

Buku1

by Fatqurahman Fatqurahman

Submission date: 23-Sep-2021 11:53AM (UTC+0800)

Submission ID: 1655304163

File name: FATQURHOHMAN-Teori_Himpunan.pdf (2.62M)

Word count: 13770

Character count: 66793

BUKU AJAR

TEORI HIMPUNAN

Dr. FATQURHOHMAN, M. Pd

BUKU AJAR TEORI HIMPUNAN

KATA PENGANTAR

Puji syukur atas kehadiran Allah SWT yang telah memberikan rahmatnya, penyusunan buku ajar mata kuliah “Teori Himpunan” dapat terselesaikan. Buku ajar ini disusun sebagai literatur dan sumber mahasiswa serta bagi dosen dalam pembelajaran perkuliahan.

Buku ajar ini menyajikan lima bab, yaitu (1) Pendahuluan, (2) Konsep dasar himpunan, (3) Jenis himpunan, (4) Operasi himpunan, (5) Relasi dan fungsi. Buku ajar ini disusun secara sistematis dan sederhana sesuai Rencana Pembelajaran Semester yang menjadi satu kesatuan tak terpisahkan selama pembelajaran perkuliahan mata kuliah ini.

Pada kesempatan ini, penulis ingin berterima kasih kepada teman-teman, kolega-kolega, dan pihak lain terkait sehingga buku ini terselesaikan. Selain itu, mengingat buku ini merupakan terbitan edisi pertama, penulis menyadari masih banyak kekurangan dari segi sistematika ataupun kedalaman isi materi. Maka segala kritik dan masukan pembaca, diucapkan terimakasih.

Jember, September 2021

Penulis,

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
KATA PENGANTAR	ii
DAFTAR ISI	iii
DAFTAR TABEL	v
DAFTAR GAMBAR	vi
BAB 1. PENDAHULUAN	1
1.1. Deskripsi Mata Kuliah	1
1.2. Petunjuk Penggunaan	1
1.3. Capaian Kompetensi	2
1.4. Analisis Pembelajaran	3
1.5. Organisasi Materi	4
BAB 2. KONSEP HIMPUNAN	5
2.1. Deskripsi	5
2.2. Uraian Materi	5
2.2.1. Definisi Himpunan	5
2.2.2. Penyajian Himpunan	5
2.2.3. Hubungan Antar Himpunan	7
2.2.4. Himpunan Finit dan Infinit	9
2.3. Rangkuman	10
2.4. Referensi	10
2.5. Latihan	11
2.6. Kunci Jawaban	14
BAB 3. JENIS HIMPUNAN	15
3.1. Deskripsi	15
3.2. Uraian Materi	15
3.3. Rangkuman	20
3.4. Referensi	20
3.5. Latihan	20
3.6. Kunci jawaban	23

BAB 4. OPERASI HIMPUNAN	24
4.1. Deskripsi	24
4.2. Uraian Materi	25
4.2.1. Operasi Himpunan	25
4.2.2. Prinsip Dualitas Himpunan	36
4.2.3. Prinsip Inklusi-Eksklusi	38
4.3. Rangkuman	41
4.4. Referensi	42
4.5. Latihan	42
4.6. Kunci Jawaban	45
BAB 5. RELASI DAN FUNGSI	46
5.1. Deskripsi	46
5.2. Uraian Materi	47
5.2.1. Relasi Pada Himpunan	47
5.2.2. Fungsi Pada Himpunan	58
5.2.3. Fungsi Komposisi	69
5.2.4. Fungsi Invers	71
5.3. Rangkuman	74
5.4. Referensi	75
5.5. Latihan	76
5.6. Kunci Jawaban	85

DAFTAR TABEL

Tabel 1. Banyaknya Himpunan Bagian	16
Tabel 2. Hukum Operasi Himpunan	37
Tabel 3. Prinsip Dualitas Himpunan	38
Tabel 4. Relasi a faktor prima dari b	52
Tabel 5. Rumus Fungsi Invers	72

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Diagram Venn	7
Gambar 2.2 Himpunan Bagian	8
Gambar 2.3 Himpunan Saling Lepas	9
Gambar 4.1 Operasi Irisan Himpunan	25
Gambar 4.2 Operasi Gabungan Himpunan	27
Gambar 4.3 Operasi Penjumlahan Himpunan	28
Gambar 4.4 Operasi Pengurangan Himpunan	31
Gambar 4.5 Operasi Beda Setangkup Himpunan	35
Gambar 4.6 Prinsip Inklusi-Eksklusi Dua Himpunan	40
Gambar 4.7 Prinsip Inklusi-Eksklusi Tiga Himpunan	41
Gambar 5.1 Relasi $A \times B$	48
Gambar 5.2 Diagram Panah “ a faktor prima dari b ”	48
Gambar 5.3 Relasi Pada Graf Berarah	50
Gambar 5.4 Relasi Tiga Himpunan	56
Gambar 5.5 Fungsi atau Pemetaan	59
Gambar 5.6 Fungsi Injektif	61
Gambar 5.7 Fungsi Surjektif	62
Gambar 5.8 Fungsi Bijektif	63
Gambar 5.9 Fungsi Konstan	64
Gambar 5.10 Fungsi Linier	65
Gambar 5.11 Fungsi Kuadrat	66
Gambar 5.12 Fungsi Identitas	66
Gambar 5.13 Fungsi Tangga	67
Gambar 5.14 Fungsi Modulus	68
Gambar 5.15 Komposisi Dua Fungsi	69
Gambar 5.16 Fungsi Invers	71
Gambar 5.17 Komposisi Dua Fungsi dan Inversnya	73

1.1. Deskripsi Mata Kuliah

Mata Kuliah “Teori Himpunan” dilaksanakan pada semester 2 dengan bobot 2 SKS. Secara umum bahasan materi yang akan dipelajari, meliputi: konsep dasar himpunan, jenis himpunan, operasi himpunan, relasi dan fungsi, fungsi komposisi dan fungsi invers.

1.2. Petunjuk Penggunaan**1. Kegiatan Pembelajaran**

Pembelajaran pada mata kuliah ini menggunakan model *Student Center Learning* dengan strategi pembelajarannya secara ekspositori dan *small group discussion*. Selain itu mahasiswa juga diberikan permasalahan-permasalahan yang akan dibahas pada setiap pertemuannya, agar dapat menerapkan konsep yang dipelajari melalui permasalahan yang diberikan.

2. Latihan

Latihan yang diberikan pada akhir setiap bab bertujuan untuk mengukur pencapaian hasil belajar mahasiswa. Latihan yang diberikan berupa soal formatif dan objektif.

3. Waktu Belajar

Mahasiswa menyediakan waktu belajar dalam perkuliahan selama 14 pertemuan dan 2 pertemuan untuk UTS dan UAS. Sehingga waktu yang dibutuhkan mahasiswa mempelajari mata kuliah teori himpunan, antara lain:

- 1) 2 x 50 menit per minggu tatap muka/belajar melalui sinkron maya/asinkron maya
- 2) 2 x 60 menit per minggu untuk mengerjakan latihan
- 3) 2 x 170 menit per minggu dalam proses pembelajaran

4. Manfaat

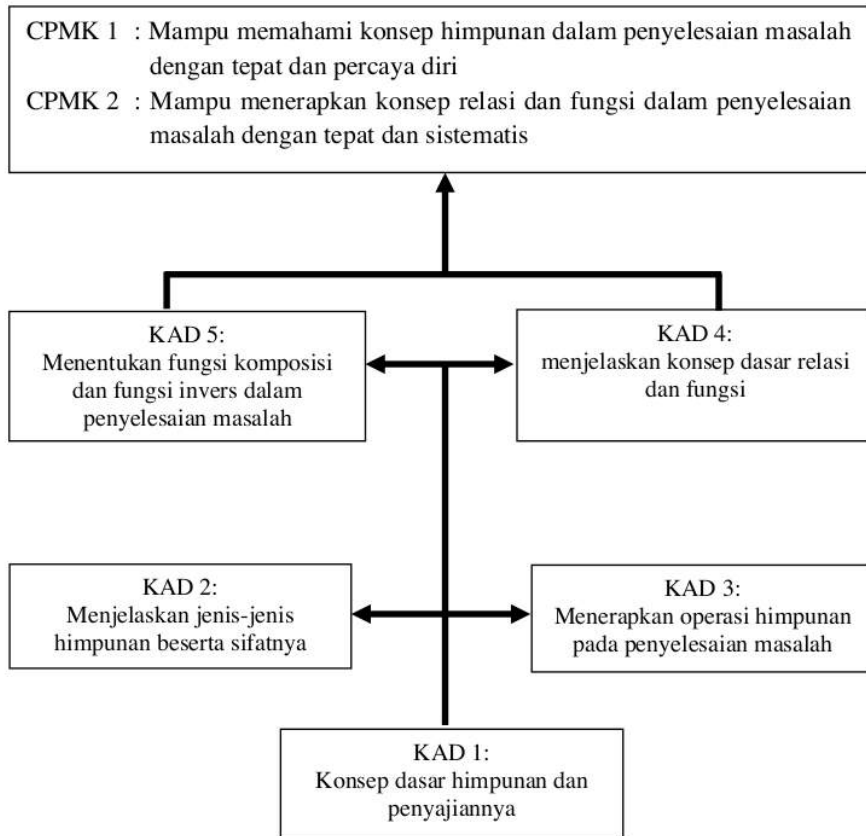
Manfaat buku ajar ini adalah:

- 1) Meningkatkan efektivitas dalam pembelajaran di kelas;
- 2) Kondisi dan waktu belajar dapat menyesuaikan dengan kebutuhan mahasiswa;
- 3) Menentukan pencapaian kompetensi mahasiswa secara terstruktur;
- 4) Membantu mahasiswa memperbaiki proses belajar melalui evaluasi yang ditetapkan,

1.3. Capaian Kompetensi

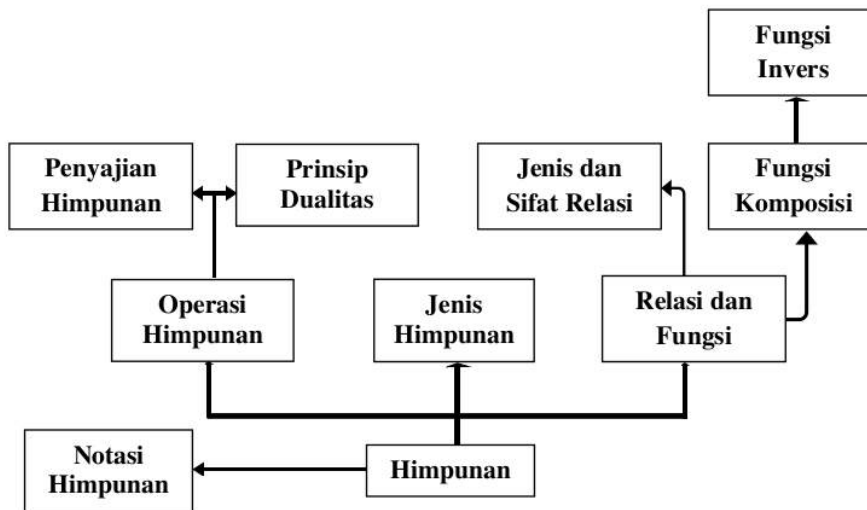
CPMK-1	Mampu memahami konsep himpunan dalam penyelesaian masalah dengan tepat dan percaya diri	
	KAD 1	Konsep dasar himpunan dan penyajiannya
	KAD 2	Menjelaskan jenis-jenis himpunan beserta sifatnya
	KAD 3	Menerapkan operasi himpunan dalam penyelesaian masalah
CPMK-2	Mampu menerapkan konsep relasi dan fungsi dalam penyelesaian masalah dengan tepat dan sistematis	
	KAD 4	Menjelaskan konsep dasar relasi dan fungsi
	KAD 5	Menentukan fungsi komposisi dan fungsi invers dalam penyelesaian masalah

1.4. Analisis Pembelajaran



1.5. Organisasi Materi

Organisasi materi di dasarkan pada kompetensi yang akan dicapai. Adapun organisasi materi berdasarkan peta kompetensi mata kuliah ini adalah sebagai berikut:



BAB 2

KONSEP HIMPUNAN

Tujuan Pembelajaran:

1. Mahasiswa mampu menjelaskan definisi himpunan dan notasinya
2. Mahasiswa mampu menyajikan himpunan dalam bentuk diagram venn
3. Mahasiswa mampu menyajikan himpunan dalam bentuk aljabar

2.1. Deskripsi Singkat

Dalam kehidupan sehari-hari, himpunan diartikan sebagai kegiatan mengkoleksi suatu benda (objek) dengan sengaja menggunakan aturan tertentu. Objek himpunan dapat diistilahkan sebagai elemen, unsur, atau anggota. Objek-objek tersebut harus memiliki sifat yang sama, agar tidak salah mengelompokkan objek-objek tersebut. Misalnya kumpulan bilangan, huruf, negara, alat musik tradisional, buku-buku, dan sebagainya.

2.2. Uraian Materi

2.2.1. Definisi Himpunan

Definisi 2.1: Himpunan adalah kumpulan dari benda (objek) yang terdefinisi dengan aturan tertentu).

himpunan dinotasikan dengan huruf kapital: A, B, X, Y

anggota (unsur) himpunan berupa benda atau objek:
 a, b, c, d, s, t dll.

Jika x anggota dari himpunan X , ditulis: $x \in X$ (dibaca “ x dalam X ”).

Jika x bukan anggota suatu himpunan X , ditulis: $x \notin X$.

2.2.2. Penyajian Pada Himpunan

a. Enumerasi

Merupakan penyajian himpunan yang didaftar secara rinci terhadap masing-masing anggota himpunan

Contoh 1: Himpunan pada 4 bilangan asli yang pertama:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

Himpunan pada 5 bilangan genap positif yang pertama:

$$B = \{4, 6, 8, 10\}$$

Himpunan pada 100 buah bilangan asli yang pertama:

$$\{1, 2, \dots, 100\}$$

Himpunan pada bilangan bulat: $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

b. Keanggotaan

Misalkan:

$x \in A$, x anggota himpunan A

$x \notin A$, x bukan anggota himpunan A

Contoh 2: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{p, q, \{p, q, r\}, \{p, r\}\}$, $K = \{\{ \} \}$.

Sehingga:

$$3 \in A$$

$$\{p, q, r\} \in R, r \notin R \text{ dan } \{ \} \notin R$$

$$\{ \} \in K$$

Contoh 3: Jika $P_1 = \{p, q\}$, $P_2 = \{\{p, q\}\}$, $P_3 = \{\{\{p, q\}\}\}$

Sehingga:

$$p \in P_1, p \notin P_1;$$

$$P_1 \in P_2; P_1 \notin P_3;$$

$$P_2 \in P_3$$

c. Simbol Baku

$\mathbb{P}$	Bilangan bulat positif	$\{1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{N}$	Bilangan natural	$\{1, 2, \dots\}$
$\mathbb{Z}$	Bilangan bulat	$\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
$\mathbb{Q}$	Bilangan rasional	$\{\dots, -2, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots\}$
$\mathbb{R}$	Bilangan riil	$\{\dots, -2, -1.77, 0, 0.21, 1, 2, 2.6789, \dots\}$
$\mathbb{C}$	Bilangan kompleks	
$\mathbb{U}$	Himpunan universal	

2
Contoh 4: Misalkan: $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,

Jika $A = \{1, 3, 5\}$

Maka A adalah bagian dari U

d. Notasi Himpunan

Notasi: $\{x | \text{syarat terhadap } x\}$

Contoh 5: Jika A merupakan bilangan positif lebih kecil dari 5

Maka:

$$A = \{x | x \text{ bilangan positif lebih kecil } 5\}$$

$$A = \{x | x \in P, x < 5\}$$

Sehingga: $A = \{1, 2, 3, 4\}$

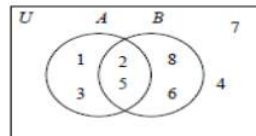
e. Diagram Venn

Merupakan penyajian himpunan dengan cara membuat hubungan (korelasi) antar himpunan dalam kelompok himpunan.

2
Contoh 6: Misalkan

$$U = \{1, 2, \dots, 7, 8\}, A = \{1, 2, 3, 5\}, B = \{2, 5, 6, 8\}.$$

Maka:



Gambar 2.1 Diagram Venn

2.2.3. Hubungan Antar Himpunan

a. Himpunan Bagian

Definisi 2.2: A disebut himpunan bagian (*subset*) B , jika setiap anggota A ada di B .

dinotasikan $A \subseteq B$,

$$\forall x \in A, x \in B \text{ atau } x \in A \Rightarrow x \in B$$

Dimana: simbol $\subseteq$ disebut relasi inklusi.

Sebagian besar beberapa buku, notasi himpunan bagian adalah " $\subset$ ", simbol/tanda tersebut dapat juga menyatakan suatu himpunan sejati

(proper subset). Misalkan: " $A \subset B$ " diartikan bahwa setiap anggota A termuat pada B , akan tetapi ada anggota B bukan dari anggota A .

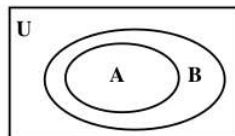
Catatan: Perhatikan perbedaan antara " $\in$ " dan " $\subset$ ".
 Jika $A = \{1, 2, 3\}$ maka $1 \in A$ bukan $1 \subset A$ dan sebaliknya $1 \not\subset A$ melainkan $\{1\} \subset A$.
 Jika $A = \{1, \{1\}, \{1, 2\}, 2, 3\}$,
 maka $1 \in A$ dan $\{1\} \in A$ tetapi $1 \neq \{1\}$.

Contoh 7: Misalkan:
 $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{4, 6, 7, 9\}$,
 $C = \{4, 6, 7, 10\}$

Maka: $A \subseteq A$; $B \subseteq A$

Dikarenakan ada anggota yang bukan dari himpunan A ,
 dinotasikan: $C \not\subseteq A$

Contoh 8: Himpunan B disebut superset dari A , dinotasikan $A \subseteq B$
 Maka dapat dilukiskan berikut:



Gambar 2.2 Himpunan Bagian

Himpunan kosong diartikan sebagai himpunan yang tidak mempunyai anggota, dinotasikan " ϕ " atau " $\{\}$ ". Misalkan: $P = \{\phi\}$. P bukan himpunan kosong, dikarenakan mempunyai anggota.

Teorema 2.1 Himpunan kosong ϕ merupakan himpunan bagian (subset) setiap himpunan

Bukti: Misalkan

A sebarang himpunan dan $x \in \phi$.

Maka: $x \in A$. Sehingga, $\phi \subseteq A$.

Definisi 2.3: Dua himpunan dikatakan sama yaitu himpunan A dan B .

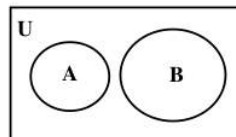
Jika memiliki sifat $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$, yaitu:

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ dan } B \subseteq A$$

Contoh 9: ⁶ Jika $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{2, 3, 1\}$, maka $A = B$
 Jika $P = \{x | x \text{ solusi dari } x^2 = 1\}$ dan $Q = \{-1, 1\}$,
 Maka: $A = B$
 Jika $M = \{a, b, c\}$ dan $N = \{c, d, e\}$,
 Maka: $M \neq N$

b. ⁷ Himpunan Saling Lepas

Dikatakan himpunan saling lepas (*disjoint*), jika ada dua himpunan yang tidak mempunyai elemen yang sama. misalkan A dan B , dinotasikan $A // B$.



