M_{R1 \cup R2} = M_{R1} \vee M_{R2} \text{ dan } M_{R1 \cap R2} = M_{R1} \wedge M_{R2}$$

Contoh 18: Misalkan relasi R_1 dan R_2 dinyatakan dalam bentuk matriks berikut:

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka:

$$M_{R1 \cup R2} = M_{R1} \vee M_{R2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{R1 \cap R2} = M_{R1} \wedge M_{R2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Misalkan: R adalah relasi dari himpunan A ke B,

T adalah relasi dari himpunan B ke C

Komposisi R dan S, dinotasikan dengan $T\ o\ R$ adalah relasi dari A ke C

$$T\ o\ R = \{(a, c) | a \in A, c \in C, dan\ b \in B\}$$

Sehingga: $(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in S$

Contoh 19: Misalkan: $A = \{a, b, c\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, dan $C = \{s, t, u\}$

Relasi dari himpunan A ke B:

$$R = \{(a, 2), (a, 6), (b, 4), (c, 4), (c, 6), (c, 8)\}$$

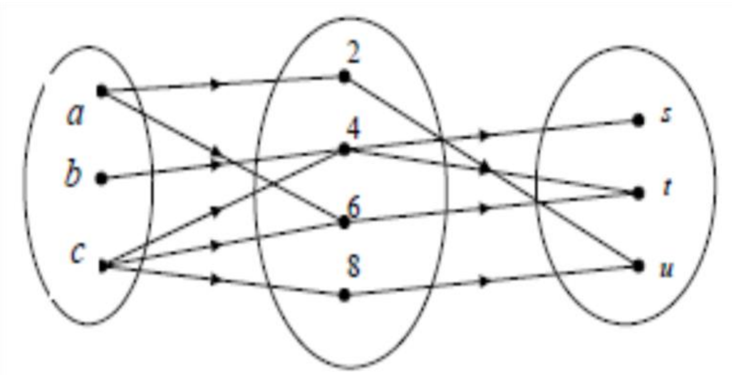
Relasi dari himpunan B ke C:

$$T = \{(2, u), (4, s), (4, t), (6, t), (8, u)\}$$

Komposisi R dan T adalah:

$$T\ o\ R = \{(a, u), (a, t), (b, s), (b, t), (c, s), (c, t), (c, u)\}$$

Berikut bentuk diagram panahnya.



Gambar 5.4 Relasi Tiga Himpunan

6. Relasi Ekuivalensi dan Terurut

Definisi 5.2 Sebuah relasi pada himpunan A, dinamakan

Relasi ekivalen

"Jika relasi tersebut refleksif, simetri dan transitif"

Dua unsur yang berelasi ekivalen disebut ***equivalent***

Contoh 20: Misalkan R merupakan relasi pada sebuah Z,

Dinyatakan:

$a\ R\ b$, jika dan hanya jika $a = b$ atau $a = -b$

Apakah relasi tersebut merupakan relasi ekivalen?

Jawab:
- $a = b$

Jika $a\ R\ a$, untuk setiap $a \in Z$.

Jadi R merupakan relasi refleksif.

- Jika $a = \pm\, b$ dan $b = \pm\, c$

Akibatnya $a = \pm\, c$.
Jika $a\ R\ b$, maka $b\ R\ c$ sehingga $a\ R\ c$.

Jadi R merupakan relasi transitif.

- Jika $a = b$ atau $a = -b$

Maka $b = a$ atau $b = -a$.
Jika $a\ R\ b$, maka $b\ R\ a$.

Jadi R merupakan relasi simetri.

Dengan demikian R merupakan relasi ekivalen

Contoh 21: Misalkan R merupakan relasi pada sebuah himpunan Riil,

Dinyatakan:

$a\ R\ b$, jika dan hanya jika $a - b \in Z$`

Apakah relasi tersebut merupakan relasi ekivalen?

Jawab: ➢ Untuk setiap $a \in Riil$

Maka: $a - a = 0 \in$ bilangan bulat

Karena R bersifat refleksif.

➢ Misalkan: $a\ R\ b$

Maka: $(a - b) \in Z$.
Jadi R bersifat simetri

➢ Jika $a\ R\ b$ dan $b\ R\ c$

Artinya $(a - b), (b - c) \in Z$, Maka:
$(a - c) = (a - b) + (b - c)$ adalah bilangan bulat.
Karena: $a\ R\ c$, Jadi R bersifat transitif.

Dengan demikian R merupakan relasi ekivalen.

Misalkan: R adalah relasi ekivalen pada himpunan A

Kelas ekivalen dari a adalah relasi semua unsur himpunan dengan suatu unsur a di A.

Dinotasikan $[a]_R$.

Jika hanya ada satu relasi dinotasikan $[a]$

Contoh 22: Tentukan kelas ekivalen 0, 1, – 2, dan -3 pada relasi modul kongruen 4!

Jawab: $[0] = \{\dots, -12, -8, -4, 0,4,8,12, \dots\}$

$[1] = \{\dots, -11, -7, -3, 1, 5, 9, \dots\}$

$[-2] = \{\dots, -10, -6, -2, 2, 6, 10, \dots\}$

$[-3] = \{\dots, -11, -7, -3, 1, 5, 9, \dots\}$

Definisi 5.3 Sebuah relasi R pada himpunan S dikatakan

Relasi terurut parsial:

"Jika bersifat refleksif, antisimetri dan transitif"

Himpunan terurut parsial adalah sebuah himpunan S dengan sebuah relasi R yang terurut parsial (*partially ordering set – poset*), dinotasikan: (S, R)

Contoh 23: Tunjukan bahwa relasi ' $\leq$ ' merupakan relasi terurut pada Z

Jawab:

Karena: $a \leq a$, untuk setiap $a \in Z$	Maka relasi ' $\leq$ ' bersifat refleksi
Jika $a \leq b$ dan $b \leq a$ berarti $a = a$	Jadi relasi ' $\leq$ ' bersifat antisimetri
Jika $a \leq b$ dan $b \leq c$ berarti $a \leq c$	Jadi relasi ' $\leq$ ' bersifat transitif.

Dengan demikian relasi ' $\leq$ ' merupakan relasi terurut pada Z.

5.2.2. Fungsi Pada Himpunan

1. Definisi Fungsi Pada Himpunan

Misalkan: A dan B merupakan himpunan

Suatu fungsi f dari A ke B merupakan sebuah aturan yang mengkaitkan satu (tepat satu) unsur di B untuk setiap unsur di A. Dinotasikan $f(a) = b$.

Jika b merupakan unsur di B yang dikaitkan oleh f untuk suatu a di A. Artinya bahwa jika $f(a) = b$ dan $f(a) = c$

Maka $b = c$

Definisi 5.4 Jika f adalah fungsi dari himpunan A ke B, dituliskan:

$$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}$$

Artinya f memetakkan himpunan A ke B

A adalah daerah asal (*domain*) dari f

B adalah daerah asal (*kodomain*) dari f

Sehingga: **fungsi** merupakan sebuah relasi yang memiliki aturan khusus.

Fungsi atau **pemetaan** dari himpunan A ke himpunan B adalah relasi yang memasangkan setiap anggota himpunan A dengan hanya satu anggota himpunan B

Maka berlaku syarat berikut:

(1) Setiap anggota himpunan A mempunyai pasangan

(2) Setiap anggota himpunan A hanya dipasangkan dengan satu anggota himpunan B

Contoh 24: $A = \{a, b, c\}$ adalah domain dari f

$B = \{1, 2, 3\}$ adalah kodomain dari f

Range-nya adalah $\{1, 3\}$

Maka pasangan berurutan pada fungsi f adalah

$$\{(a, 1), (b, 1), (c, 3)\}$$

Misalkan: $f(a) = b$,

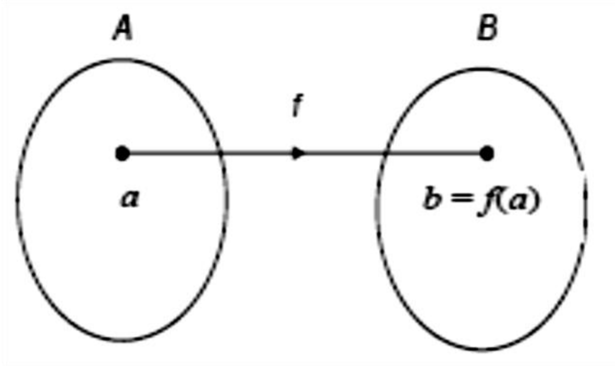
Maka:

b disebut bayangan (*image*) dari a

a disebut pra-bayangan (*pre-image*) dari b

Himpunan semua nilai pemetaan f disebut jelajah (*range*) dari f.

