FATQURHOHMAN

Turnitin_Geometri Transformasi Teori dan Implementasinya 2022.pdf

Universitas Muhammadiyah Jember

Document Details

Submission ID

trn:oid:::17800:79965464

Submission Date

Jan 23, 2025, 8:40 PM GMT+7

Download Date

Jan 23, 2025, 8:46 PM GMT+7

File Name

C.1.a.2 Geometri Transformasi Teori dan Implementasinya 2022.pdf

File Size

2.3 MB

210 Pages

29,603 Words

141,128 Characters

13% Overall Similarity

The combined total of all matches, including overlapping sources, for each database.

Filtered from the Report

- Bibliography

Top Sources

0% Internet sources

13% Publications

0% Submitted works (Student Papers)

Integrity Flags

1 Integrity Flag for Review

Replaced Characters
8 suspect characters on 34 pages
Letters are swapped with similar characters from another alphabet.

Our system's algorithms look deeply at a document for any inconsistencies that would set it apart from a normal submission. If we notice something strange, we flag it for you to review.

A Flag is not necessarily an indicator of a problem. However, we'd recommend you focus your attention there for further review.

Top Sources

0% Internet sources
13% Publications
0% Submitted works (Student Papers)

Top Sources

The sources with the highest number of matches within the submission. Overlapping sources will not be displayed.

1 Publication
K. Sato, A. Furutani, M. Saito, M. Isozaki, K. Suganuma, S. Imahori. "Melting attack... 4%

2 Publication
Harald Schmid. "Chapter 8 Lösungsvorschläge", Springer Science and Business M... 2%

3 Publication
Vinicius Brandão Pietrantonio. "Análise dos impactos de intervenções em corredo... 2%

4 Publication
Fatriya Adamura, Vera Dewi Susanti. "Penalaran Matematis Mahasiswa dengan K... 1%

5 Publication
Sooyeob Jung, Seongah Jeong, Jinkyu Kang, Joonhyuk Kang. "Marine IoT Systems ... 1%

6 Publication
Barbara Torregrosa Jaime. "Modelling and analysis of an air-conditioning system ... 1%

7 Publication
Daniel Garcia Leal Raymundo. "Simulações numéricas de escoamentos bifásicos e... <1%

8 Publication
Stefan Witte, Antonios Pelekanidis, Kjeld Eikema. "Propagators with user-defined ... <1%

9 Publication
Harald Schmid. "Chapter 1 Arithmetik und Trigonometrie", Springer Science and ... <1%

10 Publication
J. Beringer, J. -F. Arguin, R. M. Barnett, K. Copic et al. "Review of Particle Physics", ... <1%

11 Publication
Marcos Júnio Ribeiro. "Essays on economic growth", Universidade de São Paulo. A... <1%

GEOMETRI TRANSFORMASI

TEORI DAN IMPLEMENTASINYA

Bahan ajar *"Geometri Transformasi: Teori dan Implementasinya"* ini menyajikan definisi, teorema, contoh soal, dan latihan soal pada akhir bab. Bahasan dalam buku ini meliputi pengantar geometri tentang bidang *Euclide,* transformasi dan siat-sifatnya, pencerminan (refleksi), geseran (translasi), putaran (rotasi), isometri, kesebangunan (similaritas) pada bidang datar dan transformasinya, dan affinitas.

Awal bahasan pada Bab 1 menyajikan definisi, aksioma, postulat, proposisi dan teorema-teorema geometri pada bidang *Euclide.* Bab 2 menyajikan bahasan definisi transformasi, istilah dalam transformasi, jenisi-jenis fungsi pada transformasi, hasil kali transformasi, dan transformasi balikan. Bab 3 menyajikan definisi pencerminan (refleksi), sifat-sifat pencerminan dan rumus-rumus pencerminan. Bab 4 menyajikan ruas garis berarah dan definisi geseran (translasi) serta sifatnya. Bab 5 menyajikan definisi putaran (rotasi), rumus putaran dan maknanya, dan sifat setengah putaran. Bab 6 menyajikan definisi dan sifat-sifat isometri, isometri langsung dan lawan, hasil kali isometri, dan isometri sebagai grup. Bab 7 menyajikan kesebangunan dan kekongruenan pada bangun datar, kesebangunan (similaritas) dan dilatasi (tarikan) pada transformasi. Bab 8 menyajikan definisi affinitas, dan sifat-sifat afinitas perspektif.