Gambar 2.3 Himpunan Saling Lepas

Contoh 10: Jika $A = \{x | x \in P, x < 8\}$ dan $B = \{10, 20, 30\}$,
 Maka: $A // B$

2.2.4. ⁶ Himpunan Finit dan Infinit

Definisi 2.4: Himpunan M dikatakan finit, dengan syarat:

- Jika $M = \phi$
- Jika ada bilangan asli n , maka anggota M dapat diurutkan yaitu $1, 2, 3, \dots, n$
- Anggota M berkorespondensi satu-satu dengan bilangan $1, 2, 3, \dots, n$

Jika tidak memenuhi tersebut, maka M himpunan infinit.

- Contoh 11: ➤ $P = \{a, b, c, \dots, z\}$ dikatakan himpunan finit, jika anggota P dapat dipasangkan dengan bilangan asli dari 1 sampai dengan 26.
- Q adalah himpunan solusi $x^2 = -1$ yang merupakan himpunan finit karena $Q = \phi$.
 - Bilangan ganjil merupakan himpunan infinit

2.3. Rangkuman

Himpunan merupakan kumpulan benda (objek) yang terdefinisi dengan aturan tertentu. Himpunan bagian dinotasikan " $\subset$ ", menyatakan himpunan bagian sejati (*proper subset*) dan $A \subseteq B, \forall x \in A, b$ atau $x \in A \Rightarrow x \in B$. Relasi $\subseteq$ disebut juga sebagai relasi inklusi. Himpunan M dikatakan finit, jika $M = \phi$ dan infinit jika $M \neq \phi$.

2.4. Referensi

1. Kunen, K. 2011. *Set Theory*. UK: King College London
2. Pinter, C. C. 2014. *Set Theory*. South Korea: Kyung Moon Publishers
3. Weiss, W. A.R. 2008. *An Introduction to Set Theory*. USA: Toronto University
4. Smith, J. T. 2008. *Basic Set Theory*. San Francisco State University.

2.5. Latihan

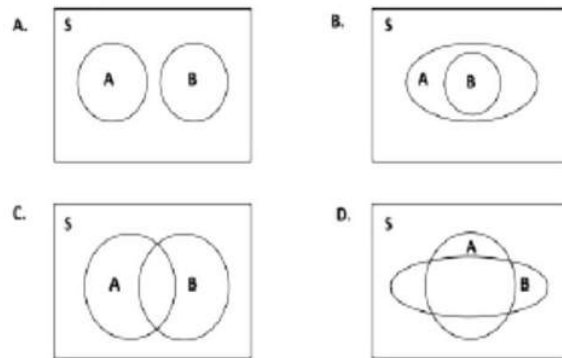
Soal Formatif 1

1. Dari kumpulan berikut, yang dapat dinyatakan sebagai himpunan adalah
 - A. Kumpulan orang pandai
 - B. Kumpulan orang kaya
 - C. Kumpulan siswa di kelas yang berkacamata
 - D. Kumpulan bunga indah
2. Notasi pembentuk himpunan berikut yang benar untuk himpunan $A = \{2,3,5,7\}$, adalah ...
 - A. $A = \{x \mid x \leq 7, x \in \text{bilangan prima}\}$
 - B. $A = \{x \mid x \leq 8, x \in \text{bilangan asli}\}$
 - C. $A = \{x \mid x \leq 7, x \in \text{bilangan cacah}\}$
 - D. $A = \{x \mid x < 8, x \in \text{bilangan prima}\}$
3. Himpunan B adalah himpunan warna pada lampu lalu-lintas, maka pernyataan di bawah ini yang salah adalah ...
 - A. Kuning B
 - B. Hijau B
 - C. Merah B
 - D. Hitam A
4. Himpunan G adalah himpunan bilangan genap antara 24 dan 35, jika himpunan G ditulis dengan cara mendaftar anggota-anggotanya maka diperoleh ...
 - A. $\{24, 26, 28, 30, 32, 34\}$
 - B. $\{26, 28, 30, 32, 34\}$
 - C. $\{26, 28, 30, 32, 34, 36\}$
 - D. $\{24, 26, 28, 30, 32, 34, 36\}$
5. Berikut ini pernyataan yang bukan himpunan adalah ...
 - A. Kumpulan bunga putih
 - B. Kumpulan bilangan
 - C. Kumpulan makanan enak
 - D. Kumpulan huruf vokal

6. Anggota himpunan $A = \{2,5,6,7\}$ dan $B = \{1,3,5,6,7,9\}$ adalah ...

- A. $A = 4$ dan $B = 6$
- B. $A = 6$ dan $B = 5$
- C. $A = 3$ dan $B = 4$
- D. $A = 4$ dan $B = 3$

7. Diketahui: $S = \{\text{bilangan asli}\}$, $A = \{\text{bilangan ganjil}\}$,
 $B = \{\text{bilangan prima} > 2\}$. Jika dinyatakan dalam diagram venn
 adalah...



8. Diketahui $K = \{\text{bilangan prima antara 2 dan 12}\}$,
 $L = \{4 \text{ bilangan kelipatan 3 pertama}\}$. maka $K \cap L$ adalah ...

- A. $\{3, 5, 6, 7, 9, 11, 12\}$
- B. $\{5, 6, 7, 9, 11, 12\}$
- C. $\{3, 6, 9\}$
- D. $\{3\}$

9. Diketahui $P = \{1, 2, 3, 9, 12, 13\}$. Himpunan kelipatan 3 yang terdapat
 di P adalah...

- A. $\{9\}$
- B. $\{3, 9\}$
- C. $\{3, 9, 12\}$
- D. $\{3, 6, 9, 12\}$

10. Jika himpunan $A \subset B$, $n(A) = 11$ dan $n(B) = 18$

Maka: $n(A \cap B)$ adalah ...

- A. 7
- B. 11
- C. 18
- D. 28

Soal Uraian 1

1. P adalah himpunan bilangan genap yang kurang dari 25. Sebutkan anggota-anggota dari P dalam tanda kurung kurawal!
2. P adalah himpunan bilangan genap yang kurang dari 25. Nyatakan P dengan notasi pembentuk himpunan dan tentukan (P) !
3. Tentukan 2 himpunan semesta untuk himpunan $= \{2,4,6,8\}$
4. Tentukan 2 himpunan semesta dari himpunan $\{Jupiter, Saturnus, Uranus, Neptunus\}$
5. Diketahui $P = \{a, b, c, d, e\}$. Tentukan himpunan bagian dari P yang memiliki 2 anggota.
6. Misalkan P himpunan sebarang. Apakah P selalu mempunyai subset?
7. Diberikan $\{15, 4, 7, 6, 2\} \cap \{2, 4, 6, 8\} = \{4, x, 6\}$. Maka tentukan:
 - a. Nilai x
 - b. Gambarkan dalam bentuk diagram venn
8. Dari suatu kelas terdapat 25 siswa suka membaca, 30 siswa suka mengarang. Jika 12 orang siswa suka membaca dan mengarang, banyak siswa dalam kelas tersebut adalah ...
9. Diketahui himpunan $P = \{1, 3, 4, 5\}$, $Q = \{1, 2, 5, 6\}$. Tentukan:
 - a. $P \cap Q$
 - b. $P \cup Q$
 - c. Gambarkan diagram vennya.
10. Manakah himpunan berikut yang merupakan himpunan finit?
 - a. S adalah himpunan manusia yang tinggal di bumi
 - b. T adalah himpunan bilangan riil antara 0 sampai 1
 - c. U adalah himpunan garis yang dibuat melalui sebuah titik
 - d. $P = \{n | n \text{ bilangan prima}\}$.

2.6. Kunci Jawaban

Kunci Soal Formatif 1

- | | |
|------|-------|
| 1. C | 6. A |
| 2. A | 7. B |
| 3. D | 8. D |
| 4. B | 9. C |
| 5. C | 10. B |

Periksalah jawaban anda menggunakan kunci jawaban formatif 1 diatas.
Hitunglah jawaban yang benar untuk mengetahui tingkat penguasaan anda.

Skor	Keterangan
90 – 100	Baik sekali
80 – 89	Baik
70 – 79	Cukup
< 70	Kurang

Jika mencapai tingkat penguasaan di bawah 80 diharapkam untuk mempelajari kembali bagian materi yang dianggap belum dikuasai.

BAB 3

JENIS HIMPUNAN

Tujuan Pembelajaran:

1. Mahasiswa mampu menjelaskan jenis-jenis himpunan
2. Mahasiswa mampu menjelaskan sifat-sifat dari jenis himpunan
3. Mahasiswa mampu menyebutkan contoh jenis himpunan
4. Mahasiswa mampu menyelesaikan soal berdasarkan jenis himpunan

3.1. Deskripsi Singkat

Himpunan merupakan kumpulan benda (objek) yang terdefinisi dengan aturan tertentu. Jenis himpunan diantaranya himpunan bagian, himpunan kosong, himpunan semesta, himpunan sama, himpunan lepas, himpunan ekuivalen. Perlu dipahami bahwa antara himpunan kosong dengan bukan himpunan disesuaikan dengan syarat keanggotaannya. Himpunan kosong tidak memiliki satupun anggota. Sedangkan bukan himpunan jika tidak dapat dibedakan anggota/bukan anggotanya. Maka bukan himpunan juga dapat dianggap sebagai himpunan kosong.

3.2. Uraian Materi

Pada dasarnya ada beberapa jenis himpunan yang perlu diketahui, diantaranya adalah himpunan kosong, himpunan semesta, himpunan bagian, himpunan lepas, himpunan sama, dan himpunan ekuivalen.

1) Himpunan Bagian

Definisi 3.1 A disebut sebagai bagian dari B , jika dan hanya jika setiap anggota A termuat pada B .

- Catatan:**
- (1) $A \subset B$ (" A himpunan bagian B "), atau $B \supset A$ (" B sumber dari A "). Apabila setiap anggota A termasuk anggota B .
 - (2) $A \not\subset B$ atau $B \not\supset A$ (" B mengandung A ", " B super himpunan dari A "), apabila A bukan anggota himpunan B .

- (3) A himpunan bagian murni dari B , jika dan hanya jika himpunan A merupakan bagian dari anggota himpunan B , akan tetapi ada anggota himpunan B bukan himpunan A .
- (4) Banyaknya himpunan bagian dinotasikan: $2^{n(A)}$ jika himpunannya adalah A .

Tabel 1. Banyaknya Himpunan Bagian dari Suatu Himpunan

Himpunan	Semua Himpunan Bagian	Banyak Himpunan Bagian
ϕ	ϕ	1
$\{1\}$	$\phi, \{1\}$	2
$\{1,2\}$	$\phi, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}$	4
dst	...	...

Contoh 1:

- (1) $A = \{1, 3, 5\}$ dan $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Buktikan himpunan A merupakan himpunan bagian B ?

Jawab:

$A \subseteq B$ karena 2, 4, 6 tidak termasuk anggota A

Setiap elemen A merupakan elemen B .

- (2) Jika $A = \{1\}$

Maka himpunan bagiannya adalah $\{\}, \{1\}$.

Banyaknya himpunan bagian A : $2^{n(A)} = 2^1 = 2$

- (3) Jika $B = \{a, b\}$

Maka himpunan bagiannya adalah $\{\}, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$.

Banyaknya himpunan bagian B : $2^{n(A)} = 2^2 = 4$

- (4) Jika $C = \{piring, sendok, gelas\}$

Maka himpunan bagian dari C adalah $\{\}, \{piring\}, \{sendok\}, \{gelas\}, \{piring, sendok\}, \{piring, gelas\}, \{gelas, sendok\}, \{piring, sendok, gelas\}$.

Banyaknya himpunan bagian C : $2^{n(A)} = 2^3 = 8$.

2) Himpunan Kosong

Definisi 3.2 Himpunan kosong merupakan himpunan yang tidak memiliki satupun anggota, dinotasikan ϕ atau $\{ \}$.

Biasanya kita menganggap bahwa bukan himpunan sebagai himpunan kosong. Untuk memahaminya maka perlu mengetahui ketentuan-ketentuan yang berlaku.

Himpunan kosong merupakan himpunan yang sama sekali tidak mempunyai anggota. Sedangkan bukan himpunan diartikan dari keanggotaan yang tidak jelas/tidak dapat dibedakan.

Teliti dalam menuliskan simbol nol (0), dikarenakan nol (0) dapat dikatakan bukan himpunan kosong, akan tetapi dapat dianggap sebagai anggota dari suatu himpunan bernilai nol (0).

Contoh 2: ¹⁴ Himpunan $A = \{ 2, 4, 6, 8 \}$

Himpunan $B = \{ 4, 8, 10 \}$

Tentukan himpunan ¹bilangan ganjil?

Jawab: Dikarenakan himpunan A adalah bilangan genap dan himpunan B juga bilangan genap. Maka himpunan ganjil tidak ada " $\{ \}$ " atau " $\emptyset$ ".

Contoh 3: ➤ A adalah himpunan mahasiswa UMJ berusia 16 tahun
➤ ¹ B adalah himpunan bilangan asli lebih kecil dari 1
➤ C adalah himpunan hari berawalan huruf " H "
➤ D adalah himpunan bilangan ganjil habis dibagi 2.

3) Himpunan Semesta (*Universum*)

Definisi 3.3 Himpunan semesta merupakan himpunan yang memuat semua anggota (objek) dari himpunan yang dibicarakan.
Dinotasikan: S atau U .

Contoh 4:

- (1) $A = \{\text{kucing, harimau, kambing}\}$

Maka:

$U = \{\text{binatang, \{binatang berkakiempat\}}\}$ atau

$U = \{\text{binatang memamah biak}\}$

- (2) Himpunan anak TK Pertiwi yang memakai jepit rambut

Maka: Himpunan semestanya adalah semua anak TK Pertiwi

- (3) Misalkan $A = \{2, 3, 5, 7\}$

Himpunan semesta $\{\text{bilangan prima}\}$.

Bukan hanya himpunan bilangan prima semesta dari A , tetapi masih ada beberapa himpunan lain sebagai semesta pada A .

Seperti: bilangan asli, bilangan cacah, bilangan bulat, dan sebagainya.

- (4) Misalkan $B = \{\text{merah, kuning, hijau}\}$.

Maka: Himpunan semesta dari B adalah

$S = \{\text{warna - warna lampu lalu lintas}\}$ atau

$S = \{\text{warna - warna pelangi}\}$, dan sebagainya.

4) Himpunan Sama

Definisi 3.4 A dan B merupakan himpunan yang sama, jika dan hanya jika keduanya mempunyai anggota yang sama tanpa melihat urutannya.

Misalkan: $A = B$,

Jika A himpunan bagian B dan B himpunan bagian A .

Notasi: $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$

Contoh 5:

- (1) $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{3, 1, 2\}$.

Himpunan $A = B$, dikarenakan setiap anggota A dimiliki B , dan sebaliknya setiap anggota B dimiliki A .

- (2) $C = \{k, a, r, t, u\}$ dan $D = \{t, a, u, r, k\}$.

Himpunan $C = D$, dikarenakan setiap anggota C ada pada D , dan setiap anggota D ada pada C .

- (3) Jika $A = \{1,2,3\}$ dan $B = \{a, b, c\}$.
Maka: $A \neq B$
- (4) Jika $P = \{\text{alat transportasi}\}$ dan $Q = \{\text{sayuran}\}$.
Maka: $P \neq Q$, dikarenakan anggota P bukan anggota Q , dan anggota Q juga bukan anggota dari P .

5) Himpunan Lepas

Definisi 3.5 Dua buah himpunan saling lepas jika tidak memiliki satupun anggota yang sama

Contoh 6: Himpunan $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$
Himpunan $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$
Maka: Himpunan A dan B saling lepas ($A \parallel B$), dikarenakan tidak ada anggota yang sama antara himpunan A dan B .

6) Himpunan Ekuivalen

Definisi 3.6 Himpunan dikatakan ekuivalen, jika:

- (1) Jumlah anggota dua himpunan sama.
- (2) Banyaknya anggotanya juga sama.
- (3) Memiliki hubungan satu dengan yang pada setiap anggota himpunannya.

Notasinya: $A \sim B$.

Dikatakan bahwa $A \sim B$, apabila $n(A) = n(B)$ atau

Banyaknya anggota himpunan A sama dengan B .

Contoh 7:

- (1) $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ dan
 $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Maka: $A \sim B$,
Karena, banyaknya anggota himpunan A dan B adalah sama yaitu 6, meskipun anggotanya tidak sama.

- (2) $C = \{\text{nama hari diawali huruf } S\}$ dan
 $D = \{a, b, c\}$.
Maka: $C \sim D$,
Karena $C = \{\text{senin, selasa, sabtu}\}$,
 $n(C) = 3$ dan $n(D) = 3$
Sehingga: $C \sim D$ karena $n(C) = n(D)$.

3.3. Rangkuman

Jenis himpunan diantaranya adalah himpunan bagian, himpunan kosong, himpunan semesta (semesta pembicaraan), himpunan sama, himpunan lepas, himpunan ekuivalen. Himpunan ekuivalen didasarkan pada banyaknya anggota yang sama dengan anggota himpunan lain. Himpunan sama dibedakan dari kesamaan anggota (elemen) bukan dari banyaknya anggota. Perbedaan himpunan kosong dengan bukan himpunan didasarkan pada syarat-syarat keanggotaan.

3.4. Referensi

1. Kunen, K. 2011. *Set Theory*. UK: King College London
2. Pinter, C. C. 2014. *Set Theory*. South Korea: Kyung Moon Publishers
3. Weiss, W. A.R. 2008. *An Introduction to Set Theory*. USA: Toronto University
4. Smith, J. T. 2008. *Basic Set Theory*. San Francisco State University

3.5. Latihan

Soal Formatif 2

1. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $B = \{a, b, c, d\}$. A dan B disebut himpunan ...

A. Sama	C. Berisikan
B. Ekuivalen	D. Berkomplemen
2. Berikut ini yang merupakan contoh himpunan yang sama adalah ...

A. $\{1, 2, 3, 4\}$ dan $\{5, 6, 7, 8\}$
B. $\{\text{merah, putih}\}$ dan $\{\text{warna bendera negara belanda}\}$
C. $\{a, b, c\}$ dan $\{1, 2, 3\}$
D. $\{r, a, t, u\}$ dan $\{u, r, a, t\}$

3. Jika $P = \{k, e, l, a, b, u\}$ dan $Q = \{l, u, k, a\}$ maka pernyataan berikut yang benar adalah ...
A. $P \subset Q$ C. $P = Q$
B. $Q \subset P$ D. $P \sim Q$
4. Jika banyaknya himpunan bagian P adalah 32, maka $n(P) = \dots$
A. 3 C. 5
B. 4 D. 6
5. Banyaknya himpunan bagian dari $P = \{\text{warna lampu lalu lintas}\}$ adalah ...
A. 8 C. 4
B. 7 D. 3
6. Jika $A = \{0, 1\}$, maka $n(A) = \dots$
A. 0 C. 2
B. 1 D. 3
7. Manakah dari pernyataan berikut yang bukan himpunan!
A. Himpunan nama bulan selama setahun yang diawali huruf "K"
B. Himpunan bilangan asli kurang dari 1
C. Himpunan bilangan prima yang genap
D. Megawati, Prabowo, Ahok, Hatta, Jokowi adalah Presiden Indonesia
8. Jika $S = \{\text{bilangan ganjil kurang dari 11}\}$. Maka himpunan S adalah ...
A. $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ C. $\{1, 3, 5, 7, 9\}$
B. $\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$ D. $\{1, 3, 4, 5, 9\}$
9. Banyak himpunan bagian S adalah ...
A. 64 C. 32
B. 27 D. 16
10. Jika $P = \{\text{bilangan prima kurang dari 20}\}$. Banyak himpunan bagian P adalah ...
A. 64 C. 128
B. 256 D. 512

Soal Uraian 2

Berdasarkan pasangan himpunan berikut, tentukan himpunan sama dan himpunan ekuivalen!