Perhatikan gambar jelajah dari f yaitu himpunan bagian (memungkinkan *proper subset*) dari B berikut.



Gambar 5.5 Fungsi atau Pemetaan

Contoh 25: Misalkan $f: R\ (Riil) \to R$, didefinisikan: $f(x) = x^2$

Maka:

Daerah asal dan daerah hasil dari f adalah himpunan bilangan Riil

Jelajah (*range*) dari f merupakan himpunan bilangan Riil tidak-negatif

Cara penyajian suatu fungsi:

(1) Himpunan pasangan terurut

Misalkan:

fungsi kuadrat pada himpunan $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

Maka:

Dapat dituliskan dalam bentuk fungsi: $f = \{(2,4), (3,9)\}$

(2) Formula pengisian nilai (*assignment*)

Misalkan: $f(x) = x^2 + 10$ dan $f(x) = 5x$

(3) Kata-kata

Misalkan:

"f adalah fungsi yang memetakan jumlah bilangan bulat menjadi kuadratnya".

Contoh 26: Jika $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $B = \{u, v, w\}$

Tentukan relasi f dari A ke B

Jawab: Relasi dari A ke B adalah

$$f = \{(1, u), (2, v), (3, w)\}$$

merupakan bukan fungsi

Karena: elemen A tidak dipetakan semuanya ke B

2. Sifat-sifat Fungsi Pada Himpunan

a) Fungsi Injektif (satu-satu)

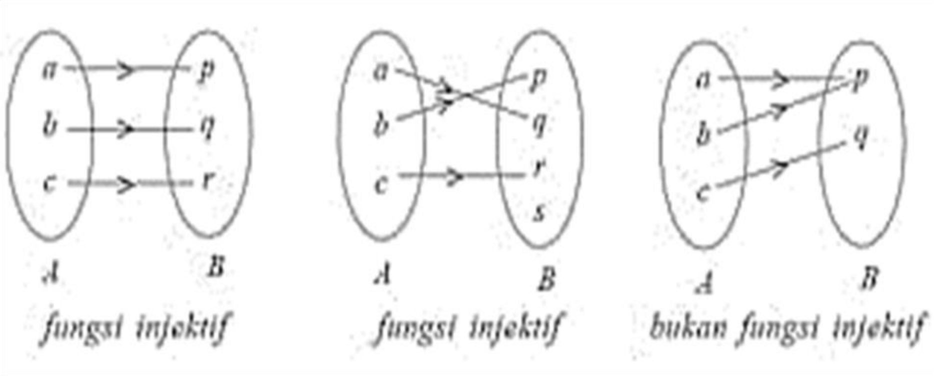
$f: A \to B, \forall b \in B$: Fungsi yang hanya mempunyai **satu kawan** saja di A

Jika dan hanya jika anggota **kodomain** hanya dipasangkan satu kali dengan anggota **domain**. Artinya anggota himpunan daerah kodomain boleh tidak memiliki pasangan, tetapi semua anggota kodomain yang terpasangkan hanya ada satu, tidak boleh ada yang lebih dari satu.

$f: x \to y$: Jika $x = y$,
Maka: berakibat $f(x) = f(y)$.

Jika $x \neq y$,
Maka: berakibat $f(x) \neq f(y)$ atau ekuivalen

Perhatikan contoh gambar fungsi injektif berikut.



Gambar 5.6 Fungsi Injektif

Contoh 27: Diketahui: Domain $= \{1, 2, 3, 4\}$ dan

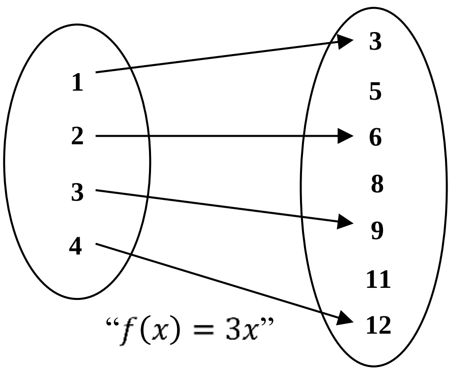
Kodomain $= \{3, 5, 6, 8, 9, 11, 12\}$

Jika suatu fungsi injektif adalah $f(x) = 3x$.

Tentukan range fungsi tersebut

Jawab: Menggunakan tabel

Fungsi $f(x) = 3x$	
Domain	**Range**
1	3
2	6
3	9
4	12



b) Fungsi Surjektif (onto)

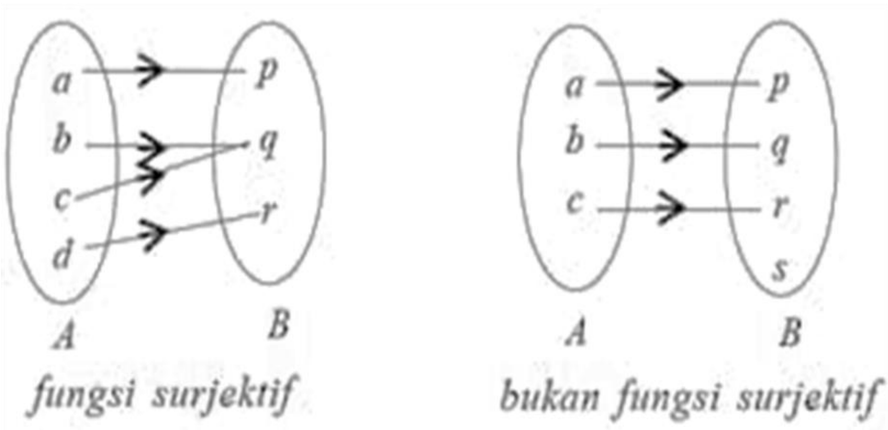
$f: A \rightarrow B, \forall b \in B$: Fungsi yang mempunyai **kawan** di A

Jika anggota **kodomain** boleh memiliki pasangan lebih dari satu, tetapi tidak boleh ada anggota **kodomain** yang tidak dipasangkan.

Fungsi surjektif terpenuhi:
Jika jumlah anggota **kodomain** sama atau lebih banyak dari anggota **domain**

$f: x \rightarrow y$: Jika $f(x) = y$, artinya setiap anggota di y merupakan pemetaan sekurang-kurangnya satu anggota di x.