Selain materi berupa definisi dan teorema, disertai pula contoh soal dengan tujuan dapat membantu pembaca terutama mahasiswa memahami dan menanamkan ide-ide atau konsep-konsep yang telah dipelajari serta menerapkannya melalui latihan-latihan soal yang disajikan pada akhir bab.

Madza Media
redaksi@madzamedia.co.id
www.madzamedia.co.id
@madzamedia

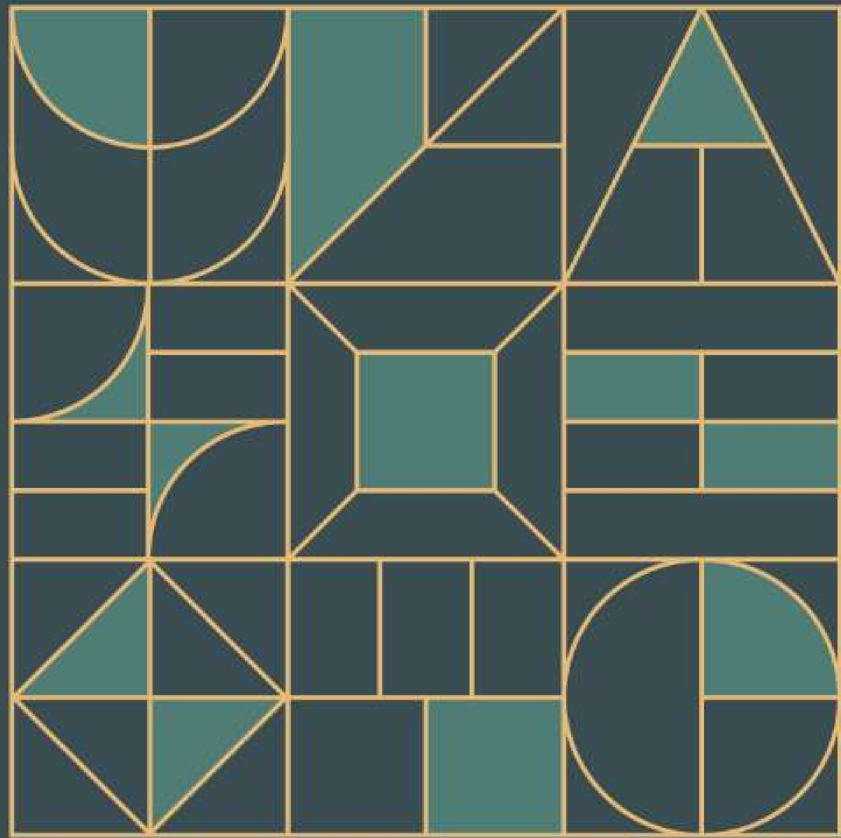
ISBN 978-623-377-668-4

Dr. Fatqurhohman, M.Pd

GEOMETRI TRANSFORMASI

TEORI DAN IMPLEMENTASINYA

Dr. Fatqurhohman, M.Pd



GEOMETRI TRANSFORMASI

TEORI DAN IMPLEMENTASINYA

Geometri Euclide, Transformasi dan Sifatnya,
Refleksi, Translasi, Rotasi, Isometri, Similaritas, Affinitas