1. $A = \{k, l, m\}$ dan $B = \{p, g, r\}$
2. $E = \{l, a, u, t\}$ dan $F = \{u, l, a, t\}$
3. $I = \{m, a, r, e, t\}$ dan $J = \{a, p, r, i, l\}$

Perhatikan pernyataan berikut.

- (1) Q adalah himpunan empat huruf konsonan pertama dalam abjad.
 - (2) X adalah himpunan bilangan ganjil yang kurang dari 23
 - (3) K adalah nama-nama jari di tangan
 - (4) B adalah himpunan nama-nama nabi yang huruf awalnya vokal.
 - (5) L adalah himpunan bilangan cacah antara 5 dan 30
 - (6) C adalah himpunan nama presiden Indonesia
 - (7) D adalah himpunan nama-nama jenis warna
-
4. Tuliskan himpunan pernyataan himpunan: Q, X, K, B, L, C, D .
 5. Tentukan pasangan dari pernyataan diatas, apakah himpunan lepas, himpunan sama, atau himpunan ekuivalen.
 - a. Q, X , dan K
 - b. L, C , dan D
 - c. B, C , dan D
 - d. X, L , dan Q

3.6. Kunci Jawaban

Kunci Soal Formatif 2

- | | |
|------|-------|
| 1. B | 6. C |
| 2. D | 7. D |
| 3. B | 8. C |
| 4. C | 9. C |
| 5. A | 10. B |

Periksalah jawaban yang anda miliki dengan kunci jawaban formatif 2 di atas. Hitunglah jawaban yang benar untuk mengetahui tingkat penguasaan anda.

Skor	Keterangan
90 – 100	Baik sekali
80 – 89	Baik
70 – 79	Cukup
< 70	Kurang

Jika mencapai tingkat penguasaan di bawah 80 diharapkan untuk mempelajari kembali bagian materi yang dianggap belum dikuasai.

BAB 4

OPERASI HIMPUNAN

Tujuan Pembelajaran:

1. Mahasiswa mampu menentukan operasi himpunan
2. Mahasiswa mampu menjelaskan sifat-sifat operasi himpunan
3. Mahasiswa mampu menerapkan operasi himpunan menggunakan diagram venn dan aljabar
4. Mahasiswa mampu menyelesaikan soal-soal menggunakan operasi himpunan

4.1. Deskripsi Singkat

Operasi himpunan meliputi penjumlahan, pengurangan, perkalian, irisan, gabungan, komplemen, beda setangkup. Pada prinsip dualitas himpunan, menggunakan sifat dan aturan (hukum) dari operasi himpunan. Sedangkan pada prinsip inklusi-eksklusi menggunakan operasi irisan dan gabungan dengan menerapkan diagram venn.

Penggunaan operasi himpunan, pada umumnya sering digambarkan dengan menggunakan diagram venn. Diagram venn merupakan penyajian himpunan menggunakan diagram, biasanya berbentuk gambar lingkaran dalam himpunan semesta, dengan tujuan agar lebih mudah dipahami. Seluruh himpunan atau himpunan semesta pada diagram venn disimbolkan dengan gambar segi empat kecil.

4.2. Uraian Materi

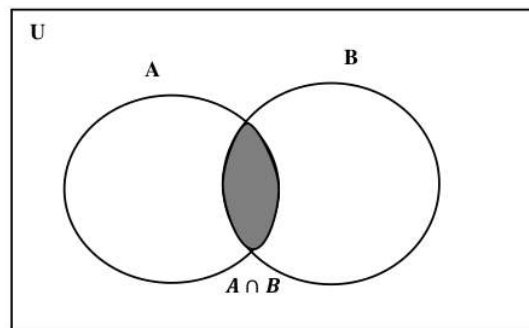
4.2.1. Operasi Himpunan

Operasi juga merupakan suatu hubungan (relasi) terhadap satu atau lebih unsur untuk menghasilkan unsur lain. Misalnya, operasi penjumlahan $3 + 7$, yang mana bilangan tersebut merupakan anggota dari suatu himpunan bilangan asli. Inilah yang dimaksud dengan menghasilkan unsur lain/himpunan baru berdasarkan hubungan/penggabungan dua kumpulan unsur.

Ada beberapa operasi himpunan di dalam matematika, diantaranya yaitu irisan, gabungan, penjumlahan, selisih, komplemen, perkalian, dan beda setangkup.

1. Operasi Irisan (*Intersection*)

Definisi 4.1 ¹ Irisan dikenal juga dengan interseksi. Dua himpunan A dan B dikatakan beririsan, apabila anggota himpunan A juga dimiliki B .
Notasi operasi irisan A dan B yaitu $A \cap B$
(dibaca: “A irisan B”, atau “A interseksi B”)



Gambar 4.1 Operasi Irisan

Operasi irisan juga dapat dituliskan dalam bentuk aljabar yaitu

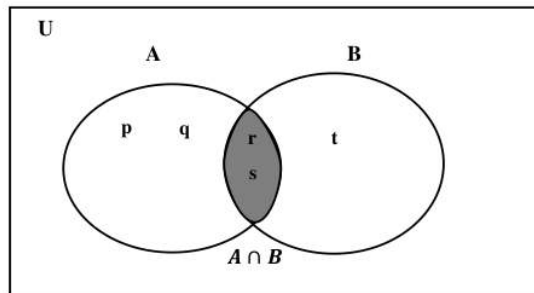
$$A \cap B = \{x | x \in A, x \in B\}$$

Operasi irisan antara dua buah himpunan melibatkan suatu relasi, yaitu relasi berpotongan dan relasi lepas. Dikatakan relasi berpotongan, (j.h.j) irisannya bukan himpunan kosong ($A \cap B \neq \emptyset$). Sedangkan relasi lepas, (j.h.j) irisannya merupakan himpunan kosong ($A \cap B = \emptyset$).

Contoh 1: Jika $A = \{p, q, r, s\}$ dan $B = \{r, s, t\}$

Maka: $A \cap B = \{r, s\}$

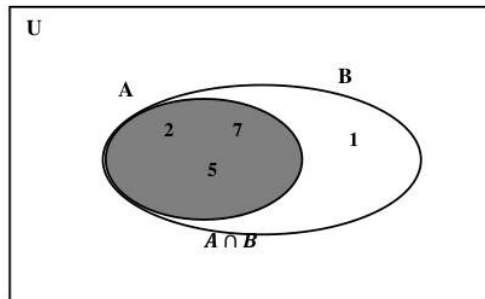
Berikut gambar bentuk diagram vennya



Contoh 2: Jika $A = \{1, 2, 5, 7\}$ dan $B = \{2, 5, 7\}$

Maka: $A \cap B = \{2, 5, 7\}$

Berikut gambar bentuk diagram vennya



2. Operasi Gabungan (*Union*)

Operasi ini merupakan operasi yang dapat membentuk himpunan baru yang mana anggotanya mencakup semua anggota dua/lebih himpunan yang digabungkan.

Definisi 4.2 Gabungan (*union*) himpunan A dan B adalah anggota suatu himpunan yang dapat menjadi anggota A saja atau B saja, atau keduanya

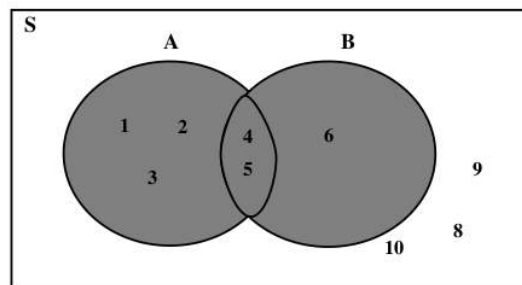
Dinotasikan $A \cup B$ (“ A gabungan B ” atau “ A union B ”)

Contoh 3: $S = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan $B = \{4, 5, 6, 7\}$

Maka: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Berikut gambar bentuk diagram vennya



Gambar 4.2 Operasi Gabungan

Daerah arsiran pada diagram venn menunjukkan $A \cap B = \{4, 5\}$.

Operasi gabungan dua himpunan dituliskan dalam bentuk aljabar yaitu

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ atau } x \in B\}$$

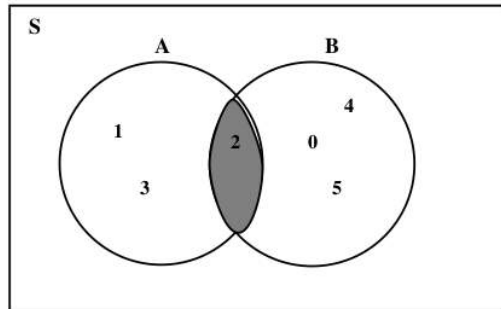
Arti “atau” bersifat inklusif, yaitu untuk setiap x anggota A saja, setiap x anggota B saja, dan setiap x anggota keduanya.

Contoh 4: $S = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$

$A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{0, 2, 4, 5\}$

Maka: $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Berikut gambar bentuk diagram vennya



3. Operasi Penjumlahan

Definisi 4.3 Penjumlahan himpunan A dengan B merupakan anggota himpunan A atau himpunan B , tetapi bukan anggota $A \cap B$

Dinotasikan: $A + B$

Notasi bentuk aljabar operasi penjumlahan himpunan A dan B :

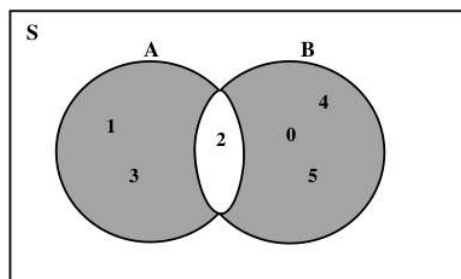
$$A + B = \{x | x \in A, x \in B, x \notin (A \cap B)\} \text{ atau}$$

$$A + B = \{x | x \in A \text{ atau } x \in B \text{ dan } x \notin (A \cap B), x \in S\}$$

Contoh 5: $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{0, 2, 4, 5\}$

Maka: $A + B = \{0, 1, 3, 4, 5\}$

Berikut gambar bentuk diagram vennya



Gambar 4.3 Operasi Penjumlahan

4

Sifat-sifat operasi penjumlahan pada himpunan

1) Ketertutupan (Closure)

Misalkan: $H = \{A, B, C, \dots\} = \{\text{himpunan}\}$

Untuk setiap A dan B anggota H

Maka: $A + B$ anggota H .

Bukti: Definisi:

$$A + B = \{x | x \in A, x \in B, x \notin (A \cap B)\}$$

atau

$$A + B = \{x | x \in A \text{ atau } x \in B \text{ dan } x \notin (A \cap B), x \in S\}$$

Diketahui bahwa hasil ruas kanan membentuk himpunan yaitu

$$A + B \in H.$$

Jadi, untuk setiap A dan B anggota H .

2) Komutatif

Misalkan Jika $A + B = B + A$.

Bukti: Ambil sembarang $x \in A + B$, maka:

$$x \in A \text{ atau } x \in B \text{ (} x \in (A \cup B) \text{) dan } x \notin (A \cap B).$$

Karena: $x \in (A \cup B)$, maka:

$$x \in B \text{ atau } x \in A \text{ (} x \in (B \cup A) \text{) dan } x \notin (B \cap A)$$

Jadi, $A + B = B + A$.

3) Asosiatif

Misalkan: Jika terdapat tiga himpunan A, B, C

Maka: $A + B + C$.

Bukti:

$$A + B + C = (A + B) + C$$

$$A + B + C = A + (B + C)$$

$$A + B + C = (A + C) + B$$

$$\text{Jadi, } (A + B) + C = A + (B + C) = (A + C) + B.$$

4) Identitas

Misalkan Jika A adalah himpunan tidak kosong,

$$\text{Sehingga: } A + I = I + A = A$$

Maka: I sebagai identitas dari operasi penjumlahan.

Bukti:

- (1) $A + I = I + A$
 Ambil sembarang $x \in A + I$
 Maka:
 $x \in A$ atau $x \in I$ dan $x \notin (A \cap I)$ atau
 $x \in I$ atau $x \in A$ dan $x \notin (I \cap A)$
 Sehingga dapat ditulis: $A + I = I + A$
- (2) $A + I = A$
 Ambil sembarang $x \in A + I$
 Maka:
 $x \in A$ atau $x \in I$ dan $x \notin (A \cap I)$
 Karena I himpunan kosong, maka:
 $A \cup I = A$ dan $A \cap I = \{ \}$
 Sehingga: $A + I = A$
 Karena $A + I = I + A$ dan $A + I = A$.
 Maka: $A + I = I + A = A$

4. Operasi Pengurangan/Selisih (Difference)

Definisi 4.4 Pengurangan atau selisih dua himpunan merupakan himpunan yang berupa semua anggota himpunan yang tidak dimiliki himpunan lain

Dinotasikan: $A - B$

Notasi bentuk aljabar:

Selisih dua himpunan A dan B adalah

$$A - B = \{x | x \in A, x \notin B\} \text{ atau}$$

$$B - A = \{x | x \in B, x \notin A\}$$

$A - B$, himpunan barunya berupa semua anggota A yang tidak ada di B .

$B - A$, himpunan barunya berupa semua anggota B yang tidak ada di A .

Misalkan: $A = \{a, b, c, d, e\}$ dan $B = \{a, i, u, e, o\}$

$$A - B = \{b, c, d\}$$

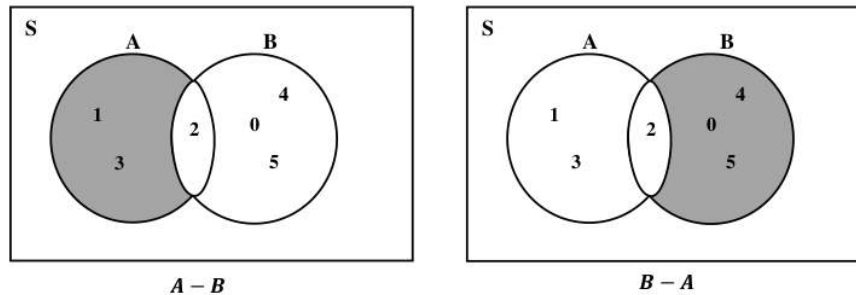
$$B - A = \{i, u, o\}$$

Contoh 6: $A = \{1,2,3\}$ dan $B = \{0,2,4,5\}$

$$A - B = \{1,3\}$$

$$B - A = \{0,4,5\}$$

Berikut gambar bentuk diagram venny



Gambar 4.4 Operasi Pengurangan

Selisih dari dua himpunan pada diagram venn diatas adalah yang diarsir.

4

Sifat-sifat operasi pengurangan/selisih pada himpunan

1) Ketertutupan (Closure)

Misalkan $H = \{A, B, C, \dots\} = \{\text{himpunan}\}$

Untuk setiap A dan B anggota H

Maka: $A - B$ anggota H .

Bukti: Definisi:

$$A - B = \{x | x \in A, x \notin B, x \notin (A \cap B)\} \text{ atau}$$

$$A - B = \{x | x \in A \text{ dan } x \notin (A \cap B), x \in S\}$$

Diketahui bahwa hasil ruas kanan membentuk himpunan yaitu

$$A - B \in H.$$

Jadi, untuk setiap A dan B anggota H .

Misalkan Jika himpunan A sama dengan himpunan B , maka hasil pengurangannya adalah himpunan kosong.

$$A - B = \{\} \Leftrightarrow A = B$$

4

Bukti: Ambil sembarang $x \in A$, karena $A = B$, maka $x \in B$.

Karena setiap anggota A merupakan anggota B ,

$$\text{Maka: } A = A \cap B$$

$$\text{Sehingga: } A - B = \{\}.$$

2) Komutatif, Asosiatif, identitas

Pada operasi pengurangan, sifat komutatif, asosiatif, identitas tidak berlaku.

Komutatif $A = \{a, b, s, d, f, g, h\}$ dan $B = \{c, h, i, l, d\}$
 $A - B = \{a, b, s, f, g\}$ karena $A \cap B = \{d, h\}$
 $B - A = \{c, h, i\}$ karena $B \cap A = \{d, h\}$
 Asosiatif $S = \{r, n, a, k, m, e, i\}$, $T = \{l, a, s, i, m, n\}$, $U = \{l, i, u\}$
 $S - (T - U) = \{e, i, k, r\}$ karena $T - U = \{a, s, m, n\}$
 $(S - T) - U = \{e, n, k, r\}$ karena $S - T = \{r, n, k, e\}$
 $(S - U) - T = \{e, k, r\}$ karena $S - U = \{r, n, a, k, m, e\}$
 Identitas Tidak berlaku, karena sifat komutatif tidak terpenuhi

5. Operasi Komplemen

Definisi 4.5 Komplemen suatu himpunan A adalah semua anggota himpunan semesta yang bukan anggota A .

Dinotasikan: A' atau A^c ("A aksen" atau "A komplemen")

Notasi bentuk aljabar: $A^c = \{x | x \in S, x \notin A\}$

Catatan: Jika suatu himpunan diberikan definisi secara jelas dengan notasi yang lengkap, maka hasil operasi dari suatu himpunan tidak akan mempengaruhi himpunan semestanya.

Misalkan: Jika himpunan $A = \{2, 4, 6, \dots\}$
 Maka komplemen A atau A^c adalah $\{1, 3, 5, \dots\}$,

Jika semesta pembicaraannya adalah bilangan asli
 Jadi, ketika mengoperasikan komplemen suatu himpunan, semesta pembicaraan harus terlebih dahulu didefinisikan.

Contoh 7:

(1) $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ dan $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Maka: $A^c = \{6, 7, 8, 9, 10\}$.

(2) Jika S adalah himpunan bilangan cacah dan A himpunan genap.

Maka: A^c adalah himpunan bilangan ganjil.