Perhatikan contoh gambar fungsi surjektif berikut



Gambar 5.7 Fungsi Surjektif

Contoh 28: Diketahui:

Domain = {Pulau Merah, Alas Purwo, Watu Ulo, Jatim Park}

Kodomain = {Banyuwangi, Jember, Malang }

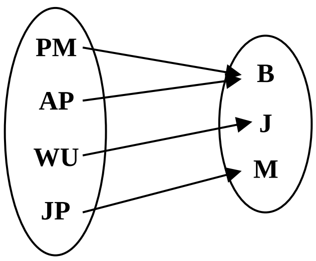
Jika suatu fungsi surjektif adalah

$$f: wisata \rightarrow daerah$$

Tentukan range fungsi tersebut

Jawab: Menggunakan tabel

Domain	Range
Pulau Merah (PM)	Banyuwangi (B)
Alas Purwo (AP)	Banyuwangi (B)
Watu Ulo (WU)	Jember (J)
Jatim Park (JP)	Malang (M)



c) Fungsi Bijektif

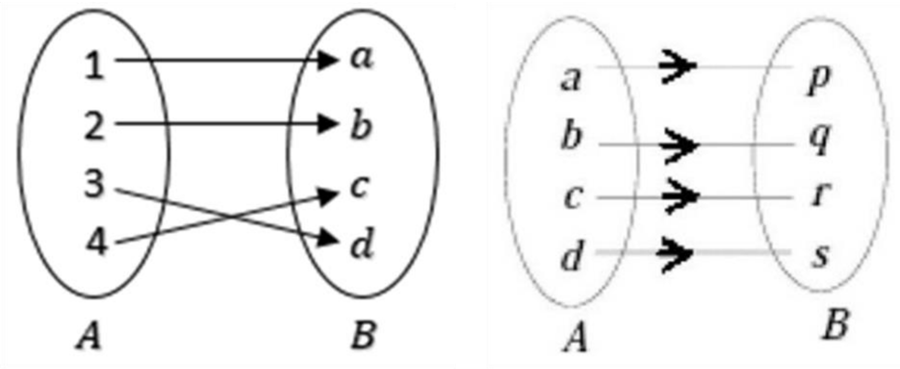
$f : A \rightarrow B$: Jika fungsi f merupakan fungsi surjektif dan injektif, maka anggota **kodomain** sama dengan **range**

Semua anggota **domain** dan **kodomain** terpasangkan **tepat satu**.

Setiap anggota daerah **kodomain** hanya memiliki satu pasangan dengan daerah **domain**.

Kebalikan fungsi bijektif juga merupakan fungsi/pemetaan.

Perhatikan contoh gambar fungsi bijektif berikut.



Gambar 5.8 Fungsi Bijektif

3. Jenis-jenis Fungsi pada Himpunan

a) Fungsi Konstan (fungsi tetap)

$f: A \rightarrow B$: Jika untuk setiap anggota **domain** fungsi selalu berlaku:

$$f(x) = C, \text{ dimana } C \text{ bilangan konstan.}$$

Contoh 29: Diketahui:

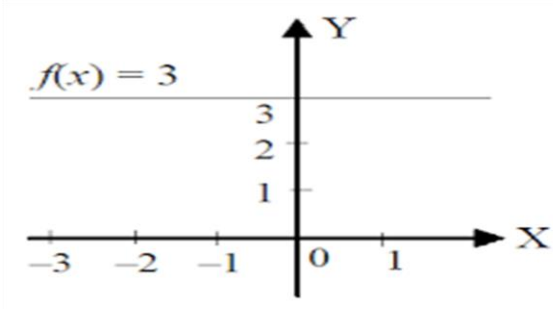
$$f: R \rightarrow R$$

Jika $f(x) = 3$, dengan daerah domain: $\{x|-3 \leq x < 2\}$.

Tentukan gambar grafiknya

Jawab: Menggunakan tabel

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$
-3	3
-2	3
-1	3
0	3
1	3



Gambar 5.9 Fungsi Konstan

b) Fungsi Linier

$f(x)$: Jika fungsi $f(x)$ ditentukan oleh: $f(x) = ax + b$.

dimana $a \neq 0$, a dan b bilangan konstan

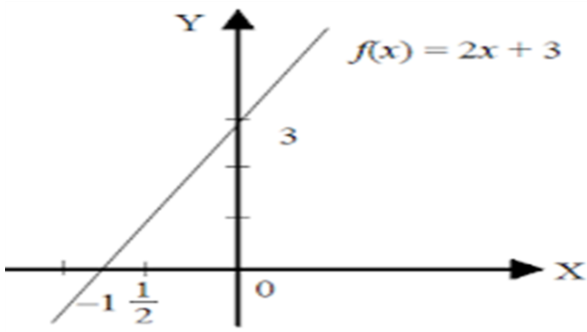
Grafik fungsi tersebut berupa garis lurus.

Contoh 30: Diketahui $f(x) = 2x + 3$

Tentukan gambar grafiknya

Jawab: Menggunakan tabel

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$
0	3
$-\frac{3}{2}$	0



Gambar 5.10 Fungsi Linier

c) Fungsi Kuadrat

$f(x)$: Jika fungsi $f(x)$ ditentukan oleh: $f(x) = ax^2 + bx + c$.

dimana $a \neq 0, a, b, c$ bilangan konstan

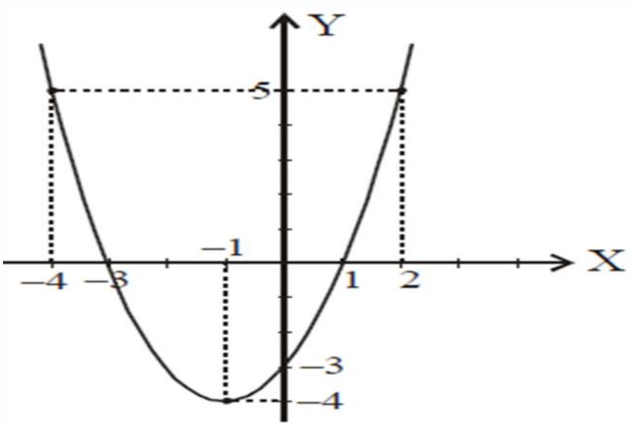
Grafik fungsi tersebut berupa parabola.

Contoh 31: Diketahui $f(x) = x^2 + 2x - 3$

Tentukan gambar grafiknya

Jawab: Menggunakan tabel

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$
-4	5
-3	0
-1	-4
0	-3
1	0
2	5



Gambar 5.11 Fungsi Kuadrat

d) Fungsi Identitas

$f(x)$: Jika setiap anggota domain fungsi berlaku $f(x) = x$, atau

Setiap anggota **domain** fungsi dipetakan pada dirinya sendiri.

Grafik fungsi tersebut berupa garis lurus yang melalui titik asal dan semua titik absis maupun ordinatnya sama.

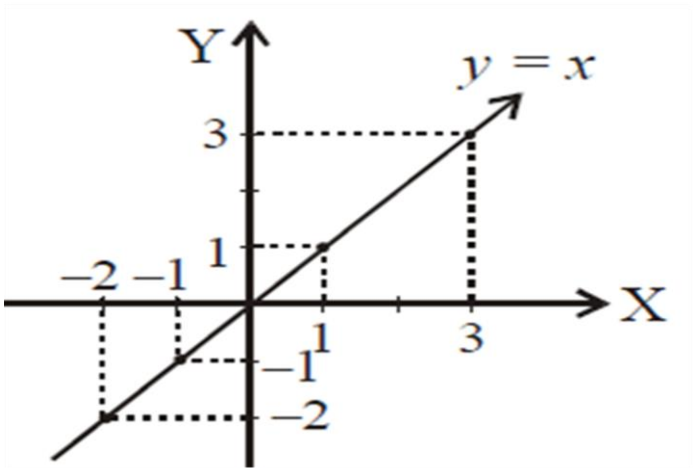
Contoh 32: Suatu fungsi pada R didefinisikan sebagai

$$f(x) = x, \text{ untuk setiap } x$$

Tentukan $f(-2), f(0), f(1), f(3)$ dan gambar grafiknya

Jawab: Menggunakan tabel

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x) = x}$
-2	-2
0	0
1	1
3	3



Gambar 5.12 Fungsi Identitas

e) Fungsi Tangga

Suatu fungsi $f(x)$ disebut fungsi tangga, jika grafik fungsi $f(x)$ berupa interval-interval yang sejajar

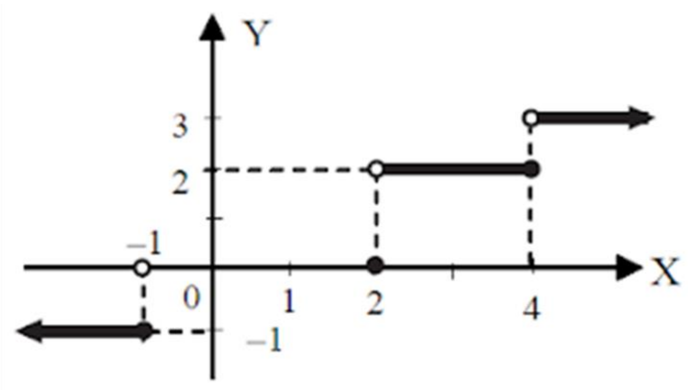
Contoh 33:

$$\text{Diketahui } f(x) = \begin{cases} -1 & \text{jika} \quad x < -1 \\ 0 & \text{jika} \quad -1 < x < 2 \\ 2 & \text{jika} \quad 2 < x < 4 \\ 3 & \text{jika} \quad x > 4 \end{cases}$$

Tentukan interval dari $f(-2), f(0), f(3), f(5)$ dan

Tentukan gambar grafiknya

Jawab: Jadi, Interval $f(-2) = -1, f(0) = 0, f(3) = 2, f(5) = 3$



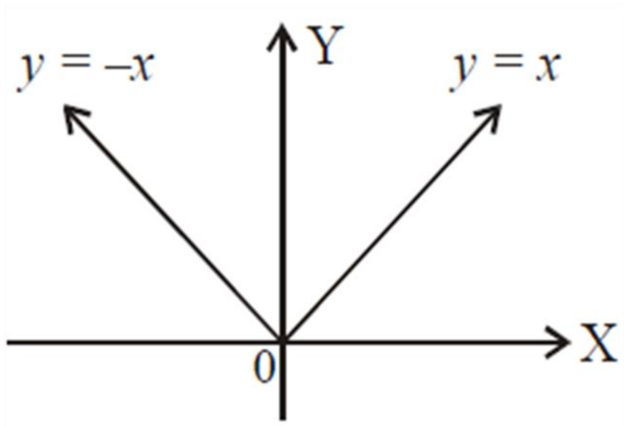
Gambar 5.13 Fungsi Tangga

f) Fungsi Modulus

Suatu fungsi $f(x)$ disebut fungsi modulus (mutlak), jika fungsi tersebut dapat memetakan setiap bilangan real pada **domain** fungsi ke unsur nilai mutlaknya

Misalkan: Diketahui $f: x \to |x|$ atau $f: x \to |ax + b|$

$$\text{Dimana } f(x) = |x|, \text{ artinya } |x| = \begin{cases} x & \text{jika} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{jika} \quad x < 0 \end{cases}$$



Gambar 5.14 Fungsi Modulus

g) Fungsi Ganjil dan Genap

Fungsi Ganjil: Jika berlaku $f(-x) = -f(x)$.

Fungsi Genap: Jika berlaku $f(-x) = f(x)$.

Jika $f(-x) \neq -f(x)$, maka fungsi ini tidak genap dan tidak ganjil.

Contoh 34: Diketahui:

$f(x) = 2x^3 + x$; $f(x) = 3\cos x - 5$; $f(x) = x^2 - 8x$

Tentukan apakah fungsi $f(x)$ merupakan fungsi genap, fungsi ganjil, atau tidak keduanya

Jawab:

- $f(x) = 2x^3 + x$

  $f(-x) = 2(-x)^3 + (-x) = -(2x^3 + x)$

  $f(-x) = -f(x)$, Jadi, $f(x)$ fungsi ganjil

- $f(x) = 3\cos x - 5$

  $f(-x) = 3\cos(-x) - 5 = 3\cos x - 5$

  $f(-x) = f(x)$, Jadi, $f(x)$ fungsi genap

- $f(x) = x^2 - 8x$

  $f(-x) = (-x)^2 - 8(-x) = x^2 + 8x$

  $f(-x) \neq -f(x)$ atau $f(-x) \neq f(x)$

  Jadi, $f(x)$ bukan fungsi ganjil maupun genap

5.2.3. Fungsi Komposisi

Definisi Fungsi Komposisi

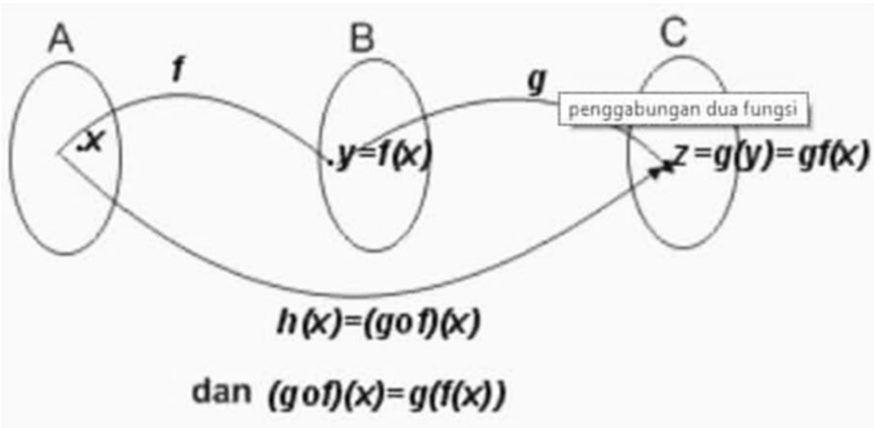
Fungsi komposisi merupakan penggabungan sebuah operasi dua jenis fungsi $f(x)$ dan $g(x)$, sehingga mampu menghasilkan sebuah fungsi baru.

Operasi fungsi komposisi dilambangkan dengan "o" (komposisi / bundaran). Fungsi baru inilah yang dapat terbentuk dari $f(x)$ dan $g(x)$ yaitu:

a) $(f \ o \ g)(x)$ artinya fungsi $g\ (x)$ dikomposisikan sebagai $f\ (x)$ atau g dimasukkan ke f
dibaca sebagai fungsi f bundaran g

b) $(g \ o \ f)(x)$ Artinya fungsi $f\ (x)$ dikomposisikan sebagai $g\ (x)$ atau f dimasukkan ke g
dibaca sebagai fungsi g bundaran f

Agar dapat memahami fungsi komposisi, perhatikan gambar dibawah ini



Gambar 5.15 Komposisi Dua Fungsi

Berdasarkan gambar 5.15 diatas
Maka diperoleh:

$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}$ ditentukan dengan rumus $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$

$\boldsymbol{g}: \boldsymbol{B} \rightarrow \boldsymbol{C}$ ditentukan dengan rumus $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$

Sehingga diperoleh hasil fungsi f dan g berikut:

$(f \ o \ g)(x) = f(g(x))$ $\qquad$ $(g \ o \ f)(x) = g(f(x))$

$$(\boldsymbol{f} \ \boldsymbol{o} \ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) \neq (\boldsymbol{g} \ \boldsymbol{o} \ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x})$$

Sifat – Sifat Fungsi Komposisi

Jika $f: A \rightarrow B$; $\quad g: B \rightarrow C$; $\quad h: C \rightarrow D$

Maka berlaku:

(1) Tidak bersifat Komutatif $(f\ o\ g)\ (x) \neq (g\ o\ f)\ (x)$

(2) Bersifat Asosiatif $\big((f\ o\ g\ )\ o\ h\ \big)(x) = (f\ o\ (g\ o\ h\ ))\ (x)$

(3) Bersifat Identitas $(f\ o\ I\ )(x) = (I\ o\ f)(x) = f\ (x)$ atau $I\ (x) = x$

Contoh 35: Jika $f(x) = 2x + 3$

dan $(f\ o\ g)(x) = 2x^2 + 6x - 7$

Tentukan fungsi $g(x)$

Jawab: Karena $(f\ o\ g)(x) = f\big(g(x)\big) = 2x^2 + 6x - 7$

Maka:

$2\big(g(x)\big) + 3 = 2x^2 + 6x - 7$

$2\big(g(x)\big) = 2x^2 + 6x - 10$

$g(x) = x^2 + 3x - 5$

Contoh 36: Jika $f(x) = \frac{x}{x-1}\ , x \neq 1$

dan $g(x) = f(x^2 + 1)$

Tentukan nilai $g(f(x))$

Jawab: $g(x) = f(x^2 + 1)$

$g(x) = \frac{x^2+1}{x^2+1-1} = \frac{x^2+1}{x^2} = 1 + \frac{1}{x^2}$

Maka:

$g\big(f(x)\big) = 1 + \frac{1}{(f(x))^2}$

$$g\big(f(x)\big) = 1 + \frac{1}{(\frac{x}{x-1})^2} = 1 + \left(\frac{x-1}{x}\right)^2 = 1 + \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2}$$

$g\big(f(x)\big) = 2 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$

5.2.4. Fungsi Invers

Fungsi invers merupakan sebuah fungsi berkebalikan dari fungsi asalnya.