Contoh 8: Diketahui

$$A = \{1,2,3\}, B = \{2,4,6\}, C = \{3,4,5,7\}.$$

$$S = \{x | 1 \leq x \leq 8, x \in \text{Asli}\} = \{1,2,3,4,5,6,7,8\},$$

Tentukan:

$$(1) \quad A^c = S - A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\} - \{1,2,3\} = \{4,5,6,7,8\}$$

$$(2) \quad B^c = S - B = \{1,2,3,4,5,6,7,8\} - \{2,4,6\} = \{1,3,5,7,8\}$$

$$(3) \quad C^c = S - C = \{1,2,3,4,5,6,7,8\} - \{3,4,5,7\} = \{1,2,6,8\}$$

$$(4) \quad A \cup B = \{1,2,3,4,6\}$$

$$(A \cup B)^c = S - (A \cup B) = \{5,7,8\}$$

$$(5) \quad A \cup C = \{1,2,3,4,5,7\}$$

$$(A \cup C)^c = S - (A \cup C) = \{6,8\}$$

$$(6) \quad A \cap B = \{2\}$$

$$(A \cap B)^c = S - (A \cap B) = \{1,3,4,5,6,7,8\}$$

$$(7) \quad A \cap C = \{3\}$$

$$(A \cap C)^c = S - (A \cap C) = \{1,2,4,5,6,7,8\}$$

$$(8) \quad A \cap B = \{2\} \text{ dan } A \cup B = \{1,2,3,4,6\}$$

$$A + B = (A \cup B) - (A \cap B) = \{1,3,4,6\}$$

$$(A + B)^c = S - (A + B) = \{2,5,7,8\}$$

$$(9) \quad A - B = \{1,2,3\} - \{2,4,6\} = \{1,3\}$$

$$(A - B)^c = S - (A - B) = \{2,4,5,6,7,8\}$$

$$(10) \quad C - B = \{3,4,5,7\} - \{2,4,6\} = \{3,5,7\}$$

$$(C - B)^c = S - (C - B) = \{1,2,4,6,8\}$$

6. Operasi Perkalian (Cartesian Product)

Definisi 4.6 Operasi perkalian pada A dan B merupakan semua pasangan terurut yang dibentuk dari anggota-anggota himpunan A dan B

Notasi bentuk aljabar: $A \times B = \{(A, B) | a \in A \text{ dan } b \in B\}$

Pasangan terurut x dan y merupakan suatu pasangan yang unsur pertamanya x dan unsur keduanya y . Dinotasikan (x, y)

Banyaknya pasangan terurut x dan y dari A dan B adalah hasil kali hitung antara jumlah anggota A dan B

7

Misalkan: $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{a, b\}$

Maka:

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

$$B \times A = \{(a, 1), (b, 1), (a, 2), (b, 2), (a, 3), (b, 3)\}$$

Sehingga:

Hasil perkalian tersebut adalah $(x, y) \neq (y, x)$

Jadi, operasi perkalian tidak berlaku **sifat komutatif**

Contoh 9:

3

(1) $A = \{x | -2 < x < 4, x \in B\}$

$$B = \{x | 0 < x < 10, x \in \text{bil. prima}\}.$$

Jumlah kemungkinan pasangan terurut adalah:

$$n(A) = 5, \text{ yaitu } \{-1, 0, 1, 2, 3\}; n(B) = 4, \text{ yaitu } \{2, 3, 5, 7\}$$

$$\text{Sehingga: } 5 \times 4 = 20$$

$$A \times B = \left\{ \begin{array}{l} (-1, 2), (-1, 3), (-1, 5), (-1, 7), \\ (0, 2), (0, 3), (0, 5), (0, 7), \\ (1, 2), (1, 3), (1, 5), (1, 7), \\ (2, 2), (2, 3), (2, 5), (2, 7), \\ (3, 2), (3, 3), (3, 5), (3, 7) \end{array} \right\}.$$

$$B \times A = \left\{ \begin{array}{l} (2, -1), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (2, 3) \\ (3, -1), (3, 0), (3, 1), (3, 2), (3, 3) \\ (5, -1), (5, 0), (5, 1), (5, 2), (5, 3) \\ (7, -1), (7, 0), (7, 1), (7, 2), (7, 3) \end{array} \right\}.$$

(2) Jika A adalah himpunan makanan,

$$\text{Maka: } A = \{s = \text{soto}, g = \text{gado-gado}, n = \text{nasi}, m = \text{mie}\}$$

Jika B adalah himpunan minuman,

$$\text{Maka: } B = \{c = \text{cola}, t = \text{teh}, d = \text{dawet}\}$$

Sehingga dapat dituliskan:

8

$$A = \{s, g, n, m\}, B = \{c, t, d\}$$

Kombinasi makanan dan minuman dituliskan:

$$A \times B = |A| \cdot |B| = 4 \cdot 3 = 12$$

8
Sehingga:

$$A \times B = \left\{ \begin{array}{l} (s, c), (s, t), (s, d), \\ (g, c), (g, t), (g, d), \\ (n, c), (n, t), (n, d) \\ (m, c), (m, t), (m, d) \end{array} \right\}$$

7. Operasi Beda Setangkup (*Symmetric Difference*)

Definisi 4.7 Beda setangkup dua buah himpunan adalah suatu himpunan yang anggotanya ada pada himpunan A dan B, tetapi tidak pada keduanya. Notasi: $A \oplus B$

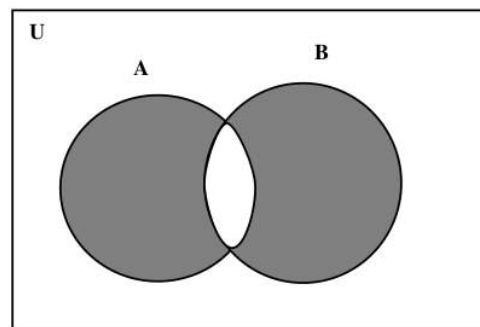
Misalkan: A dan B adalah himpunan, maka beda setangkup antara A dan B adalah:

$$A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

atau

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$$

Berikut bentuk diagram venn-nya



Gambar 4.5 Operasi Beda Setangkup

Contoh 10: Jika $A = \{2,3,5,7\}$ dan $B = \{1,2,3,4,5\}$

Maka:

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \{1,4,7\}$$

Sifat Beda Setangkup:

- (1) $A \oplus B = B \oplus A$ (hukum komutatif)
- (2) $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ (hukum asosiatif)

4.2.2. Prinsip Dualitas Himpunan

Prinsip dualitas berlaku, jika dapat menukar “ $\cup$ ” dengan “ $\cap$ ”, “ S ” dengan “ $\emptyset$ ”, dan sebaliknya.

Dualitas pada Hukum Ajabar Himpunan

Jika S merupakan suatu kesamaan (*identity*) yang dapat melibatkan himpunan dan operasi-operasinya yaitu irisan, gabungan, dan komplemen.

Misalkan: Jika: S merupakan kesamaan dual dari S .

Maka: $\cup \rightarrow \cap$ atau $\cap \rightarrow \cup$ dan $\emptyset \rightarrow U$ atau $U \rightarrow \emptyset$

Sedangkan, komplemen dibiarkan seperti semula.

Maka: operasi-operasi tersebut pada kesamaan S juga benar.

Contoh 11: Diketahui pernyataan $(A \cup \emptyset) \cap (S \cup B) = A$.

Tentukan dual dari pernyataan tersebut

Maka Dual dari pernyataan $(A \cup \emptyset) \cap (S \cup B) = A$ adalah:

$$(A \cap S) \cup (\emptyset \cap B) = A$$

Contoh 12: Tentukan Dual dari $(A \cap B) \cup (A \cap B) = A$

Jawab: $(A \cap B) \cup (A \cap B) = A$

$$= (A \cup (A \cap B)) \cap (B \cup (A \cap B))$$

$$= ((A \cup A) \cap (A \cup B)) \cap ((B \cup A) \cap (B \cap B))$$

$$= (A \cap (A \cup B)) \cap ((B \cup A) \cap B)$$

$$= (A \cup B) \cap (B \cup A)$$

$$\text{Karena: } (B \cup A) = (A \cup B)$$

$$\text{Maka: } (A \cup B) \cap (A \cup B) = A$$

Tabel 2. Hukum Operasi Himpunan

Hukum	Bentuk operasi	Contoh
Komutatif	$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$	
	$A \cup B = B \cup A$	$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ $B \cup A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
	$A \cap B = B \cap A$	$A \cap B = \{4, 5\}$ $B \cap A = \{4, 5\}$
Asosiatif	$A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 3, 4\}, C = \{3, 4, 5, 6\}$ $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}, B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ $A \cap B = \{2, 3\}, B \cap C = \{3, 4\}$	
	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cup B) \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $A \cup (B \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \cap B) \cap C = \{3\}$ $A \cap (B \cap C) = \{3\}$
Distributif	$A = \{1, 2, 3\}; B = \{2, 3, 4\};$ dan $C = \{3, 4, 5, 6\}$ $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}; B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6\}; A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $A \cap B = \{2, 3\}; B \cap C = \{3, 4\}; A \cap C = \{3\}$	
	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cap (B \cup C) = \{2, 3\}$ $(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{2, 3\}$
	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4\}$ $(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1, 2, 3, 4\}$
Identitas	$A \cap \emptyset = \emptyset$	$A \cup \emptyset = A$
	$A \cap S = A$	$A \cup S = S$
Idempotent	$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
Komplemen	$A \cap A^c = \emptyset$	$\emptyset^c = S$
	$A \cup A^c = S$	$S^c = \emptyset$
	$(A^c)^c = A$	
Selisih	$A - B \neq B - A$	$A - \emptyset \neq \emptyset - A$
	$A - (B - C) \neq (A - B) - C$	
Absorption	$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$
	$A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{0, 3, 4, 5\}$ $A \cap B = \{3\}, A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$	
	$A \cup (A \cap B) = \{1, 2, 3\} \cup \{3\}$ $A \cup (A \cap B) = \{1, 2, 3\}$ $A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B)$ $\{1, 2, 3\} \cap \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ $A \cap (A \cup B) = \{1, 2, 3\} = A$ $A \cap (A \cup B) = A$

Tabel 3. Prinsip Dualitas Himpunan

Hukum	Lambang	Lambang Dualitas
Identitas	$A \cup \emptyset = A$	$A \cap U = A$
Null/Dominasi	$A \cap \emptyset = \emptyset$	$A \cup U = U$
Komplemen	$A \cup A = U$	$A \cap A = \emptyset$
Idempotent	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
Penyerapan	$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$
Komutatif	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Asosiatif	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Distributif	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

4.2.3. Prinsip Inklusi-Eksklusi

Prinsip inklusi-eksklusi adalah pernyataan suatu operasi seperti irisan atau gabungan yang dapat menggunakan diagram venn atau bentuk aljabar.

Perhatikan informasi pernyataan berikut.

Mahasiswa yang hadir dalam perkuliahan, 20 orang suka membaca dan 30 orang suka menulis. Berapa orang mahasiswa yang suka membaca atau menulis?

Berdasarkan ilustrasi tersebut, informasi yang diketahui belum lengkap, dikarenakan untuk dapat menghitung banyaknya mahasiswa yang suka membaca atau menulis, maka haruslah ada informasi mengenai mahasiswa yang menyukai keduanya.

Misalkan: A dan B adalah sembarang himpunan

Penjumlahan $|A| + |B|$, artinya:

- Menghitung banyaknya anggota A yang tidak ada pada B
- Banyaknya anggota B yang tidak ada pada A tepat satu kali
- Banyaknya anggota yang ada dalam $A \cap B$ sebanyak dua kali

Sehingga: pengurangan banyaknya anggota yang ada dalam $A \cap B$ dari $|A| + |B|$ membuat banyaknya anggota $A \cap B$ dihitung tepat satu kali.

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \oplus B| = |A| + |B| - |2A \cap B|$$

Sedangkan untuk tiga himpunan, misalnya himpunan A , B dan C adalah:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Contoh 13: Terdapat 25 mahasiswa dalam kelas yang suka matematika diskrit, 13 mahasiswa suka aljabar linier dan 8 orang suka matematika diskrit dan aljabar linier. Berapakah banyaknya mahasiswa di kelas tersebut?

Jawab: A himpunan mahasiswa suka matematika diskrit

B himpunan mahasiswa suka aljabar linier

$A \cap B$ mahasiswa suka keduanya

Sehingga:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B| = 25 + 13 - 8 = 30$$

Jadi, terdapat 30 orang mahasiswa dalam kelas

Contoh 14: Berapa banyaknya bilangan bulat positif tidak melebihi 1000 yang habis dibagi 7 atau 11?

Jawab: Misalkan

P bilangan bulat positif tidak lebih 1000 habis dibagi 7

Q bilangan bulat positif tidak lebih 1000 habis dibagi 11

Dengan demikian:

➤ $P \cup Q$ adalah bilangan bulat positif tidak lebih 1000 habis dibagi 7 atau 11

➤ $P \cap Q$ bilangan bulat positif tidak lebih 1000 habis dibagi 7 dan 11

Maka:

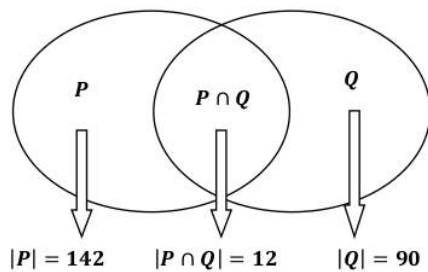
$$|P| = \left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor = 142 \text{ dan } |Q| = \left\lfloor \frac{1000}{11} \right\rfloor = 90$$

$$|P \cap Q| = \left\lfloor \frac{1000}{\text{lcm}(7,11)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1000}{77} \right\rfloor = 12$$

$$|P \cup Q| = |P| + |Q| - |P \cap Q| = 142 + 90 - 12 = 220$$

Jadi, terdapat 220 bilangan bulat positif tidak melampaui 1000 yang habis dibagi 7 atau habis dibagi 11

Berikut bentuk diagram venn-nya



Gambar 4.6 Prinsip Inklusi-Eksklusi Dua Himpunan

Contoh 15: Berapa banyaknya ¹³ bilangan bulat positif tidak melebihi 1000 yang habis dibagi 5, 7 atau 11?

Jawab: ¹³ P bilangan bulat positif tidak lebih 1000 habis dibagi 5
 Q bilangan bulat positif tidak lebih 1000 habis dibagi 7
 R bilangan bulat positif tidak lebih 1000 habis dibagi 11

Dengan demikian:

- $P \cup Q \cup R$ bilangan bulat positif tidak lebih 1000 yang habis dibagi 5 atau 7 atau 11
- $P \cap Q \cap R$ bilangan bulat positif tidak lebih 1000 yang habis dibagi 5, 7, 11
- $P \cap Q$ ¹³ bilangan bulat positif tidak lebih 1000 yang habis dibagi 5 dan 7
- $P \cap R$ bilangan bulat positif tidak lebih 1000 yang habis dibagi 5 dan 11
- $Q \cap R$ bilangan bulat positif tidak lebih 1000 yang habis dibagi 7 dan 11

Maka:

$$|P| = \left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor = 200 ;$$

$$|Q| = \left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor = 142 ;$$

$$|R| = \left\lfloor \frac{1000}{11} \right\rfloor = 90$$

$$|P \cap Q| = \left\lfloor \frac{1000}{\text{lcm}(5,7)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1000}{35} \right\rfloor = 28$$

$$|P \cap R| = \left\lfloor \frac{1000}{\text{lcm}(5,11)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1000}{55} \right\rfloor = 18$$

$$|Q \cap R| = \left\lfloor \frac{1000}{\text{kp}(7,11)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1000}{77} \right\rfloor = 12$$

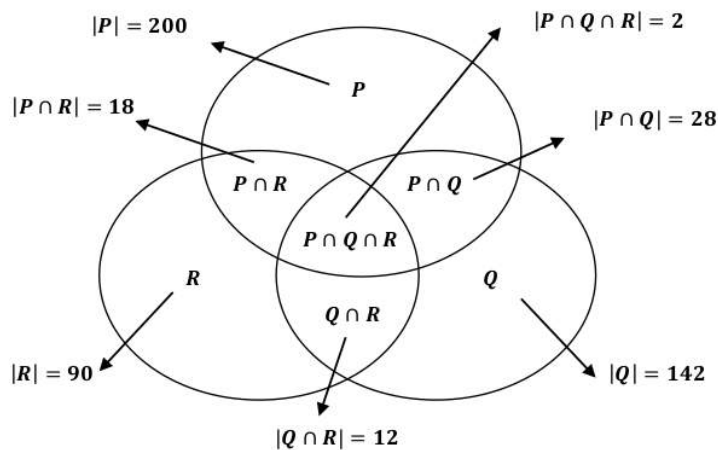
$$|P \cap Q \cap R| = \left\lfloor \frac{1000}{\text{kp}(5,7,11)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1000}{385} \right\rfloor = 2$$

$$|P \cup Q \cup R| = 200 + 142 + 90 + 90 - 28 - 18 - 12 + 2$$

$$|P \cup Q \cup R| = 376$$

Jadi, terdapat 376 bilangan bulat positif tidak melampaui 1000 yang habis dibagi 5, 7 atau habis dibagi 11

Berikut bentuk diagram venn-nya



Gambar 3.7 Prinsip Inklusi-Eksklusi Tiga Himpunan

4.3. Rangkuman

Operasi merupakan suatu hubungan (relasi) yang berkaitan dengan satu atau lebih unsur untuk menghasilkan unsur lain. Operasi himpunan mencakup: penjumlahan, pengurangan, perkalian, irisan, gabungan, komplemen, beda setangkep. Pada prinsip dualitas himpunan berlaku operasi himpunan dalam menerapkan sifat-sifatnya, seperti: komutatif, asosiatif, distributive, identitas, idempotent, komplemen, selisih, absorption. Sedangkan pada prinsip inklusi-eksklusi berlaku pada operasi irisan, gabungan, dan beda setangkep dengan menerapkan penggunaan diagram venn.

A. Referensi

1. Kunen, K. 2011. *Set Theory*. UK: King College London
2. Pinter, C. C. 2014. *Set Theory*. South Korea: Kyung Moon Publishers
3. Weiss, W. A. R. 2008. *An Introduction to Set Theory*. USA: Toronto University
4. Smith, J. T. 2008. *Basic Set Theory*. San Francisco State University

B. Latihan

Soal Formatif 3

1. Diketahui $A = \{\text{bilangan prima kurang dari 12}\}$ dan $B = \{1,3,5,7,9\}$.
Maka $A \cap B$ adalah ...
A. $\{1, 3, 5\}$ C. $\{2, 3, 5, 7\}$
B. $\{2, 3, 5\}$ D. $\{3, 5, 7\}$
2. Jika $A = \{2, 3, 5\}$ dan $B = \{\text{bilangan ganjil kurang dari 10}\}$
 $A \cup B$ adalah ...
A. $\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$ C. $\{2, 3, 5, 7, 9\}$
B. $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ D. $\{1, 5, 7, 9\}$
3. Jika:
 $P = \{\text{tiga bilangan prima pertama}\}$
 $Q = \{\text{bilangan asli kurang dari 10}\}$
Maka: $Q - P$ adalah ...
A. $\{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ C. $\{1, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
B. $\{1, 2, 4, 6, 8\}$ D. $\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
4. Jika $A = \{1,2,3,4,5\}$ dan $B = \{4,5,6,7,8,9\}$, maka $A + B$ adalah ...
A. $\{1, 2, 3, 6, 7, 8, 9\}$ C. $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
B. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ D. $\{6, 7, 8, 9\}$
5. Jika $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4\}$, dan $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
maka $(A \cup B) \cap C$ adalah
A. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ C. $\{2, 4\}$
B. $\{5\}$ D. $\{1, 2, 3, 4\}$
6. Tentukan $A - (B \cap C)$ dan $A - (B \cup C)$,
jika $A = \{10, 11, 12, 13\}$, $B = \{\text{bilangan cacah antara 10 dan 15}\}$

$C = \{x \mid 8 \leq x \leq 12, x \in \text{bilangan asli}\}$.