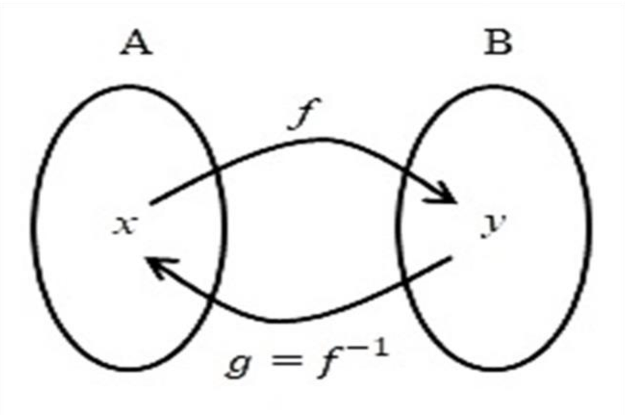
Jika fungsi $f: A \to B$ memiliki relasi dengan fungsi $g: B \to A$

Maka fungsi g merupakan invers dari f.

Dituliskan f^{-1} atau $g = f^{-1}$

Jika f^{-1} dalam bentuk fungsi, maka f^{-1} disebut fungsi invers.

Perhatikan gambar fungsi invers berikut



Gambar 5.16 Fungsi Invers

Untuk menentukan invers suatu fungsi $y = f(x)$, maka dapat dilakukan dengan mengubah persamaan $y = f(x)$ ke bentuk $x = f(y)$.

(1) Gantilah x dengan $f^{-1}(y)$, sehingga $f(y) = f^{-1}(y)$

(2) Gantilah y dengan x, sehingga diperoleh f^{-1}.

Misalnya: f sebuah fungsi dari himpunan A ke B

g sebuah fungsi dari himpunan B ke A

Sehingga:

$g\big(f(a)\big) = a$ dan $f\,\big(f(b)\big) = b$, untuk $\forall a \in A, b \in B$.

Maka:

g adalah invers fungsi dari f ditulis f^{-1}.

"fungsi $\boldsymbol{f(x)}$ memiliki invers, jika $\boldsymbol{f(x)}$ fungsi bijektif"

dan

"sebuah fungsi jika dikomposisikan dengan inversnya, maka menghasilkan fungsi identitas"

Identitas adalah suatu bilangan yang jika dioperasikan dengan suatu bilangan, maka akan menghasilkan suatu bilangan tersebut. Operasi perkalian identitas mengahasil 1 dan penjumlahan menghasilkan 0.

Contoh 37: Diketahui $f: A \rightarrow B$ merupakan pasangan berurutan yaitu

$$f = \{(1,3),(2,4),(5,7)\}$$

Tentukan $\boldsymbol{f^{-1}}$.

Jawab: Karena: jika $f: A \rightarrow B$

Maka: $f^{-1}: B \rightarrow A$ (definisi)

Sehingga: $f^{-1} = \{(3,1),(4,2),(7,5)\}$

Contoh 38: Tentukan invers dari $x^2 - 2x + 4$

Jawab: Diketahui bahwa $y = x^2 - 2x + 4$

Maka: $y = (x-1)^2 + 3$

Sehingga: $(x-1)^2 = y - 3$

$$(x-1) = \pm\sqrt{y-3}$$

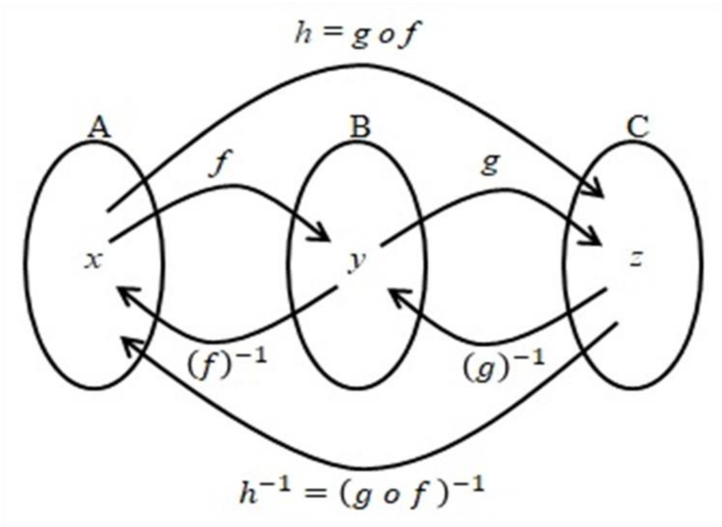
$$x = 1 \pm \sqrt{y-3}$$

Dengan demikian inversnya adalah: $f^{-1}(x) = 1 \pm \sqrt{y-3}$ dan bukan merupakan fungsi karena memiliki dua nilai

Tabel 5. Rumus Fungsi Invers

Jenis Fungsi	Bentuk Fungsi	Fungsi Invers
Fungsi Linier	$f(x) = ax + b$	$f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$
Fungsi Pecahan Linier	$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$	$f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$
Fungsi Irasional	$f(x) = \sqrt[n]{ax+b}$	$f^{-1}(x) = \frac{x^n-b}{a}$
Fungsi Eksponen	$f(x) = a^n$	$f^{-1}(x) = {}^{a}\log x$
Fungsi Logaritma	$f(x) = {}^{a}\log x$	$f^{-1}(x) = a^n$

Perhatikan gambar invers dari fungsi komposisi berikut



Gambar 5.17 Komposisi Dua Fungsi dan Invers Fungsinya

Berdasarkan gambar invers fungsi komposisi, maka terdapat dua relasi suatu fungsi dari himpunan $A \to B \to C$.

Dimana: $f: A \to B$ dan $g: B \to C$.

Sehingga fungsi komposisinya adalah: $h = g\ o\ f$.

Maka invers fungsi komposisinya adalah: $h^{-1} = (g\ o\ f)^{-1}$.

Contoh 39: Jika $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = 3x - 5$, dan $h(x) = x = 1$

Maka:

$f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$, $g^{-1}(x) = \frac{x+5}{3}$, $h^{-1}(x) = x - 1$

Jawab:

(1) $(g\ o\ f)^{-1}(x) = (f^{-1}\ o\ g^{-1})(x) = f^{-1}(g^{-1}(x))$

$$(g\ o\ f)^{-1}(x) = \frac{\left(g^{-1}(x)\right)-3}{2} = \frac{\frac{x+5}{3}-3}{2}$$

$$(g\ o\ f)^{-1}(x) = \frac{\frac{x-4}{3}}{2} = \frac{2x-8}{3}$$

(2) $(f\ o\ g)^{-1}(x) = (g^{-1}\ o\ f^{-1})(x) = g^{-1}(f^{-1}(x))$

$$(f\ o\ g)^{-1}(x) = \frac{\frac{x-3}{2}+5}{3} = \frac{\frac{x+7}{2}}{3} = \frac{3x+21}{2}$$

(3) $(h\ o\ g\ o\ f)^{-1}(x) = (f^{-1}\ o\ g^{-1}\ o\ h^{-1})(x)$

$$(h\ o\ g\ o\ f)^{-1}(x) = f^{-1}(g^{-1}(h^{-1}(x)))$$

$$(h\ o\ g\ o\ f)^{-1}(x) = f^{-1}\left(\frac{x+4}{3}\right) = \left(\frac{\left(\frac{x+4}{3}\right)-3}{2}\right)$$

$$(h\ o\ g\ o\ f)^{-1}(x) = \left(\frac{\left(\frac{x-5}{3}\right)}{2}\right) = \frac{2x-10}{3}$$