- A. $\{11, 12\}$ dan $\{10, 11, 12, 13\}$ C. $\{10, 13\}$ dan $\{10, 11, 12, 13\}$
B. $\{11, 12\}$ dan $\{8, 9, 14\}$ D. $\{10, 13\}$ dan $\{8, 9, 14\}$
7. Dikelas terdapat 35 siswa. $(25 - x)$ siswa suka permen dan $(18 - x)$ suka coklat. Jika 7 siswa tidak suka keduanya, maka banyaknya anak yang suka coklat adalah siswa
A. 3 C. 5
B. 4 D. 6
8. Dikelas 8 terdapat 15 siswa suka minum susu, 10 siswa suka minum teh dan 5 siswa suka keduanya, serta 3 siswa tidak suka keduanya. Jumlah siswa di kelas 8 tersebut adalah ...
A. 23 C. 20
B. 33 D. 17
9. Dari 40 anak, diketahui 16 anak suka menulis, 22 anak suka membaca, dan 12 anak tidak suka menulis dan membaca. Banyaknya anak yang suka menulis dan membaca adalah anak
A. 10 C. 14
B. 12 D. 16
10. Sebuah agen majalah dan koran ingin memiliki pelanggan sebanyak 75 orang. Banyak pelanggan yang dimiliki adalah 20 orang berlangganan majalah, 35 orang berlangganan koran, dan 5 orang berlangganan keduanya. Agar keinginannya tercapai, banyak pelanggan yang harus ditambahkan adalah ...
A. 10 orang C. 25 orang
B. 15 orang D. 70 orang

Soal Uraian 3:

1. Jika $S = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{4,5,6,7\}$. Tentukanlah:

- a) $A \cap B$ dan $A \cup B$
- b) $A + B$ dan $A - B$
- c) $A \times B$ dan $B \times A$
- d) A' dan B'

2. Jika $A = \{2,3,4,5\}$, $B = \{2,4,6,8\}$, $C = \{a,b,c,d,e\}$. Tentukanlah:

- a) $A + B$ dan $B + C$
- b) $A - B$ dan $B - A$
- c) $A \times B$; $B \times C$ dan $A \times C$
- d) $C - (A + B)$ dan $(A - B) - (B \times C)$

3. Jika diketahui $n(S) = 50$, $n(A) = (15 - x)$, $n(B) = (27 + x)$, tentukan gambar diagram vennya dan banyaknya irisan A dan B.

4. Diketahui $A = \{8,9,10,11,12\}$, $B = \{\text{bilangan cacah kurang dari } 10\}$, dan $C = \{x \mid 2 \leq x \leq 12, x \in \text{bilangan asli}\}$. Tentukan $A - (B \cap C)$ dan $A - (B \cup C)$.

5. Jika $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{4,6,8\}$, $C = \{3,6,9,15,21\}$. Tentukanlah:

- a) $A \oplus B$
- b) $A \oplus C$
- c) $C - (A \oplus B)$
- d) $B - (A \oplus C)$

C. Kunci Jawaban

Kunci Soal Formatif 3

- | | |
|------|-------|
| 1. D | 6. D |
| 2. C | 7. A |
| 3. B | 8. A |
| 4. A | 9. A |
| 5. B | 10. C |

Periksalah jawaban yang anda miliki dengan kunci jawaban formatif 3 diatas. Hitunglah jawaban yang benar untuk mengetahui tingkat penguasaan anda.

Skor	Keterangan
90 – 100	Baik sekali
80 – 89	Baik
70 – 79	Cukup
< 70	Kurang

Jika mencapai tingkat penguasaan di bawah 80 diharapkam untuk mempelajari kembali bagian materi yang dianggap belum dikuasai.

BAB 5

RELASI DAN FUNGSI

Tujuan Pembelajaran:

1. Mahasiswa mampu menjelaskan relasi dan fungsi beserta sifatnya
2. Mahasiswa mampu menjelaskan jenis-jenis relasi dan fungsi
3. Mahasiswa mampu menjelaskan perbedaan fungsi komposisi dan fungsi invers
4. Mahasiswa mampu menentukan sifat-sifat fungsi komposisi, dan fungsi invers
5. Mahasiswa mampu menyelesaikan soal-soal relasi dan fungsi
6. Mahasiswa mampu menyelesaikan soal-soal fungsi komposisi, dan fungsi invers

5.1. Deskripsi Singkat

Relasi merupakan aturan yang menghubungkan anggota pada suatu himpunan dengan anggota himpunan lainnya. Relasi himpunan A dan B merupakan himpunan pasangan terurut dengan mengikuti aturan tertentu (relasi biner). Hasil semua pasangan terurut merupakan hasil *Cartesian product* dua buah himpunan.

Fungsi dikatakan juga sebagai sebuah relasi yang memiliki aturan khusus. Jika A dan B suatu himpunan, maka fungsi dari A ke B adalah suatu aturan yang mengaitkan satu (tepat satu) unsur di B untuk setiap unsur di A . Penyajian fungsi dapat melalui himpunan pasangan terurut, formula pengisian nilai, kata-kata.

Fungsi komposisi merupakan operasi penggabungan dari dua jenis fungsi untuk menghasilkan fungsi baru. **Fungsi invers** merupakan sebuah fungsi berkebalikan dari fungsi asalnya. Untuk menentukan invers suatu fungsi $y = f(x)$, maka dapat dilakukan dengan mengubah persamaan $y = f(x)$ ke bentuk $x = f(y)$.

5.2. Uraian Materi

5.2.1. Relasi Pada Himpunan

1. Definisi Relasi Pada Himpunan

Pada kegiatan belajar sebelumnya, telah dipelajari tentang *Cartesian product* yaitu berupa pasangan terurut dengan menghubungkan dua himpunan. Hasil pasangan terurut merupakan hasil *Cartesian product* dua himpunan. Sebagian dari anggota himpunan *Cartesian product* mempunyai hubungan khusus antara dua unsur pada pasangan terurut dengan aturan tertentu.

Relasi merupakan aturan yang menghubungkan anggota pada suatu himpunan dengan anggota himpunan lainnya. Sehingga **Relasi** antara himpunan A dan himpunan B merupakan himpunan yang berisi pasangan terurut yang mengikuti aturan tertentu. Aturan yang menghubungkannya disebut **relasi biner**.

Definisi 5.1 **Relasi Biner** R antara himpunan A dan B merupakan himpunan bagian dari *Cartesian product*:

$$A \times B \text{ atau } R \subseteq (A \times B).$$

Notasi relasi biner dituliskan: $a R b$ atau $(a, b) \in R$,

Artinya bahwa a dihubungkan dengan b oleh R

Notasi bukan relasi biner adalah $a R b$ atau $(a, b) \notin R$,

Artinya bahwa a tidak dihubungkan oleh b oleh relasi R

Himpunan A disebut daerah asal (*domain*) dari R

Himpunan B disebut daerah hasil (*range*) dari R .

Contoh 1: Misalkan: $A = (2, 3, 4)$ dan $B = (2, 4, 8, 9, 15)$,

Jika didefinisikan relasi R dari A ke B dengan aturan:

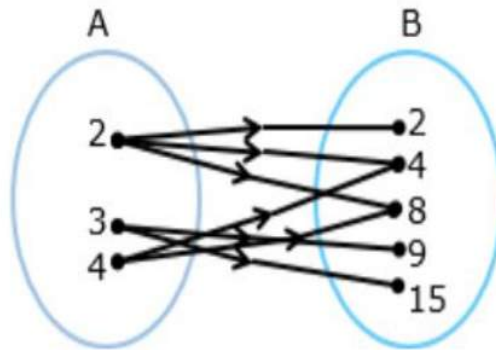
$(a, b) \in R$, jika a faktor prima b

Jawab: Berdasarkan *Cartesian product*: $A \times B$ diperoleh:

$$A \times B = \left\{ \begin{array}{l} (2, 2), (2, 4), (2, 8), (2, 9), (2, 15), \\ (3, 2), (3, 4), (3, 8), (3, 9), (3, 15), \\ (4, 2), (4, 4), (4, 8), (4, 9), (4, 15) \end{array} \right\}$$

Dengan menggunakan definisi relasi R dari A ke B ,

Maka: $R = \{(2, 2), (2, 4), (2, 8), (3, 9), (3, 15)\}$



Gambar 5.1 Relasi $A \times B$

Contoh 2: Misalkan: R adalah relasi pada $A = \{2, 3, 4\}$,

Didefinisikan $(x, y) \in R$,

Jika dan hanya jika x habis dibagi y

Jawab: Berdasarkan *Cartesian product*: $A \times B$

Maka relasi R pada A diperoleh:

$$R = \{(2, 2), (4, 4), (4, 2), (8, 8), (8, 2), (8, 4), (3, 3), (9, 9), (9, 3)\}$$

2. Penyajian Relasi Pada Himpunan

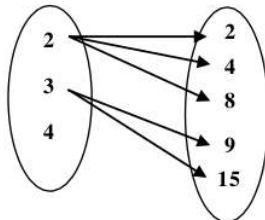
a) Penyajian Relasi dengan Diagram Panah

Contoh 3: Misalkan: $A = \{2, 3, 4\}$ dan $B = \{2, 4, 8, 9, 15\}$

Jika relasi R dari A ke B dengan aturan: $(a, b) \in R$

Maka: a faktor prima dari b

Sehingga diagram panah sebagai berikut:



Gambar 5.2 Diagram Panah “ a faktor prima dari b ”

b) Penyajian Relasi pada Pasangan Terurut

Contoh 4: Berdasarkan Relasi pada contoh 3,

Maka dapat dinyatakan dalam bentuk pasangan terurut berikut, yaitu:

$$R = \{(2, 2), (2, 4), (2, 8), (3, 9), (3, 15)\}$$

c) Penyajian Relasi pada Tabel

Dalam penyajian bentuk tabel, pada kolom pertama menyatakan daerah asal (*domain*), kolom kedua menyatakan daerah hasil (*range*).

Contoh 5: Misalkan: $A = \{2, 3, 4\}$ dan $B = \{2, 4, 8, 9, 15\}$

Jika relasi R dari A ke B dengan aturan: $(a, b) \in R$

Maka:

$$R = \{(2, 2), (2, 4), (2, 8), (3, 9), (3, 15)\}$$

Sehingga bentuk penyajian tabelnya sebagai berikut:

Tabel 4. Relasi a faktor prima dari b .

Domain	Range
2	2
2	4
2	8
3	9
3	15

d) Penyajian Relasi pada Matriks

Contoh 6: Misalkan: R relasi yang menghubungkan,

Himpunan $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ dan

Himpunan $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$.

Maka relasi tersebut dapat disajikan dalam bentuk matriks berikut:

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & m_{2n} \\ m_{m1} & m_{m2} & m_{mn} \end{bmatrix}$$

Unsur-unsur m_{ij} pada matriks bernilai satu atau nol, tergantung apakah unsur a_i pada himpunan A memiliki relasi

dengan unsur b_j pada himpunan B .

Pernyataan tersebut dapat dituliskan dalam bentuk:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & (a_i, b_j) \in R \\ 0, & (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

e) Penyajian Relasi pada Graf Berarah

Penyajian relasi dapat juga menggunakan ¹⁰ grafis dengan graf berarah (*directed graph* atau *digraph*). Graf berarah digunakan hanya sebagai representasi relasi suatu himpunan (bukan antara dua himpunan). Tiap unsur himpunan dinyatakan dengan sebuah titik (disebut juga simpul atau *vertex*), dan tiap pasangan terurut dinyatakan dengan busur (*arc*).

Jika $(a, b) \in R$, maka sebuah busur dibuat dari simpul a ke b .

a disebut simpul asal (*initial vertex*)

b disebut simpul tujuan (*terminal vertex*).

Pasangan terurut (a, a) dinyatakan dengan busur dari simpul a ke a sendiri.

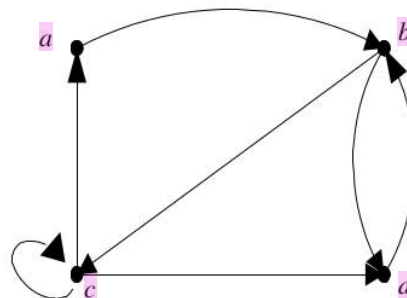
Busur semacam itu disebut *loop*.

Contoh 7: Misalkan

⁷ $R = \{(a, b), (b, c), (b, d), (c, c), (c, a), (c, d), (d, b)\}$ adalah relasi pada himpunan $\{a, b, c, d\}$.

Maka:

² Relasi R dapat di sajikan dalam bentuk graf berarah berikut



Gambar 5.3 Relasi Pada Graf Berarah

3. Sifat-sifat Relasi Pada Himpunan

Ada beberapa sifat relasi pada himpunan, yaitu:

a) Refleksif

Relasi pada A disebut refleksif, jika $(a, a) \in R, \forall a \in R$.

Contoh 8: Jika $A = \{1,2,3\}$

Maka:

$$R = \{(1,1), (1,3), (2,2), (2,1), (2,3), (2,3)\}$$

adalah relasi refleksif

b) Setangkup (*Symmetric*)

Relasi R pada A disebut setangkup:

Jika $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$, untuk semua $a, b \in A$

Contoh 9: Jika $A = \{1,2,3,4\}$

Maka:

$$R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,3), (3,2), (4,4)\}$$

adalah relasi setangkup

c) Tolak Setangkup (*Antisymmetric*)

Relasi R pada A disebut tolak setangkup:

Jika $(a, b) \in R$ dan $(b, a) \in R$ untuk semua $a, b \in A$

Contoh 10: Jika $A = \{1,2,3\}$

Maka: $R = \{(1,1), (2,2), (1,2)\}$ adalah relasi tolak setangkup

d) Menghantar (*transitive*)

Relasi R pada himpunan A disebut transitive:

Jika $(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in R$, Maka $(a, c) \in R$, untuk semua $a, b, c \in A$

Contoh 11: Jika $A = \{1,2,3,4\}$

Maka: $R = \{(1,2), (1,3), (2,3), (3,4), (1,4), (2,4)\}$
adalah relasi transitif

e) Kesetaraan (*equivalence relation*)

Relasi R pada A disebut relasi kesetaraan:

Jika meliputi reflektif, setungkup, dan menghantar

Contoh 12: Jika $A = \{1, 2, 3, 4\}$

Maka: $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

adalah relasi kesetaraan

4. Jenis-jenis Relasi pada Himpunan

a) Relasi Simetrik

Misalkan: $R = \{A, B, P(x, y)\}$ suatu relasi.

R disebut relasi simetrik:

Jika tiap $(a, b)R$, berlaku $(b, a)R$ atau Jika $a R b$, berakibat $b R a$

Catatan: Jika ada suatu pasangan, misalnya (a, b) ,

Maka: apakah (b, a) juga ada.

Jika tidak ada,

Maka: dipastikan relasi tersebut tidak simetrik

b) Relasi Anti Simetrik

Suatu relasi R disebut relasi anti simetrik:

Jika $(a, b)R$ dan $(b, a)R$, maka $a = b$

Jika $a, b \in R$, $a \neq b$, maka: $(a, b)R$ atau $(b, a)R$, tidak kedua-duanya

Misalkan: R suatu relasi himpunan bilangan asli,

Didefinisikan bahwa “ y habis dibagi x ”,

Maka: R merupakan relasi anti simetrik,

Dikarenakan:

Jika b habis dibagi a dan a habis dibagi b

Maka: $a = b$

Contoh 13: Jika $A = \{1, 2, 3\}$,

$R_1 = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2)\}$

Maka: R_1 bukan relasi anti simetrik,

Karena $(2, 3)R_1$ dan $(3, 2)R_1$

c) Relasi Transitif

Misalkan: R relasi pada himpunan A

R disebut relasi transitif:

Jika $(a, b)R$ dan $(b, c)R$, maka $(a, c)R$

Sehingga:

Jika a berelasi dengan b , b berelasi dengan c ,

Maka: a berelasi dengan c .

Contoh 14: Jika $A = \{a, b, c\}$ dan

$$R = \{(a, b), (a, c), (b, a), (c, b)\}$$

Maka: R bukan relasi transitif

Karena $(b, a)R$ dan $(a, c)R$,

akan tetapi $(b, c) \notin R$

Agar R menjadi relasi transitif:

Maka:

$$\lambda R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$$

d) Relasi Refleksif

Misalkan: $R = \{A, B, P(x, y)\}$ suatu relasi.

R disebut relasi refleksif:

Jika setiap A berlaku: $(a, a)R$

Artinya setiap anggota pada A berelasi dengan dirinya sendiri

Maka: a berelasi dengan c .

Contoh 15: Diketahui:

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \text{ dan}$$

$$R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 3), (4, 2), (4, 4)\}.$$

Apakah R relasi refleksif?

Maka: R bukan relasi refleksif,

Karena: $(2, 2)$ tidak termasuk dalam R

Jika $(2, 2)$ termasuk dalam R , yaitu:

$$R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 3), (4, 2), (4, 4)\}$$

Maka: R_1 merupakan relasi refleksif

e) Relasi Invers

Misalkan: R adalah relasi dari himpunan A ke B

Invers R dinyatakan dengan relasi B ke A yang memuat semua pasangan terurut jika dipertukarkan masih termuat dalam R .

$$\text{Dinotasikan: } R^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in R\}$$

Contoh 16: $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{x, y\}$

$R = \{(1, x), (1, y), (3, x)\}$ relasi dari A ke B

$R^{-1} = \{(x, 1), (y, 1), (x, 3)\}$ adalah relasi invers B ke A

5. Operasi Relasi pada Himpunan

Relasi merupakan himpunan pasangan terurut. Sehingga operasi aljabar pada himpunan berlaku juga pada relasi.

Misalkan: Jika R_1 dan R_2 merupakan relasi dari himpunan A ke B

Maka:

$$R_1 \cap R_2; R_1 \cup R_2; R_1 - R_2; R_1 \oplus R_2$$

Juga merupakan relasi dari A ke B

Contoh 17: Misalkan $A = \{a, b, c\}$ dan $B = \{a, b, c, d\}$

Relasi $R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$

Relasi $R_2 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d)\}$

Maka:

$$R_1 \cap R_2 = \{(a, a)\}$$

$$R_1 \cup R_2 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (a, d)\}$$

$$R_1 - R_2 = \{(b, b), (c, c)\}$$

$$R_2 - R_1 = \{(a, b), (a, c), (a, d)\}$$

$$R_1 \oplus R_2 = \{(b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (a, d)\}$$

Jika relasi R_1 dan R_2 dinyatakan bentuk matriks M_{R_1} dan M_{R_2} .