(4) $(f\ o\ g\ o\ h)^{-1}(x) = (h^{-1}\ o\ g^{-1}\ o\ f^{-1})(x)$

$$(f\ o\ g\ o\ h)^{-1}(x) = h^{-1}(g^{-1}(f^{-1}(x)))$$

$$(f\ o\ g\ o\ h)^{-1}(x) = h^{-1}\left(\frac{3x+21}{2}\right) = \left(\frac{3x+21}{2}\right) - 1$$

$$(f\ o\ g\ o\ h)^{-1}(x) = \frac{3x+19}{2}$$

Sehingga rumusan invers operasi komposisi adalah:

(1) Jika diketahui: $g(x)$ dan $(f\ o\ g)(x)$ atau $(g\ o\ f)(x)$

Maka: $(f\ o\ g\ o\ g^{-1})(x) = (g^{-1}o\ g\ o\ f)(x) = f(x)$

(2) Jika diketahui: $f(x)$ dan $(f\ o\ g)(x)$ atau $(g\ o\ f)(x)$

Maka: $(f^{-1}o\ f\ o\ g)(x) = (g\ o\ f\ o\ f^{-1})(x) = g(x)$

(3) Jika diketahui: $f(x), g(x)$ dan $(f\ o\ g\ o\ h)(x)$

Maka: $(f\ o\ g)^{-1}((f\ o\ g\ o\ h)(x))$

(4) Jika diketahui: $f(x), h(x)$ dan $(f\ o\ g\ o\ h)(x)$

Maka: $f^{-1}((f\ o\ g\ o\ h)(h^{-1}(x)))$

5.3. Rangkuman

Relasi antara himpunan A dan himpunan B merupakan himpunan yang berisi pasangan terurut yang mengikuti aturan tertentu (relasi biner). Sifat relasi adalah refleksif, simetrik, anti simetrik, transitif, irefleksif (kesetaraan). Jenis relasi meliputi refleksif, simetrik, anti simetrik, transitif, dan relasi invers. Sebuah relasi ekivalen, jika relasi tersebut refleksif, simetri dan transitif. Sedangkan sebuah relasi terurut parsial, jika bersifat refleksif, antisimetri dan transitif. Himpunan terurut parsial tersebut dinotasikan (S, R).

Fungsi merupakan sebuah relasi yang memiliki aturan khusus, artinya memasangkan setiap anggota himpunan satu dengan hanya satu anggota ke himpunan lain. Penyajian fungsi dapat melalui himpunan pasangan terurut, formula pengisian nilai, maupun dengan kata-kata. Sifat-sifat dari fungsi meliputi: injektif, surjektif, bijektif. Suatu fungsi dari himpunan A ke B dapat dinotasikan $f: A \to B$. Dimana A sebagai daerah domain, B sebagai daerah kodomain

Fungsi komposisi merupakan penggabungan sebuah operasi dua jenis fungsi $f(x)$ dan $g(x)$, sehingga menghasilkan sebuah fungsi baru. Fungsi invers merupakan sebuah fungsi berkebalikan dari fungsi asalnya. Untuk menentukan invers suatu fungsi $y = f(x)$, dapat dilakukan dengan mengubah persamaan $y = f(x)$ ke bentuk $x = f(y)$. Fungsi $f(x)$ memiliki invers, jika $f(x)$ fungsi bijektif.

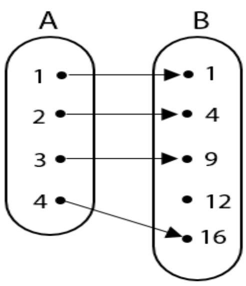
5.4. Referensi

1. Kunen, K. 2011. *Set Theory*. UK: King College London
2. Pinter, C. C. 2014. *Set Theory*. South Korea: Kyung Moon Publishers
3. Weiss, W. A. R. 2008. *An Introduction to Set Theory*. USA: Toronto University
4. Smith, J. T. 2008. *Basic Set Theory*. San Francisco State University

5.5. Latihan

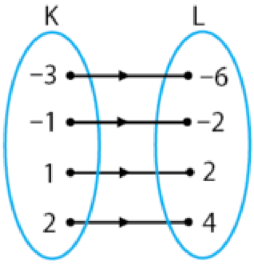
Soal Formatif 4:

1. Daerah hasil dari relasi pada gambar d adalah ...



   A. $\{1, 2, 3, 4\}$
   B. $\{1, 4, 9, 16\}$
   C. $\{1, 4, 9, 12, 16\}$
   D. $\{1, 2, 3, 4, 9, 12, 16\}$

2. Relasi yang tepat dari himpunan K ke L ada



A. “Dua kali dari”

B. “Setengah dari”

C. “Satu kurangnya dari”

D. “Kurang dari”

3. Jika $K = \{3, 4, 5\}$ dan $L = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, himpunan pasangan berurutan relasi “dua lebihnya dari” himpunan K ke L adalah ...

A. $\{(3, 5), (4, 6)\}$

B. $\{(3, 5), (4, 6), (5, 7)\}$

C. $\{(3, 1), (4, 2), (5, 3)\}$

D. $\{(3, 2), (4, 2), (5, 2)\}$

4. Range pasangan berurutan $\{(2, 1), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (6, 4)\}$ adalah

A. $\{1, 2, 4, 5\}$

B. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

C. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

D. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

5. Dari himpunan pasangan berurutan berikut ini:

I. $\{(1, 2), (2, 2), (3, 3)\}$ III. $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$

II. $\{(1, 2), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$ IV. $\{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (2, 4)\}$

Yang merupakan pemetaan adalah ...

A. IV C. II

B. III D. I

6. Diketahui:

$A = \{faktor\ dari\ 10\}$ dan $B = \{faktor\ prima\ dari\ 30\}$.

Banyak semua pemetaan yang mungkin dari himpunan A ke B adalah

A. 81 C. 16

B. 64 D. 8

7. $K = \{faktor\ dari\ 8\}$ dan $L = \{bilangan\ prima\ yang\ kurang\ dari\ 7\}$. Banyak semua pemetaan yang mungkin dari himpunan K ke L adalah

A. 100 C. 64

B. 81 D. 16

8. Diketahui: himpunan $A = \{Jakarta, Bangkok, Tokyo, Manila\}$ dan $B = \{Indonesia, Jepang, Thailand, Filipina, Malaysia\}$. Relasi dari A ke B dapat dinyatakan dengan ...

   A. Ibukota dari
   B. Negara dari
   C. Asal dari
   D. Kampung dari

9. Diketahui $P = \{2, 4, 6\}$ dan $Q = \{2, 3\}$. Himpunan pasangan berurutan dari P ke Q yang menyatakan "kelipatan dari" adalah ...

   A. $\{(2, 2), (4, 2), (4, 4), (6, 2), (6, 3)\}$
   B. $\{(2, 2), (2, 3), (4, 2), (6, 2), (6, 3)\}$
   C. $\{(2, 3), (4, 2), (4, 3), (6, 2), (6, 3)\}$
   D. $\{(2, 2), (4, 2), (4, 3), (6, 2), (6, 3)\}$

10. Jika $A = \{1, 3, 5\}$ dan $B = \{2, 4\}$, maka $A\ x\ B$ adalah ...

    A. $\{(1, 2), (1, 4), (3, 2), (3, 4), (5, 2), (5, 4)\}$
    B. $\{(1, 2), (1, 4), (3, 4), (5, 2), (5, 4)\}$
    C. $\{(1, 2), (1, 4), (3, 2), (3, 4)\}$
    D. $\{(1, 2), (1, 4), (3, 2), (3, 4), (5, 4)\}$

Soal Uraian 4:

1. Diketahui $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan $B = \{2, 4, 6, 8, 12\}$. Tentukan:
   a) Relasi "setengah dari" himpunan A ke B
   b) Relasi "kuadrat dari" himpunan B ke A
   c) Relasi "lebih dari" himpunan A ke B
2. Tentukan sifat relasi apabila A himpunan bilangan bulat positif dan relasinya adalah "x habis membagi y".
3. Relasi antara dua himpunan M dan N dinyatakan dengan himpunan pasangan berurutan $\{(1,4), (2,5), (3,6), (4,7), (5,8)\}$. Relasi apakah yang menyatakan hubungan antara himpunan M dengan N?
4. Relasi antara dua himpunan K dan L dinyatakan dengan himpunan pasangan berurutan $\{(2,8), (3,12), (4,16), (5,20), (6,24)\}$. Relasi apakah yang menyatakan hubungan antara himpunan K dengan L ?
5. Jika $W = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tentukan pasangan terurut berdasarkan sifat berikut.
   a) Refleksif
   b) Simetrik
   c) Antisimetrik
   d) Transitif