Maka matriks gabungan dan irisan relasi tersebut adalah:

$$M_{R_1 \cup R_2} = M_{R_1} \vee M_{R_2} \text{ dan } M_{R_1 \cap R_2} = M_{R_1} \wedge M_{R_2}$$

Contoh 18: Misalkan relasi R_1 dan R_2 dinyatakan dalam bentuk matriks berikut:

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka:

$$M_{R_1 \cup R_2} = M_{R_1} \vee M_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{R_1 \cap R_2} = M_{R_1} \wedge M_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Misalkan: R adalah relasi dari himpunan A ke B ,

T adalah relasi dari himpunan B ke C

Komposisi R dan S , dinotasikan dengan $T \circ R$ adalah relasi dari A ke C

$$T \circ R = \{(a, c) | a \in A, c \in C, \text{ dan } b \in B\}$$

Sehingga: $(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in S$

Contoh 19: Misalkan: $A = \{a, b, c\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, dan $C = \{s, t, u\}$

Relasi dari himpunan A ke B :

$$R = \{(a, 2), (a, 6), (b, 4), (c, 4), (c, 6), (c, 8)\}$$

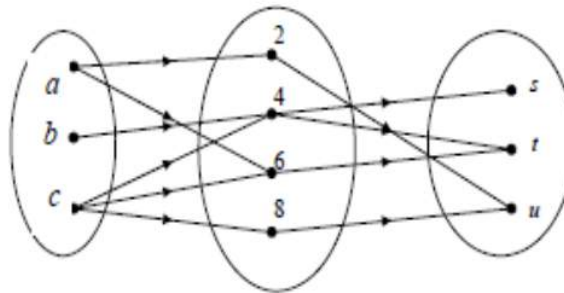
Relasi dari himpunan B ke C :

$$T = \{(2, u), (4, s), (4, t), (6, t), (8, u)\}$$

Komposisi R dan T adalah:

$$T \circ R = \{(a, u), (a, t), (b, s), (b, t), (c, s), (c, t), (c, u)\}$$

Berikut bentuk diagram panahnya.



Gambar 5.4 Relasi Tiga Himpunan

6. Relasi Ekuivalensi dan Terurut

Definisi 5.2 ² Sebuah relasi pada himpunan A , dinamakan

Relasi ekuivalen

“Jika relasi tersebut refleksif, simetri dan transitif”

Contoh 20: Misalkan R merupakan relasi pada sebuah Z ,
Dinyatakan:

¹⁰ $a R b$, jika dan hanya jika $a = b$ atau $a = -b$

Apakah relasi tersebut merupakan relasi ekuivalen?

Jawab: ➤ $a = b$

Jika $a R a$, untuk setiap $a \in Z$.

Jadi R merupakan relasi refleksif.

➤ Jika $a = \pm b$ dan $b = \pm c$

Akibatnya $a = \pm c$.

Jika $a R b$, maka $b R c$ sehingga $a R c$.

Jadi R merupakan relasi transitif.

➤ Jika $a = b$ atau $a = -b$

Maka $b = a$ atau $b = -a$.

Jika $a R b$, maka $b R a$.

Jadi R ² merupakan relasi simetri.

Dengan demikian R merupakan relasi ekuivalen

Contoh 21: Misalkan R merupakan relasi pada sebuah himpunan Riil,

Dinyatakan:

$a R b$, jika dan hanya jika $a - b \in \mathbb{Z}$

Apakah relasi tersebut merupakan relasi ekuivalen?

Jawab: ➤ Untuk setiap $a \in \mathbb{R}$

Maka: $a - a = 0 \in \text{bilangan bulat}$

Karena R bersifat refleksif.

➤ Misalkan: $a R b$

Maka: $(a - b) \in \mathbb{Z}$.

Jadi R bersifat simetri

➤ Jika $a R b$ dan $b R c$

Artinya $(a - b), (b - c) \in \mathbb{Z}$, Maka:

$(a - c) = (a - b) + (b - c)$ adalah bilangan bulat.

Karena $a R c$, Jadi R bersifat transitif.

Dengan demikian R merupakan relasi ekuivalen.

Misalkan: R adalah relasi ekuivalen pada himpunan A

Kelas ekuivalen dari a adalah relasi semua unsur himpunan dengan suatu unsur a di A .

Dinotasikan $[a]_R$.

Jika hanya ada satu relasi dinotasikan $[a]$

Contoh 22: Tentukan kelas ekuivalen 0, 1, -2, dan -3 pada relasi modul kongruen 4!

Jawab: $[0] = \{\dots, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, \dots\}$

$[1] = \{\dots, -11, -7, -3, 1, 5, 9, \dots\}$

$[-2] = \{\dots, -10, -6, -2, 2, 6, 10, \dots\}$

$[-3] = \{\dots, -11, -7, -3, 1, 5, 9, \dots\}$

Definisi 5.3 Sebuah relasi R pada himpunan S dikatakan

Relasi terurut parsial:

“Jika bersifat refleksif, antisimetri dan transitif”

Himpunan terurut parsial adalah sebuah himpunan S dengan sebuah relasi R yang terurut parsial (*partially ordering set – poset*), dinotasikan: (S, R)

Contoh 23: Tunjukkan bahwa relasi $' \leq '$ merupakan relasi terurut pada Z

Jawab:

Karena: $a \leq a$, untuk setiap $a \in Z$ Maka relasi $' \leq '$ bersifat refleksif
Jika $a \leq b$ dan $b \leq a$ berarti $a = a$ Jadi relasi $' \leq '$ bersifat antisimetri
Jika $a \leq b$ dan $b \leq c$ berarti $a \leq c$ Jadi relasi $' \leq '$ bersifat transitif.
Dengan demikian relasi $' \leq '$ merupakan relasi terurut pada Z .

5.2.2. Fungsi Pada Himpunan

1. Definisi Fungsi Pada Himpunan

Misalkan: A dan B merupakan himpunan

Suatu fungsi f dari A ke B merupakan sebuah aturan yang mengkaitkan satu (tepat satu) unsur di B untuk setiap unsur di A .
Dinotasikan $f(a) = b$.

Jika b merupakan unsur di B yang dikaitkan oleh f untuk suatu a di A . Artinya bahwa jika $f(a) = b$ dan $f(a) = c$
Maka $b = c$

Definisi 5.4 Jika f adalah fungsi dari himpunan A ke B , dituliskan:

$$f: A \rightarrow B$$

Artinya f memetakan himpunan A ke B

A adalah daerah asal (*domain*) dari f

B adalah daerah asal (*kodomain*) dari f

Sehingga: **fungsi** merupakan sebuah relasi yang memiliki aturan khusus.

Fungsi atau **pemetaan** dari himpunan A ke himpunan B adalah relasi yang memasangkan setiap anggota himpunan A dengan

hanya satu anggota himpunan B

Maka berlaku syarat berikut:

- (1) ¹ Setiap anggota A mempunyai pasangan
- (2) Setiap anggota A hanya dipasangkan dengan satu anggota B

Contoh 24: $A = \{a, b, c\}$ adalah domain dari f

$B = \{1, 2, 3\}$ adalah kodomain dari f

Range-nya adalah $\{1, 3\}$

Maka pasangan berurutan pada fungsi f ¹ adalah

$\{(a, 1), (b, 1), (c, 3)\}$

Misalkan: $f(a) = b$,

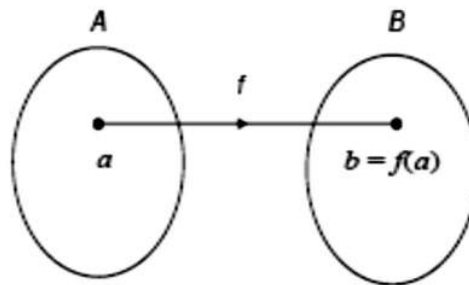
Maka:

b disebut bayangan (*image*) dari a

a disebut pra-bayangan (*pre-image*) dari b

Himpunan dari nilai pemetaan f disebut jelajah (*range*) dari f .

Perhatikan gambar jelajah dari f yaitu himpunan bagian (memungkinkan *proper subset*) dari B berikut.



Gambar 5.5 Fungsi atau Pemetaan

Contoh 25: Misalkan $f: \mathbb{R} \text{ (Riil)} \rightarrow \mathbb{R}$, didefinisikan: $f(x) = x^2$

Maka: ² Daerah asal dan daerah hasil dari f adalah himpunan bilangan Riil

Jelajah (*range*) dari f merupakan himpunan bilangan Riil tidak-negatif

Cara penyajian pada suatu fungsi:

- (1) Himpunan pasangan terurut

Misalkan:

fungsi kuadrat pada himpunan $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

Maka:

Dapat dituliskan dalam bentuk fungsi: $f = \{(2,4), (3,9)\}$

- (2) Formula pengisian nilai (*assignment*)

Misalkan: $f(x) = x^2 + 10$ dan $f(x) = 5x$

10

- (3) Kata-kata

Misalkan:

"f adalah fungsi yang memetakan jumlah bilangan bulat menjadi kuadratnya".

6

Contoh 26: Jika $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $B = \{u, v, w\}$

Tentukan relasi f dari A ke B

Jawab: Relasi dari A ke B adalah

$$f = \{(1, u), (2, v), (3, w)\}$$

merupakan bukan fungsi

Karena: elemen A tidak dipetakan semuanya ke B

2. Sifat-sifat Fungsi Pada Himpunan

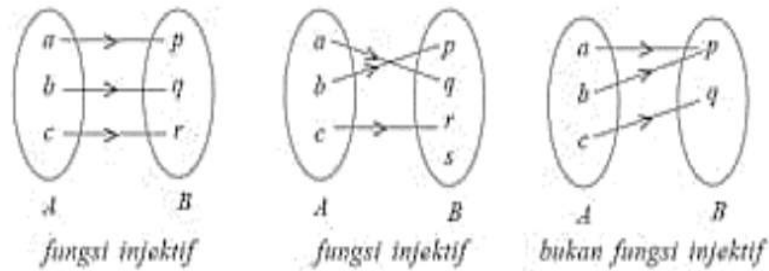
- a) Fungsi Injektif (satu-satu)

$f: A \rightarrow B, \forall b \in B$: Fungsi yang hanya mempunyai **satu kawan** saja di A

Jika dan hanya jika anggota **kodomain** hanya dipasangkan satu kali dengan anggota **domain**. Artinya anggota himpunan daerah kodomain boleh tidak memiliki pasangan, tetapi semua anggota kodomain yang terpasangkan hanya ada satu, tidak boleh ada yang lebih dari satu.

$f: x \rightarrow y$: Jika $x = y$,
 Maka: berakibat $f(x) = f(y)$.
 Jika $x \neq y$,
 Maka: berakibat $f(x) \neq f(y)$ atau ekuivalen

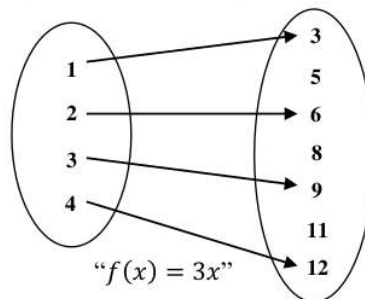
Perhatikan contoh gambar fungsi injektif berikut.



Gambar 5.6 Fungsi Injektif

Contoh 27: Diketahui: Domain = {1, 2, 3, 4} dan
 Kodomain = {3, 5, 6, 8, 9, 11, 12}
 Jika suatu fungsi injektif adalah $f(x) = 3x$.
 Tentukan range fungsi tersebut
 Jawab: Menggunakan tabel

Fungsi $f(x) = 3x$	
Domain	Range
1	3
2	6
3	9
4	12



b) Fungsi Surjektif (onto)

$f: A \rightarrow B, \forall b \in B$: Fungsi yang mempunyai kawan di A

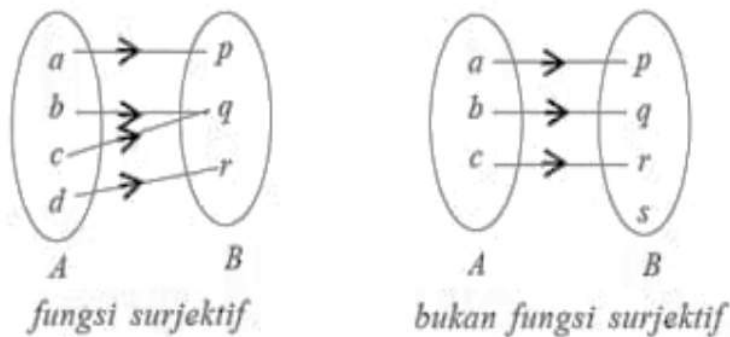
Jika anggota **kodomain** boleh mempunyai lebih dari satu pasangan, akan tetapi tidak dibolehkan ada anggota **kodomain** yang tidak dipasangkan.

Fungsi surjektif terpenuhi:

Jika jumlah anggota **kodomain** sama atau lebih banyak dari anggota **domain**

$f: x \rightarrow y$: Jika $f(x) = y$, artinya setiap anggota di y merupakan pemetaan sekurang-kurangnya satu anggota di x .

Perhatikan contoh gambar fungsi surjektif berikut



Gambar 5.7 Fungsi Surjektif

Contoh 28: Diketahui:

Domain = {Pulau Merah, Alas Purwo, Watu Ulo, Jatim Park}

Kodomain = {Banyuwangi, Jember, Malang}

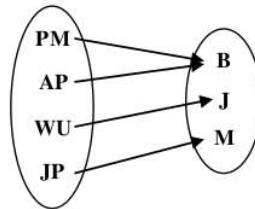
Jika suatu fungsi surjektif adalah

$$f: \text{wisata} \rightarrow \text{daerah}$$

Tentukan range fungsi tersebut

Jawab: Menggunakan tabel

Domain	Range
Pulau Merah (PM)	Banyuwangi (B)
Alas Purwo (AP)	Banyuwangi (B)
Watu Ulo (WU)	Jember (J)
Jatim Park (JP)	Malang (M)



c) Fungsi Bijektif

$f: A \rightarrow B$: Jika fungsi f merupakan fungsi surjektif dan injektif,

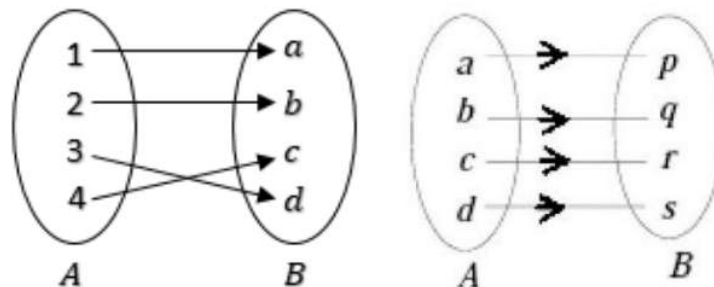
maka anggota **kodomain** sama dengan **range**

Semua anggota **domain** dan **kodomain** terpasangkan tepat satu.

Setiap anggota daerah **kodomain** hanya memiliki satu pasangan dengan daerah **domain**.

Kebalikan fungsi bijektif juga merupakan fungsi/pemetaan.

Perhatikan contoh gambar fungsi bijektif berikut.



Gambar 5.8 Fungsi Bijektif

3. ¹⁵Jenis-jenis Fungsi pada Himpunan

a) Fungsi Konstan (fungsi tetap)

$f: A \rightarrow B$: Jika untuk setiap anggota **domain** fungsi selalu berlaku:

$$f(x) = C, \text{ dimana } C \text{ bilangan konstan.}$$

Contoh 29: Diketahui:

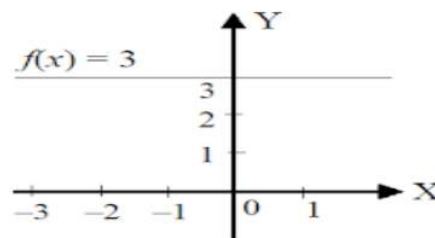
$$f: R \rightarrow R$$

Jika $f(x) = 3$, dengan daerah domain: $\{x | -3 \leq x < 2\}$.

Tentukan gambar grafiknya

Jawab: Menggunakan tabel

x	$f(x)$
-3	3
-2	3
-1	3
0	3
1	3



Gambar 5.9 Fungsi Konstan

b) Fungsi Linier

$f(x)$: Jika fungsi $f(x)$ ditentukan oleh: $f(x) = ax + b$.

dimana $a \neq 0$, a dan b bilangan konstan

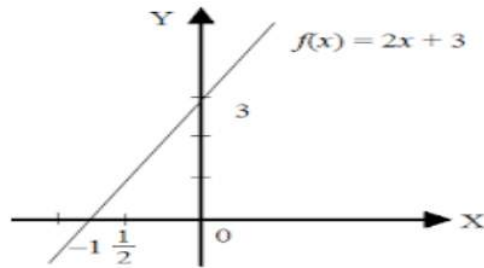
Grafik fungsi tersebut ¹⁵berupa garis lurus.

Contoh 30: Diketahui $f(x) = 2x + 3$

Tentukan gambar grafiknya

Jawab: Menggunakan tabel

x	$f(x)$
0	3
$-\frac{3}{2}$	0



Gambar 5.10 Fungsi Linier

c) Fungsi Kuadrat

$f(x)$: Jika fungsi $f(x)$ ditentukan oleh: $f(x) = ax^2 + bx + c$.

dimana $a \neq 0$, a, b, c bilangan konstan

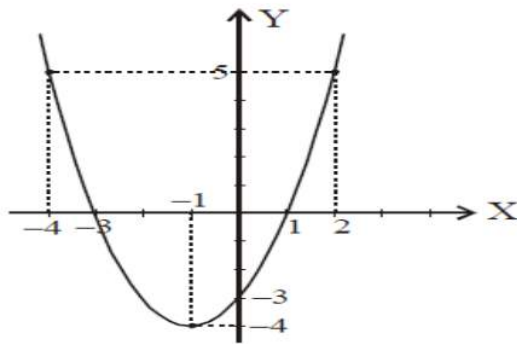
Grafik fungsi tersebut berupa parabola.

Contoh 31: Diketahui $f(x) = x^2 + 2x - 3$

Tentukan gambar grafiknya

Jawab: Menggunakan tabel

x	$f(x)$
-4	5
-3	0
-1	-4
0	-3
1	0
2	5



Gambar 5.11 Fungsi Kuadrat

d) Fungsi Identitas

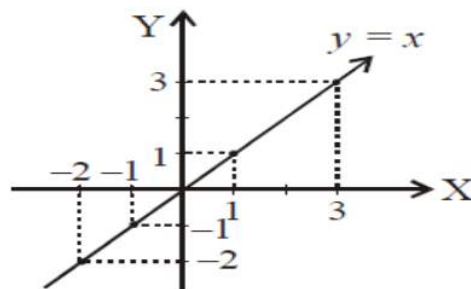
$f(x)$: Jika setiap anggota domain fungsi berlaku $f(x) = x$, atau
Setiap anggota **domain** fungsi dipetakan pada dirinya sendiri.
Grafik fungsi tersebut berupa garis lurus yang melalui titik asal dan
semua titik absis maupun ordinatnya sama.