Soal Formatif 5:

1. Himpunan pasangan berurutan berikut merupakan fungsi adalah ....
   A. $\{(2,a),(3,b),(4,a),(5,c)\}$
   B. $\{(a,2),(a,3),(a,4),(a,5)\}$
   C. $\{(x,2),(x,3),(y,4),(y,5)\}$
   D. $\{(2,a),(3,b),(4,c),(4,d)\}$
2. Himpunan pasangan berurutan berikut merupakan bukan fungsi adalah ....
   A. $\{(a,1),(b,2),(c,1),(d,2)\}$
   B. $\{(p,1),(q,2),(r,3),(r,4)\}$
   C. $\{(5,8),(6,8),(7,9),(8,9)\}$
   D. $\{(1,2),(3,2),(5,2),(7,2)\}$
3. Suatu fungsi $f(x) = 5 - 3x$, nilai dari $f(-2)$ adalah ...
   A. -1 C. 7
   B. 2 D. 11
4. Diketahui $f: x \to -5x + 2$. Nilai untuk $x = 4$ adalah ...
   A. 20 C. -18
   B. 18 D. -22
5. Jika $f(x) = 3x + 2$ dan $f(a) = -10$, nilai a adalah ...
   A. 3 C. -3
   B. 1 D. -4
6. Jika $f(x) = ax + b$, $f(3) = 5$ dan $f(7) = 13$, maka $f(10) = ...$
   A. 19 C. 15
   B. 17 D. 11
7. Jika $A = \{\text{faktor dari } 2\}$ dan $B = \{\text{huruf vokal}\}$, banyaknya pemetaan dari A ke B adalah ...
   A. 50 C. 25
   B. 32 D. 10
8. Diketahui $A = \{1,2,3,4\}$ dan $B = \{a,b,c,d\}$. Banyaknya korespondensi satu-satu yang mungkin dari A ke B adalah ...
   A. 4 C. 16
   B. 8 D. 24
9. Suatu fungsi $g(x) = px + 5$. Jika $g(3) = -1$, maka nilai p adalah ...
   A. 3 C. -2
   B. 2 D. -3

10. Ditentukan fungsi $f(x) = x + 2$, daerah asal $\{x \mid -2 \leq x < 3, x \in Z\}$. Daerah hasil fungsi tersebut adalah ...

A. $\{0, 1, 2, 3, 4\}$

B. $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

C. $\{4, 3, 2, 1, 0, -1\}$

D. $\{5, 4, 3, 2, 1\}$

Soal Uraian 5:

1. Tentukanlah domain dan range fungsi $f(x) = x^2 + 3$, jika $x \in B$ dan $B = \{x \mid -3 < x \leq 2\}$.
2. Diketahui: $A = \{2, 3, 4\}$; $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; jika ditentukan fungsi $f: A \to B$ maka $f(x) = 2x - 2$. Tentukanlah range fungsi f.
3. Diketahui $f(x) = ax + b$. Jika $f(-4) = -3$ dan $f(2) = 9$. Tentukan:
   a) Nilai a dan b,
   b) Rumus fungsinya
   c) Nilai fungsi untuk $x = 3, 5, 6$.
4. Diketahui $f(x) = ax + b$. Jika $f(2) = 1$ dan $f(-1) = -5$. Tentukan:
   a) Nilai a dan b,
   b) Rumus fungsinya
   c) Nilai fungsi untuk $x = 3, 4, 5$
5. Biaya untuk pemeliharaan ikan lele sampai masa panen dinyatakan dengan fungsi $f(x) = 1.000x + 150.000$, dengan x adalah banyaknya ikan lele yang dipelihara. Rata-rata hasil panennya, setiap 1 kg terdiri dari 4 ikan lele dan dijual dengan harga Rp. 6.000,00. Perolehan laba setiap kali panen jika dipelihara 5.000 ekor adalah …
6. Proses pembuatan kertas berbahan pelepah pohon pisang dilakukan melalui dua tahap.

   Tahap I: $f(x) = 0{,}8x - 1$ dan tahap II: $g(x) = 0{,}6x - 2$ dengan x menyatakan banyak pelepah pisang dalam satuan ton. Jika tersedia 100 ton pelepah pisang, banyak kertas yang dihasilkan adalah …

Soal Formatif 6:

1. Diketahui fungsi $f(x) = 2x + 3$ dan $g(x) = x^2 - 2x + 4$. Komposisi fungsi $(g\ o\ f)(x)$ adalah ...

   A. $2x^2 - 4x + 5$ **C.** $4x^2 + 8x + 7$

   B. $2x^2 - 4x - 11$ D. $4x^2 - 4x + 19$

2. Diketahui $f(x) = 2x + 5$ dan $g(x) = \frac{x-1}{x+4}, x \neq -4$, maka nilai $(f\ o\ g)(x)$ adalah ...

   A. $\frac{7x-2}{x+4}, x \neq -4$ C. $\frac{2x+2}{x+4}, x \neq -4$

   B. $\frac{2x+3}{x+4}, x \neq -4$ D. $\frac{7x+18}{x+4}, x \neq -4$

3. Diketahui fungsi $f(x) = 3x - 1$ dan $g(x) = 2x^2 + 3$. Nilai dari komposisi fungsi $(g\ o\ f)(1)$ adalah ...

   A. 7 C. 11

   B. 9 D. 14

4. Jika $g(x) = x + 1$ dan $(f\ o\ g)(x) = x^2 + 3x + 1$. Maka $f(x) = \cdots$

   A. $x^2 + 5x + 5$ **C.** $x^2 + 4x + 3$

   B. $x^2 + x - 1$ D. $x^2 + 6x + 1$

5. Diketahui $f(x) = x^2 + 4x$ dan $g(x) = -2 + \sqrt{x + 4}$, dengan $x \geq -4$ dan $x \in R$. Fungsi komposisi $(g\ o\ f)(x)$ adalah ...

   A. $2x - 4$ C. $x + 2$

   B. $x - 2$ D. x

6. Diketahui $f: R \rightarrow R$ dan $g: R \rightarrow R$, didefinisikan $f(x) = x^3 + 4x$ dan $g(x) = 2 \sin x$. Nilai $(f\ o\ g)(-\frac{1}{2}\pi)$ adalah ...

   A. -4 C. 3

   B. 2 D. 6

7. Diketahui $f: R \rightarrow R$ dan $g: R \rightarrow R$, didefinisikan dengan:
   $(g\ o\ f)(x) = 2x^2 + 4x + 5$ dan $g(x) = 2x + 3$. Maka $f(x)$ adalah

   A. $x^2 + 2x + 1$ C. $2x^2 + x + 2$

   B. $x^2 + 2x + 2$ D. $2x^2 + 4x + 2$

8. Diketahui $f: x \rightarrow x + 2$ dan $h: x \rightarrow x^2 - 2$,
   Jika $(f\ o\ g\ o\ h)(x) = 2x^2 + 4$ maka $g(x)$ adalah ...