Contoh 32: Suatu fungsi pada R didefinisikan sebagai
 $f(x) = x$, untuk setiap x

Tentukan $f(-2), f(0), f(1), f(3)$ dan gambar grafiknya

Jawab: Menggunakan tabel

x	$f(x) = x$
-2	-2
0	0
1	1
3	3



Gambar 5.12 Fungsi Identitas

e) **11** Fungsi Tangga

Suatu fungsi $f(x)$ disebut fungsi tangga, jika grafik fungsi $f(x)$ berupa interval-interval yang sejajar

Contoh 33:

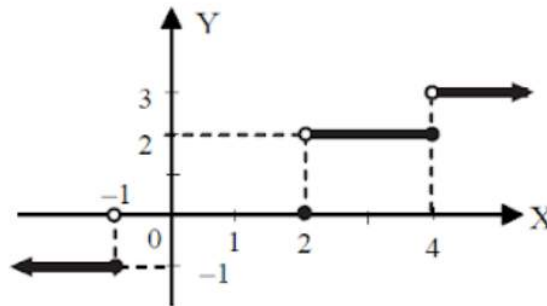
$$\text{Diketahui } f(x) = \begin{cases} -1 & \text{jika } x < -1 \\ 0 & \text{jika } -1 < x < 2 \\ 2 & \text{jika } 2 < x < 4 \\ 3 & \text{jika } x > 4 \end{cases}$$

15

Tentukan interval dari $f(-2), f(0), f(3), f(5)$ dan

Tentukan gambar grafiknya

Jawab: Jadi, Interval $f(-2) = -1, f(0) = 0, f(3) = 2, f(5) = 3$



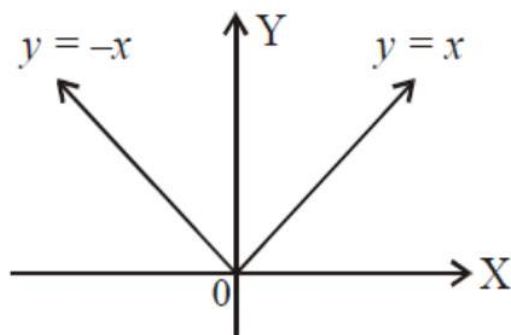
Gambar 5.13 Fungsi Tangga

f) **1** Fungsi Modulus

Suatu fungsi $f(x)$ disebut fungsi modulus (mutlak), jika fungsi tersebut dapat memetakan setiap bilangan real pada domain fungsi ke unsur nilai mutlaknya

Misalkan: Diketahui $f: x \rightarrow |x|$ atau $f: x \rightarrow |ax + b|$

$$\text{Dimana } f(x) = |x|, \text{ artinya } |x| = \begin{cases} x & \text{jika } x \geq 0 \\ -x & \text{jika } x < 0 \end{cases}$$



Gambar 5.14 Fungsi Modulus

g) Fungsi Ganjil dan Genap

Fungsi Ganjil: Jika berlaku $f(-x) = -f(x)$.

Fungsi Genap: Jika berlaku $f(-x) = f(x)$.

Jika $f(-x) \neq -f(x)$, maka fungsi ini tidak genap dan tidak ganjil.

Contoh 34: Diketahui:

$$f(x) = 2x^3 + x; f(x) = 3 \cos x - 5; f(x) = x^2 - 8x$$

Tentukan apakah fungsi $f(x)$ merupakan fungsi genap, fungsi ganjil, atau tidak keduanya

Jawab:

$$\begin{aligned} & \text{➤ } f(x) = 2x^3 + x \\ & f(-x) = 2(-x)^3 + (-x) = -(2x^3 + x) \\ & f(-x) = -f(x), \text{ Jadi, } f(x) \text{ fungsi ganjil} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{➤ } f(x) = 3 \cos x - 5 \\ & f(-x) = 3 \cos(-x) - 5 = 3 \cos x - 5 \\ & f(-x) = f(x), \text{ Jadi, } f(x) \text{ fungsi genap} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{➤ } f(x) = x^2 - 8x \\ & f(-x) = (-x)^2 - 8(-x) = x^2 + 8x \\ & f(-x) \neq -f(x) \text{ atau } f(-x) \neq f(x) \\ & \text{Jadi, } f(x) \text{ bukan fungsi ganjil maupun genap} \end{aligned}$$

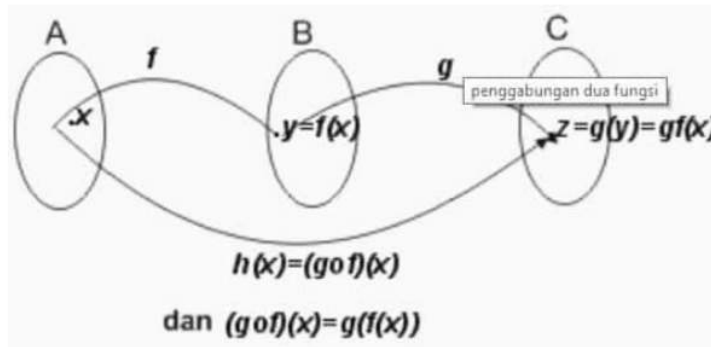
5.2.3. Fungsi Komposisi

Definisi Fungsi Komposisi

Fungsi komposisi merupakan operasi penggabungan dua jenis fungsi $f(x)$ dan $g(x)$, menghasilkan fungsi baru. Dinotasikan dengan “o” (komposisi / bundaran). Fungsi baru inilah yang dapat terbentuk dari $f(x)$ dan $g(x)$ yaitu:

- a) $(f \circ g)(x)$ artinya fungsi $g(x)$ dikomposisikan sebagai $f(x)$ atau g dimasukkan ke f
dibaca sebagai fungsi f bundaran g
- b) $(g \circ f)(x)$ Artinya fungsi $f(x)$ dikomposisikan sebagai $g(x)$ atau f dimasukkan ke g
dibaca sebagai fungsi g bundaran f

Agar dapat memahami fungsi komposisi, perhatikan gambar dibawah ini



Gambar 5.15 Komposisi Dua Fungsi

Berdasarkan gambar 5.15 diatas

Maka diperoleh:

$$f: A \rightarrow B \quad \text{ditentukan dengan rumus } y = f(x)$$

$$g: B \rightarrow C \quad \text{ditentukan dengan rumus } y = g(x)$$

Sehingga diperoleh hasil fungsi f dan g berikut:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \qquad (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$$

Sifat – Sifat Fungsi Komposisi

Jika $f: A \rightarrow B$; $g: B \rightarrow C$; $h: C \rightarrow D$

Maka berlaku:

- (1) Tidak bersifat Komutatif $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$
- (2) Bersifat Asosiatif $((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ (g \circ h))(x)$
- (3) Bersifat Identitas $(f \circ I)(x) = (I \circ f)(x) = f(x)$ atau $I(x) = x$

Contoh 35: Jika $f(x) = 2x + 3$

dan $(f \circ g)(x) = 2x^2 + 6x - 7$

Tentukan fungsi $g(x)$

Jawab: Karena $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2x^2 + 6x - 7$

Maka:

$$2(g(x)) + 3 = 2x^2 + 6x - 7$$

$$2(g(x)) = 2x^2 + 6x - 10$$

$$g(x) = x^2 + 3x - 5$$

Contoh 36: Jika $f(x) = \frac{x}{x-1}, x \neq 1$

dan $g(x) = f(x^2 + 1)$

Tentukan nilai $g(f(x))$

Jawab: $g(x) = f(x^2 + 1)$

$$g(x) = \frac{x^2+1}{x^2+1-1} = \frac{x^2+1}{x^2} = 1 + \frac{1}{x^2}$$

Maka:

$$g(f(x)) = 1 + \frac{1}{(f(x))^2}$$

$$g(f(x)) = 1 + \frac{1}{\left(\frac{x}{x-1}\right)^2} = 1 + \left(\frac{x-1}{x}\right)^2 = 1 + \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2}$$

$$g(f(x)) = 2 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$$

5.2.4. Fungsi Invers

Fungsi invers merupakan sebuah fungsi berkebalikan dari fungsi asalnya.

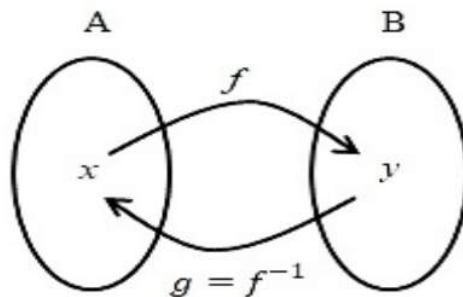
Jika fungsi $f: A \rightarrow B$ memiliki relasi dengan fungsi $g: B \rightarrow A$

Maka fungsi g merupakan invers dari f .

Dituliskan f^{-1} atau $g = f^{-1}$

Jika f^{-1} dalam bentuk fungsi, maka f^{-1} disebut fungsi invers.

Perhatikan gambar fungsi invers berikut



Gambar 5.16 Fungsi Invers

Untuk menentukan invers suatu fungsi $y = f(x)$, maka dapat dilakukan dengan mengubah persamaan $y = f(x)$ ke bentuk $x = f(y)$.

- (1) Gantilah x dengan $f^{-1}(y)$, sehingga $f(y) = f^{-1}(y)$
- (2) Gantilah y dengan x , sehingga diperoleh f^{-1} .

Misalnya: ¹ f sebuah fungsi dari himpunan A ke B

g sebuah fungsi dari himpunan B ke A

Sehingga:

$g(f(a)) = a$ dan $f(f(b)) = b$, untuk $\forall a \in A, b \in B$.

Maka:

g adalah invers fungsi dari f ditulis f^{-1} .

“fungsi $f(x)$ memiliki invers, jika $f(x)$ fungsi bijektif”

dan

“sebuah fungsi jika dikomposisikan dengan inversnya, maka menghasilkan fungsi identitas”

Identitas merupakan suatu bilangan jika dioperasikan bilangan lain menghasilkan suatu bilangan tersebut. Operasi perkalian identitas menghasilkan 1 dan penjumlahan menghasilkan 0.

Contoh 37: Diketahui $f: A \rightarrow B$ merupakan pasangan berurutan yaitu

$$f = \{(1,3), (2,4), (5,7)\}$$

Tentukan f^{-1} .

Jawab: Karena: jika $f: A \rightarrow B$

Maka: $f^{-1}: B \rightarrow A$ (definisi)

Sehingga: $f^{-1} = \{(3,1), (4,2), (7,5)\}$

Contoh 38: Tentukan invers dari $x^2 - 2x + 4$

Jawab: Diketahui bahwa $y = x^2 - 2x + 4$

Maka: $y = (x - 1)^2 + 3$

Sehingga: $(x - 1)^2 = y - 3$

$$(x - 1) = \pm\sqrt{y - 3}$$

$$x = 1 \pm \sqrt{y - 3}$$

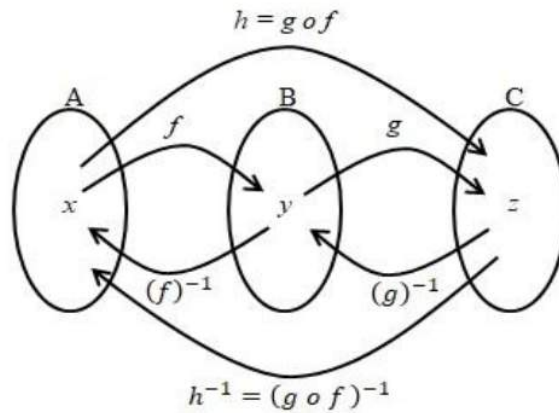
Dengan demikian inversnya adalah: $f^{-1}(x) = 1 \pm \sqrt{y - 3}$ dan

bukan merupakan fungsi karena memiliki dua nilai

Tabel 5. Rumus Fungsi Invers

Jenis Fungsi	Bentuk Fungsi	Fungsi Invers
Fungsi Linier	$f(x) = ax + b$	$f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$
Fungsi Pecahan Linier	$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$	$f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$
Fungsi Irasional	$f(x) = \sqrt[n]{ax+b}$	$f^{-1}(x) = \frac{x^n-b}{a}$
Fungsi Eksponen	$f(x) = a^x$	$f^{-1}(x) = {}^a\log x$
Fungsi Logaritma	$f(x) = {}^a\log x$	$f^{-1}(x) = a^x$

Perhatikan gambar invers dari fungsi komposisi berikut



Gambar 5.17 Komposisi Dua Fungsi dan Invers Fungsinya

Berdasarkan gambar invers fungsi komposisi, maka terdapat dua relasi suatu fungsi dari himpunan $A \rightarrow B \rightarrow C$.

Dimana: $f: A \rightarrow B$ dan $g: B \rightarrow C$.

Sehingga fungsi komposisinya adalah: $h = g \circ f$.

Maka invers fungsi komposisinya adalah: $h^{-1} = (g \circ f)^{-1}$.

Contoh 39: Jika $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = 3x - 5$, dan $h(x) = x + 1$

Maka:

$$f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}, g^{-1}(x) = \frac{x+5}{3}, h^{-1}(x) = x - 1$$

Jawab:

$$(1) (g \circ f)^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g^{-1})(x) = f^{-1}(g^{-1}(x))$$

$$(g \circ f)^{-1}(x) = \frac{(g^{-1}(x)) - 3}{2} = \frac{\frac{x+5}{3} - 3}{2}$$

$$(g \circ f)^{-1}(x) = \frac{\frac{x-4}{3}}{2} = \frac{2x-8}{3}$$

$$(2) (f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x) = g^{-1}(f^{-1}(x))$$

$$(f \circ g)^{-1}(x) = \frac{\frac{x-3}{2} + 5}{3} = \frac{\frac{x+7}{2}}{3} = \frac{3x+21}{2}$$

$$(3) (h \circ g \circ f)^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g^{-1} \circ h^{-1})(x)$$

$$(h \circ g \circ f)^{-1}(x) = f^{-1}(g^{-1}(h^{-1}(x)))$$

$$(h \circ g \circ f)^{-1}(x) = f^{-1}\left(\frac{x+4}{3}\right) = \left(\frac{\left(\frac{x+4}{3}\right)-3}{2}\right)$$

$$(h \circ g \circ f)^{-1}(x) = \left(\frac{\left(\frac{x-5}{3}\right)}{2}\right) = \frac{2x-10}{3}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad (f \circ g \circ h)^{-1}(x) &= (h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1})(x) \\ (f \circ g \circ h)^{-1}(x) &= h^{-1}(g^{-1}(f^{-1}(x))) \\ (f \circ g \circ h)^{-1}(x) &= h^{-1}\left(\frac{3x+21}{2}\right) = \left(\frac{3x+21}{2}\right) - 1 \\ (f \circ g \circ h)^{-1}(x) &= \frac{3x+19}{2} \end{aligned}$$

Sehingga rumusan invers operasi komposisi adalah:

- (1) Jika diketahui: $g(x)$ dan $(f \circ g)(x)$ atau $(g \circ f)(x)$
Maka: $(f \circ g \circ g^{-1})(x) = (g^{-1} \circ g \circ f)(x) = f(x)$
- (2) Jika diketahui: $f(x)$ dan $(f \circ g)(x)$ atau $(g \circ f)(x)$
Maka: $(f^{-1} \circ f \circ g)(x) = (g \circ f \circ f^{-1})(x) = g(x)$
- (3) Jika diketahui: $f(x)$, $g(x)$ dan $(f \circ g \circ h)(x)$
Maka: $(f \circ g)^{-1}((f \circ g \circ h)(x))$
- (4) Jika diketahui: $f(x)$, $h(x)$ dan $(f \circ g \circ h)(x)$
Maka: $f^{-1}((f \circ g \circ h)(h^{-1}(x)))$

5.3. Rangkuman

Relasi A dan B merupakan berupa pasangan terurut dengan mengikuti aturan tertentu (relasi biner). Sifat relasi mencakup refleksif, simetrik, anti simetrik, transitif, irefleksif (kesetaraan). Jenis relasi meliputi refleksif, simetrik, anti simetrik, transitif, dan relasi invers. Sebuah relasi ekuivalen, jika relasi tersebut refleksif, simetri dan transitif. Sedangkan sebuah relasi terurut parsial, jika bersifat refleksif, antisimetri dan transitif. Himpunan terurut parsial tersebut dinotasikan (S, R) .

Fungsi merupakan sebuah relasi yang memiliki aturan khusus, artinya memasangkan hanya satu anggota ke himpunan lain. Penyajian fungsi dapat melalui himpunan pasangan terurut, formula pengisian nilai, maupun dengan kata-kata. Sifat-sifat dari fungsi meliputi: injektif, surjektif, bijektif. Suatu fungsi dari himpunan A ke B dapat dinotasikan $f: A \rightarrow B$. Dimana A sebagai daerah domain, B sebagai daerah kodomain

Fungsi komposisi merupakan operasi penggabungan dua jenis fungsi $f(x)$ dan $g(x)$, menghasilkan fungsi baru. Fungsi invers merupakan sebuah fungsi berkebalikan dari fungsi asalnya. Untuk menentukan invers suatu fungsi $y = f(x)$, dapat dilakukan dengan mengubah persamaan $y = f(x)$ ke bentuk $x = f(y)$. Fungsi $f(x)$ memiliki invers, jika $f(x)$ fungsi bijektif.

5.4. Referensi

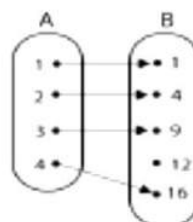
1. Kunen, K. 2011. *Set Theory*. UK: King College London
2. Pinter, C. C. 2014. *Set Theory*. South Korea: Kyung Moon Publishers
3. Weiss, W. A. R. 2008. *An Introduction to Set Theory*. USA: Toronto University
4. Smith, J. T. 2008. *Basic Set Theory*. San Francisco State University

5.5. Latihan

Soal Formatif 4:

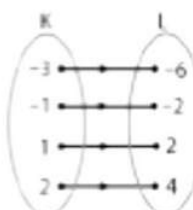
1. Daerah hasil dari relasi pada gambar disamping adalah ...

- A. $\{1, 2, 3, 4\}$
 B. $\{1, 4, 9, 16\}$
 C. $\{1, 4, 9, 12, 16\}$
 D. $\{1, 2, 3, 4, 9, 12, 16\}$



2. Relasi yang tepat dari himpunan K ke L adalah ...

- A. "Dua kali dari"
 B. "Setengah dari"
 C. "Satu kurangnya dari"
 D. "Kurang dari"



3. Jika $K = \{3, 4, 5\}$ dan $L = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, himpunan pasangan berurutan relasi "dua lebihnya dari" himpunan K ke L adalah ...

- A. $\{(3, 5), (4, 6)\}$
 B. $\{(3, 5), (4, 6), (5, 7)\}$
 C. $\{(3, 1), (4, 2), (5, 3)\}$
 D. $\{(3, 2), (4, 2), (5, 2)\}$

4. Range pasangan berurutan $\{(2, 1), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (6, 4)\}$ adalah

- A. $\{1, 2, 4, 5\}$
 B. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
 C. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
 D. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

5. Dari himpunan pasangan berurutan berikut ini:

- I. $\{(1, 2), (2, 2), (3, 3)\}$ III. $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$
 II. $\{(1, 2), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$ IV. $\{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (2, 4)\}$

Yang merupakan pemetaan adalah ...

- A. IV C. II
 B. III D. I

6. Diketahui:
 $A = \{\text{faktor dari } 10\}$ dan $B = \{\text{faktor prima dari } 30\}$.
Banyak semua pemetaan yang mungkin dari himpunan A ke B adalah
A. 81
B. 64
C. 16
D. 8
7. $K = \{\text{faktor dari } 8\}$ dan $L = \{\text{bilangan prima yang kurang dari } 7\}$.
Banyak semua pemetaan yang mungkin dari himpunan K ke L adalah
A. 100
B. 81
C. 64
D. 16
8. Diketahui: himpunan $A = \{\text{Jakarta, Bangkok, Tokyo, Manila}\}$ dan $B = \{\text{Indonesia, Jepang, Thailand, Filipina, Malaysia}\}$. Relasi dari A ke B dapat dinyatakan dengan ...
A. Ibukota dari
B. Negara dari
C. Asal dari
D. Kampung dari
9. Diketahui $P = \{2, 4, 6\}$ dan $Q = \{2, 3\}$. Himpunan pasangan berurutan dari P ke Q yang menyatakan "kelipatan dari" adalah ...
A. $\{(2, 2), (4, 2), (4, 4), (6, 2), (6, 3)\}$
B. $\{(2, 2), (2, 3), (4, 2), (6, 2), (6, 3)\}$
C. $\{(2, 3), (4, 2), (4, 3), (6, 2), (6, 3)\}$
D. $\{(2, 2), (4, 2), (4, 3), (6, 2), (6, 3)\}$
10. Jika $A = \{1, 3, 5\}$ dan $B = \{2, 4\}$, maka $A \times B$ adalah ...
A. $\{(1, 2), (1, 4), (3, 2), (3, 4), (5, 2), (5, 4)\}$
B. $\{(1, 2), (1, 4), (3, 4), (5, 2), (5, 4)\}$
C. $\{(1, 2), (1, 4), (3, 2), (3, 4)\}$
D. $\{(1, 2), (1, 4), (3, 2), (3, 4), (5, 4)\}$

Soal Uraian 4:

1. Diketahui $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan $B = \{2, 4, 6, 8, 12\}$. Tentukan:
 - a) Relasi "setengah dari" himpunan A ke B
 - b) Relasi "kuadrat dari" himpunan B ke A
 - c) Relasi "lebih dari" himpunan A ke B
2. Tentukan sifat relasi apabila A himpunan bilangan bulat positif dan relasinya adalah "x habis membagi y".
3. Relasi antara dua himpunan M dan N dinyatakan dengan himpunan pasangan berurutan $\{(1,4), (2,5), (3,6), (4,7), (5,8)\}$. Relasi apakah yang menyatakan hubungan antara himpunan M dengan N ?
4. Relasi antara dua himpunan K dan L dinyatakan dengan himpunan pasangan berurutan $\{(2,8), (3,12), (4,16), (5,20), (6,24)\}$. Relasi apakah yang menyatakan hubungan antara himpunan K dengan L ?
5. Jika $W = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tentukan pasangan terurut berdasarkan sifat berikut.
 - a) Refleksif
 - b) Simetrik
 - c) Antisimetrik
 - d) Transitif

Soal Formatif 5:

- Himpunan pasangan berurutan berikut merupakan fungsi adalah
 - $\{(2, a), (3, b), (4, a), (5, c)\}$
 - $\{(a, 2), (a, 3), (a, 4), (a, 5)\}$
 - $\{(x, 2), (x, 3), (y, 4), (y, 5)\}$
 - $\{(2, a), (3, b), (4, c), (4, d)\}$
- Himpunan pasangan berurutan berikut merupakan bukan fungsi adalah
 - $\{(a, 1), (b, 2), (c, 1), (d, 2)\}$
 - $\{(p, 1), (q, 2), (r, 3), (r, 4)\}$
 - $\{(5, 8), (6, 8), (7, 9), (8, 9)\}$
 - $\{(1, 2), (3, 2), (5, 2), (7, 2)\}$
- Suatu fungsi $f(x) = 5 - 3x$, nilai dari $f(-2)$ adalah ...
 - 1
 - 2
 - 7
 - 11
- Diketahui $f: x \rightarrow -5x + 2$. Nilai untuk $x = 4$ adalah ...
 - 20
 - 18
 - 18
 - 22
- Jika $f(x) = 3x + 2$ dan $f(a) = -10$, nilai a adalah ...
 - 3
 - 1
 - 3
 - 4
- Jika $f(x) = ax + b$, $f(3) = 5$ dan $f(7) = 13$, maka $f(10) = ...$
 - 19
 - 17
 - 15
 - 11
- Jika $A = \{\text{faktor dari } 2\}$ dan $B = \{\text{huruf vokal}\}$, banyaknya pemetaan dari A ke B adalah ...
 - 50
 - 32
 - 25
 - 10
- Diketahui $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $B = \{a, b, c, d\}$. Banyaknya korespondensi satu-satu yang mungkin dari A ke B adalah ...
 - 4
 - 8
 - 16
 - 24

9. Suatu fungsi $g(x) = px + 5$. Jika $g(3) = -1$, maka nilai p adalah ...
 A. 3
 B. 2
 C. -2
 D. -3
10. Ditentukan fungsi $f(x) = x + 2$, daerah asal $\{x \mid -2 \leq x < 3, x \in \mathbb{Z}\}$. Daerah hasil fungsi tersebut adalah ...
 A. $\{0, 1, 2, 3, 4\}$
 B. $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
 C. $\{4, 3, 2, 1, 0, -1\}$
 D. $\{5, 4, 3, 2, 1\}$

Soal Uraian 5:

1. Tentukanlah domain dan range fungsi $f(x) = x^2 + 3$, jika $x \in B$ dan $B = \{x \mid -3 < x \leq 2\}$.
2. Diketahui: $A = \{2, 3, 4\}$; $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; jika ditentukan fungsi $f: A \rightarrow B$ maka $f(x) = 2x - 2$. Tentukanlah range fungsi f .
3. Diketahui $f(x) = ax + b$. Jika $f(-4) = -3$ dan $f(2) = 9$. Tentukan:
 - a) Nilai a dan b ,
 - b) Rumus fungsinya
 - c) Nilai fungsi untuk $x = 3, 5, 6$.
4. Diketahui $f(x) = ax + b$. Jika $f(2) = 1$ dan $f(-1) = -5$. Tentukan:
 - a) Nilai a dan b ,
 - b) Rumus fungsinya
 - c) Nilai fungsi untuk $x = 3, 4, 5$
5. Biaya untuk pemeliharaan ikan lele sampai masa panen dinyatakan dengan fungsi $f(x) = 1.000x + 150.000$, dengan x adalah banyaknya ikan lele yang dipelihara. Rata-rata hasil panennya, setiap 1 kg terdiri dari 4 ikan lele dan dijual dengan harga Rp. 6.000,00. Perolehan laba setiap kali panen jika dipelihara 5.000 ekor adalah ...
6. Proses pembuatan kertas berbahan pelepah pohon pisang dilakukan melalui dua tahap.
Tahap I: $f(x) = 0,8x - 1$ dan tahap II: $g(x) = 0,6x - 2$ dengan x menyatakan banyak pelepah pisang dalam satuan ton. Jika tersedia 100 ton pelepah pisang, banyak kertas yang dihasilkan adalah ...

Soal Formatif 6:

1. Diketahui fungsi $f(x) = 2x + 3$ dan $g(x) = x^2 - 2x + 4$. Komposisi fungsi $(g \circ f)(x)$ adalah ...
A. $2x^2 - 4x + 5$ C. $4x^2 + 8x + 7$
B. $2x^2 - 4x - 11$ D. $4x^2 - 4x + 19$
2. Diketahui $f(x) = 2x + 5$ dan $g(x) = \frac{x-1}{x+4}, x \neq -4$, maka nilai $(f \circ g)(x)$ adalah ...
A. $\frac{7x-2}{x+4}, x \neq -4$ C. $\frac{2x+2}{x+4}, x \neq -4$
B. $\frac{2x+3}{x+4}, x \neq -4$ D. $\frac{7x+18}{x+4}, x \neq -4$
3. Diketahui fungsi $f(x) = 3x - 1$ dan $g(x) = 2x^2 + 3$. Nilai dari komposisi fungsi $(g \circ f)(1)$ adalah ...
A. 7 C. 11
B. 9 D. 14
4. Jika $g(x) = x + 1$ dan $(f \circ g)(x) = x^2 + 3x + 1$. Maka $f(x) = \dots$
A. $x^2 + 5x + 5$ C. $x^2 + 4x + 3$
B. $x^2 + x - 1$ D. $x^2 + 6x + 1$
5. Diketahui $f(x) = x^2 + 4x$ dan $g(x) = -2 + \sqrt{x+4}$, dengan $x \geq -4$ dan $x \in \mathbb{R}$. Fungsi komposisi $(g \circ f)(x)$ adalah ...
A. $2x - 4$ C. $x + 2$
B. $x - 2$ D. x
6. Diketahui $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dan $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, didefinisikan $f(x) = x^3 + 4x$ dan $g(x) = 2 \sin x$. Nilai $(f \circ g)(-\frac{1}{2}\pi)$ adalah ...
A. -4 C. 3
B. 2 D. 6
7. Diketahui $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dan $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, didefinisikan dengan:
 $(g \circ f)(x) = 2x^2 + 4x + 5$ dan $g(x) = 2x + 3$. Maka $f(x)$ adalah
A. $x^2 + 2x + 1$ C. $2x^2 + x + 2$
B. $x^2 + 2x + 2$ D. $2x^2 + 4x + 2$

8. Diketahui $f: x \rightarrow x + 2$ dan $h: x \rightarrow x^2 - 2$.
Jika $(f \circ g \circ h)(x) = 2x^2 + 4$ maka $g(x)$ adalah ...
A. $2x + 3$ C. $2x + 9$
B. $2x + 6$ D. $x + 5$
9. Diketahui $f(x) = \frac{7x+5}{3x-4}$, $x \neq \frac{4}{3}$. Maka $f^{-1}(x)$ adalah ...
A. $\frac{4x+5}{3x-7}, x \neq \frac{7}{3}$ C. $\frac{5x+7}{4x-3}, x \neq \frac{3}{4}$
B. $\frac{7x+5}{3x+4}, x \neq -\frac{4}{3}$ D. $\frac{7x+4}{3x-5}, x \neq \frac{5}{3}$
10. Diketahui $f(x) = \frac{1}{x+2}$. jika $f^{-1}(x) = -4$, maka nilai x adalah ...
A. -2 C. $-\frac{1}{2}$
B. 2 D. -3
11. Diketahui $f(x) = x + 4$ dan $g(x) = 2x$, maka $(f \circ g)^{-1}(x)$ adalah
A. $2x + 8$ C. $\frac{1}{2}x - 8$
B. $2x + 4$ D. $\frac{1}{2}x - 2$
12. Diketahui $f(x) = \frac{2-3x}{2}$, Maka $f^{-1}(x)$ adalah ...
A. $\frac{2(1+x)}{3}$ C. $\frac{3(1+x)}{2}$
B. $\frac{2(1-x)}{3}$ D. $-\frac{3(1+x)}{2}$
13. Fungsi f ditentukan dengan $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}, x \neq 3$.
Jika f^{-1} adalah invers f . Maka $f^{-1}(x+1)$ adalah ...
A. $\frac{3x-1}{x-2}, x \neq 2$ C. $\frac{3x+4}{x-2}, x \neq 2$
B. $\frac{3x+2}{x+1}, x \neq -1$ D. $\frac{3x+4}{x-1}, x \neq 1$
14. Fungsi f ditentukan dengan $f(x) = \frac{x-1}{2-x}, x \neq 2$.
Jika f^{-1} adalah invers f . Maka $f^{-1}(x+1)$ adalah ...
A. $-\frac{1}{x+1}, x \neq -1$ C. $\frac{x+1}{x+2}, x \neq -2$
B. $\frac{x}{x+1}, x \neq -1$ D. $\frac{x-1}{x-2}, x \neq 2$

15. Diketahui $f(x) = \frac{4x+5}{x+3}, x \neq -3$. Jika f^{-1} adalah invers f . Maka $f^{-1}(x)$ adalah ...
- A. $\frac{-3x-5}{x+4}, x \neq -4$ C. $\frac{3x+5}{x-4}, x \neq 4$
 B. $\frac{-3x+5}{x-4}, x \neq 4$ D. $\frac{3x-5}{x+4}, x \neq -4$
16. Jika $(f \circ g)(x) = 4x^2 + 8x - 3$ dan $g(x) = 2x + 4$. Maka $f^{-1}(x)$ adalah ...
- A. $x + 9$ C. $x^2 - 4x - 3$
 B. $2 + \sqrt{x}$ D. $2 + \sqrt{x+7}$
17. Jika $(f \circ g)(x) = 2\sqrt{x-1}$ dan $f(x) = \sqrt{x+1}$. Maka $g(x) = \dots$
- A. $2x - 1$ C. $4x - 5$
 B. $2x - 3$ D. $4x - 3$
18. Diketahui $f: R \rightarrow R$ dan $g: R \rightarrow R$, didefinisikan dengan:
 $f(x) = 2x + 5$ dan $g(x) = x + 2$. Maka $(f \circ g)^{-1}(x)$ adalah ...
- A. $\frac{x-9}{9}$ C. $\frac{x+9}{2}$
 B. $x - 9$ D. $\frac{x-9}{2}$
19. Diketahui $g: R \rightarrow R$, didefinisikan dengan: $f(x) = \frac{1-x}{x}, x \neq 0$, jika
 $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2x + 1$. Maka fungsi $g^{-1}(x)$ adalah ...
- A. $\frac{x-3}{x+1}$ C. $\frac{x+1}{x-3}$
 B. $\frac{x-3}{x-1}$ D. $\frac{-x+3}{x-1}$
20. Diketahui $(g \circ f)(x) = \frac{x}{x-1}, x \neq 1$ dan $f(x) = 2x + 1$. Maka fungsi $g^{-1}(x)$ adalah ...
- A. $\frac{3x-1}{x-1}, x \neq 1$ C. $\frac{x-1}{x+1}, x \neq -1$
 B. $\frac{2x+1}{2x}, x \neq 0$ D. $\frac{3x+1}{x-2}, x \neq 2$

Soal Uraian 6:

1. Diketahui fungsi $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-2x+1}{16}}$, maka definisi $f(x)$ adalah ...
2. Diketahui $f(x) = 4x^2 + 8x - 3$, $g(x) = x + 2$ dan $h(x) = -3x + 2$.
Tentukan:
 - a) $(f \circ g)(x)$ dan $(f \circ g)^{-1}(x)$
 - b) $(g \circ h)(x)$ dan $(g \circ h)^{-1}(x)$
 - c) $(f \circ g \circ h)(x)$ dan $(f \circ g \circ h)^{-1}(x)$
 - d) Nilai fungsi $(f \circ g \circ h)^{-1}(x)$, jika $x = -3$
3. Diketahui $f(x) = {}^5\log x$ dan $g(x) = \frac{x+3}{3x-4}$. Tentukan:
 - a) $(f \circ g)(x)$ dan $(f \circ g)^{-1}(x)$
 - b) $(g \circ f)(x)$ dan $(g \circ f)^{-1}(x)$
 - c) Nilai fungsi $(f \circ g)^{-1}(x)$, jika $x = -5$
 - d) Nilai fungsi $(g \circ f)^{-1}(x)$, jika $x = 4$
4. Diketahui $(f \circ g)(x) = 4x^2 + 8x - 3$, jika $g(x) = 2x + 4$ dan $h(x) = x + 2$. Tentukan:
 - a) $f^{-1}(x)$; $g^{-1}(x)$; $h^{-1}(x)$
 - b) $(f \circ g)^{-1}(x)$ dan $(g \circ f)^{-1}(x)$
 - c) $(f \circ g \circ h)^{-1}(x)$
 - d) Nilai fungsi $(f \circ g \circ h)^{-1}(x)$, jika $x = \frac{1}{2}$
5. Jika $f(x) = \frac{1}{x-1}$ dan $g(x) = x - 3$. Tentukan:
 - a) $(f \circ g)^{-1}(x)$ dan nilai fungsi $(f \circ g)^{-1}(-\frac{1}{3})$
 - b) $(g \circ f)^{-1}(x)$ dan nilai fungsi $(g \circ f)^{-1}(\frac{1}{2})$
 - c) Fungsi $(f \circ g \circ h)(x)$, jika $h(x) = x + 2$
 - d) Nilai fungsi $(f \circ g \circ h)^{-1}(x)$, jika $x = -3$

5.6. Kunci Jawaban

Kunci Soal Formatif 4

- | | |
|------|-------|
| 1. B | 6. D |
| 2. B | 7. A |
| 3. B | 8. A |
| 4. A | 9. A |
| 5. B | 10. C |

Kunci Soal Formatif 5

- | | |
|------|-------|
| 1. A | 6. A |
| 2. B | 7. B |
| 3. D | 8. A |
| 4. B | 9. A |
| 5. D | 10. A |

Kunci Soal Formatif 6

- | | |
|-------|-------|
| 1. C | 11. D |
| 2. D | 12. A |
| 3. C | 13. D |
| 4. B | 14. A |
| 5. D | 15. B |
| 6. A | 16. D |
| 7. A | 17. C |
| 8. B | 18. D |
| 9. A | 19. D |
| 10. C | 20. A |

Periksalah jawaban yang anda miliki dengan kunci jawaban formatif 4, 5, 6²¹ diatas. Hitunglah jawaban yang benar untuk mengetahui tingkat penguasaan anda.

Skor	Keterangan
90 – 100	Baik sekali
80 – 89	Baik
70 – 79	Cukup
< 70	Kurang

Jika mencapai tingkat penguasaan di bawah 80 diharapkam untuk mempelajari kembali bagian materi yang dianggap belum dikuasai

PROFIL PENULIS



Dr. Fatqurhohman, M. Pd lahir di Banyuwangi-Jawa Timur pada tanggal 11 Februari 1986.

Pendidikan:

S1-Pendidikan Matematika di Universitas Jember,

S2-Pendidikan Matematika di Universitas Negeri Malang

S3-Pendidikan Matematika di Universitas Negeri Malang.

Aktivitas yang dilakukan selama ini menjadi salah satu dosen PTS di Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Muhammadiyah Jember.

Buku1

ORIGINALITY REPORT

22%

SIMILARITY INDEX

23%

INTERNET SOURCES

7%

PUBLICATIONS

4%

STUDENT PAPERS

PRIMARY SOURCES

1

www.scribd.com

Internet Source

3%

2

fr.scribd.com

Internet Source

2%

3

publikasi.stkipsiliwangi.ac.id

Internet Source

2%

4

file.upi.edu

Internet Source

1%

5

alverrocker.wordpress.com

Internet Source

1%

6

eprints.unram.ac.id

Internet Source

1%

7

www.slideshare.net

Internet Source

1%

8

Paula, Yundari, Fransiskus Fran. "ALJABAR NONASOSIATIF DAN NONKOMUTATIF TERKAIT MUTASI", Bimaster : Buletin Ilmiah Matematika, Statistika dan Terapannya, 2020

Publication

1%

9	216.125.212.253 Internet Source	1 %
10	docobook.com Internet Source	1 %
11	syafiraheraezra.blogspot.com Internet Source	1 %
12	wwwblogkerenbanget.blogspot.com Internet Source	1 %
13	es.scribd.com Internet Source	1 %
14	tianiseps22.blogspot.com Internet Source	1 %
15	makalahmatematika203.blogspot.com Internet Source	1 %
16	thefilmschool.com Internet Source	1 %
17	repositories.kemdikbud.go.id Internet Source	1 %
18	ourdiary02.blogspot.com Internet Source	1 %
19	raditeowarma.students-blog.undip.ac.id Internet Source	1 %
20	documents.mx Internet Source	1 %

Exclude quotes Off

Exclude matches < 1%

Exclude bibliography On