   A. $2x + 3$ C. $2x + 9$

   B. $2x + 6$ D. $x + 5$

9. Diketahui $f(x) = \frac{7x+5}{3x-4}$, $x \neq \frac{4}{3}$. Maka $f^{-1}(x)$ adalah ...

A. $\frac{4x+5}{3x-7}, x \neq \frac{7}{3}$
C. $\frac{5x+7}{4x-3}, x \neq \frac{3}{4}$
B. $\frac{7x+5}{3x+4}, x \neq -\frac{4}{3}$
D. $\frac{7x+4}{3x-5}, x \neq \frac{5}{3}$

10. Diketahui $f(x) = \frac{1}{x+2}$. jika $f^{-1}(x) = -4$, maka nilai x adalah ...

A. -2
C. $-\frac{1}{2}$
B. 2
D. -3

11. Diketahui $f(x) = x + 4$ dan $g(x) = 2x$, maka $(f\ o\ g)^{-1}(x)$ adalah

A. $2x + 8$
C. $\frac{1}{2}x - 8$
B. $2x + 4$
D. $\frac{1}{2}x - 2$

12. Diketahui $f(x) = \frac{2-3x}{2}$, Maka $f^{-1}(x)$ adalah ...

A. $\frac{2(1+x)}{3}$
C. $\frac{3(1+x)}{2}$
B. $\frac{2(1-x)}{3}$
D. $-\frac{3(1+x)}{2}$

13. Fungsi f ditentukan dengan $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}, x \neq 3$.

Jika f^{-1} adalah invers f. Maka $f^{-1}(x+1)$ adalah ...

A. $\frac{3x-1}{x-2}, x \neq 2$
C. $\frac{3x+4}{x-2}, x \neq 2$
B. $\frac{3x+2}{x+1}, x \neq -1$
D. $\frac{3x+4}{x-1}, x \neq 1$

14. Fungsi f ditentukan dengan $f(x) = \frac{x-1}{2-x}, x \neq 2$.

Jika f^{-1} adalah invers f. Maka $f^{-1}(x+1)$ adalah ...

A. $-\frac{1}{x+1}, x \neq -1$
C. $\frac{x+1}{x+2}, x \neq -2$
B. $\frac{x}{x+1}, x \neq -1$
D. $\frac{x-1}{x-2}, x \neq 2$

15. Diketahui $f(x) = \frac{4x+5}{x+3}, x \neq -3$. Jika f^{-1} adalah invers f. Maka $f^{-1}(x)$ adalah ...

A. $\frac{-3x-5}{x+4}, x \neq -4$
C. $\frac{3x+5}{x-4}, x \neq 4$
B. $\frac{-3x+5}{x-4}, x \neq 4$
D. $\frac{3x-5}{x+4}, x \neq -4$

16. Jika $(f\ o\ g)(x) = 4x^2 + 8x - 3$ dan $g(x) = 2x + 4$.

Maka $f^{-1}(x)$ adalah ...

A. $x + 9$
C. $x^2 - 4x - 3$
B. $2 + \sqrt{x}$
D. $2 + \sqrt{x+7}$

17. Jika $(f\ o\ g)(x) = 2\sqrt{x-1}$ dan $f(x) = \sqrt{x+1}$. Maka $g(x) = \cdots$

A. $2x - 1$ C. $4x - 5$

B. $2x - 3$ D. $4x - 3$

18. Diketahui $f: R \to R$ dan $g: R \to R$, didefinisikan dengan:

$f(x) = 2x + 5$ dan $g(x) = x + 2$. Maka $(f\ o\ g)^{-1}(x)$ adalah ...

A. $\frac{x-9}{9}$ C. $\frac{x+9}{2}$

B. $x - 9$ D. $\frac{x-9}{2}$

19. Diketahui $g: R \to R$, didefinisikan dengan: $f(x) = \frac{1-x}{x}, x \neq 0$, jika $(g\ o\ f)(x) = g(f(x)) = 2x + 1$. Maka fungsi $g^{-1}(x)$ adalah ...

A. $\frac{x-3}{x+1}$ C. $\frac{x+1}{x-3}$

B. $\frac{x-3}{x-1}$ D. $\frac{-x+3}{x-1}$

20. Diketahui $(g\ o\ f)(x) = \frac{x}{x-1}, x \neq 1$ dan $f(x) = 2x + 1$. Maka fungsi $g^{-1}(x)$ adalah ...

A. $\frac{3x-1}{x-1}, x \neq 1$ C. $\frac{x-1}{x+1}, x \neq -1$

B. $\frac{2x+1}{2x}, x \neq 0$ D. $\frac{3x+1}{x-2}, x \neq 2$A

Soal Uraian 6:

1. Diketahui fungsi $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-2x+1}{16-x^2}}$, maka definisi $f(x)$ adalah ...
2. Diketahui $f(x) = 4x^2 + 8x - 3$, $g(x) = x + 2$ dan $h(x) = -3x + 2$. Tentukan:
   a) $(f\ o\ g)(x)$ dan $(f\ o\ g)^{-1}(x)$
   b) $(g\ o\ h)(x)$ dan $(g\ o\ h)^{-1}(x)$
   c) $(f\ o\ g\ o\ h)(x)$ dan $(f\ o\ g\ o\ h)^{-1}(x)$
   d) Nilai fungsi $(f\ o\ g\ o\ h)^{-1}(x)$, jika $x = -3$
3. Diketahui $f(x) = {}^5\log x$ dan $g(x) = \frac{x+3}{3x-4}$. Tentukan:
   a) $(f\ o\ g)(x)$ dan $(f\ o\ g)^{-1}(x)$
   b) $(g\ o\ f)(x)$ dan $(g\ o\ f)^{-1}(x)$
   c) Nilai fungsi $(f\ o\ g)^{-1}(x)$, jika $x = -5$
   d) Nilai fungsi $(g\ o\ f)^{-1}(x)$, jika $x = 4$
4. Diketahui $(f\ o\ g)(x) = 4x^2 + 8x - 3$, jika $g(x) = 2x + 4$ dan $h(x) = x + 2$. Tentukan:
   a) $f^{-1}(x)$; $g^{-1}(x)$; $h^{-1}(x)$
   b) $(f\ o\ g)^{-1}(x)$ dan $(g\ o\ f)^{-1}(x)$
   c) $(f\ o\ g\ o\ h)^{-1}(x)$
   d) Nilai fungsi $(f\ o\ g\ o\ h)^{-1}(x)$, jika $x = \frac{1}{2}$
5. Jika $f(x) = \frac{1}{x-1}$ dan $g(x) = x - 3$. Tentukan:
   a) $(f\ o\ g)^{-1}(x)$ dan nilai fungsi $(f\ o\ g)^{-1}(-\frac{1}{3})$
   b) $(g\ o\ f)^{-1}(x)$ dan nilai fungsi $(g\ o\ f)^{-1}(\frac{1}{2})$
   c) Fungsi $(f\ o\ g\ o\ h)(x)$, jika $h(x) = x + 2$
   d) Nilai fungsi $(f\ o\ g\ o\ h)^{-1}(x)$, jika $x = -3$

5.6. Kunci Jawaban

Kunci Soal Formatif 4

1.	B	6.	D
2.	B	7.	A
3.	B	8.	A
4.	A	9.	A
5.	B	10.	C

Kunci Soal Formatif 5

1.	A	6.	A
2.	B	7.	B
3.	D	8.	A
4.	B	9.	A
5.	D	10.	A

Kunci Soal Formatif 6

1.	C	11.	D
2.	D	12.	A
3.	C	13.	D
4.	B	14.	A
5.	D	15.	B
6.	A	16.	D
7.	A	17.	C
8.	B	18.	D
9.	A	19.	D
10.	C	20.	A

Periksalah jawaban anda dengan kunci jawaban formatif 4, 5, 6. Hitunglah jawaban yang benar untuk mengetahui tingkat penguasaan anda.

Skor	**Keterangan**
90 – 100	Baik sekali
80 – 89	Baik
70 – 79	Cukup
< 70	Kurang

Apabila anda mencapai tingkat penguasaan di bawah 80 diharapkam untuk mempelajari kembali bagian materi yang dianggap belum dikuasai

Profil Penulis

Dr. Fatqurhohman, M.Pd. lahir di Banyuwangi-Jawa Timur pada tanggal 11 Februari 1986.

Pendidikan:

S1-Pendidikan Matematika di Universitas Jember.

S2-Pendidikan Matematika di Universitas Negeri Malang.

S3-Pendidikan Matematika di Universitas Negeri Malang.

Aktivitas yang dilakukan selama ini menjadi salah satu dosen PTS di Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Muhammadiyah Jember.