Geometri Transformasi

Teori dan Implementasinya

Dr. Fatqurhohman, M.Pd

madza media

Geometri Transformasi

Teori dan Implementasinya

Edisi Pertama

ISBN 978-623-377-668-4

15,5 x 23 cm
211 h.
cetakan ke-1, 2022

Penulis
Dr. Fatqurhohman, M.Pd

Penerbit
Madza Media
Anggota IKAPI: No.273/JTI/2021
Kantor 1: Jl. Pahlawan, Simbatan, Kanor, Bojonegoro
Kantor 2: Jl. Bantaran Indah Blok H Dalam 4a Kota Malang
redaksi@madzamedia.co.id
www.madzamedia.co.id

Kata Pengantar

Segala puji syukur bagi Allah SWT serta sholawat dan salam kepada nabi Muhammad SAW atas rahmatnya, penulis dapat menyelesaikan bahan ajar berjudul “Geometri Transformasi: Teori dan Implementasinya”. Penulis menyampaikan rasa terima kasih kepada berbagai pihak-pihak terkait yang telah mendukung, memotivasi, dan mengarahkan penulis dari awal proses penulisan sampai terbitnya bahan ajar ini.

Bahan Ajar ini secara khusus ditulis untuk membantu mahasiswa Pendidikan Matematika FKIP UM Jember dalam mempelajari mata kuliah geometri transformasi dan secara umum guru matematika serta pembaca yang berminat memahami materi-materi yang terkandung pada bahan ajar “Geometri Transformasi dan Implementasinya”.

Bahan Ajar “Geometri Transformasi: Teori dan Implementasinya” ini merupakan sumber utama pada mata kuliah geometri transformasi selain buku-buku lain yang terkait. Materi-materi yang terkandung di dalamnya menyertakan teorema-teorema, bukti-bukti, serta latihan soal. Penulis berharap adanya bahan ajar ini nantinya dapat berguna untuk proses pembelajaran Geometri Transformasi serta membantu menumbuhkan dan meningkatkan kemampuan berpikir logis mahasiswa setelah mempelajarinya.

Penulis pun menyadari bahwa dalam penyusunan dan penulisan bahan ajar ini masih banyak kekurangan maupun kesalahan yang tidak disengaja, maka segala kritik dan saran dalam perbaikan, diucapkan terima kasih.

Jember, 2022
Penulis

FATQURHOHMAN

Ringkasan

Bahan ajar “Geometri Transformasi: Teori dan Implementasinya” ini menyajikan definisi, teorema, contoh soal, dan latihan soal pada akhir bab. Bahasan dalam buku ini meliputi pengantar geometri tentang bidang *euclide*, transformasi dan siat-sifatnya, pencerminan (refleksi), geseran (translasi), putaran (rotasi), isometri, kesebangunan (similaritas) pada bidang datar dan transformasinya, dan afinitas.

Awal bahasan pada Bab 1 menyajikan definisi, aksioma, postulat, proposisi dan teorema-teorema geometri pada bidang *Euclid*. Bab 2 menyajikan bahasan definisi transformasi, istilah dalam transformasi, jenis-jenis fungsi pada transformasi, hasil kali transformasi, dan transformasi balikan. Bab 3 menyajikan definisi pencerminan (refleksi), sifat-sifat pencerminan dan rumus-rumus pencerminan. Bab 4 menyajikan ruas garis berarah dan definisi geseran (translasi) serta sifatnya. Bab 5 menyajikan definisi putaran (rotasi), rumus putaran dan maknanya, dan sifat setengah putaran. Bab 6 menyajikan definisi dan sifat-sifat isometri, isometri langsung dan lawan, hasil kali isometri, dan isometri sebagai grup. Bab 7 menyajikan kesebangunan dan kekongruenan pada bangun datar, kesebangunan (similaritas) dan dilatasi (tarikan) pada transformasi. Bab 8 menyajikan definisi afinitas, dan sifat-sifat afinitas perspektif.

Selain materi berupa definisi dan teorema, disertai pula contoh soal dengan tujuan dapat membantu pembaca terutama mahasiswa memahami dan menanamkan ide-ide atau konsep-konsep yang telah dipelajari serta menerapkannya melalui latihan-latihan soal yang disajikan pada akhir bab.

Daftar Isi

Daftar Gambar

Daftar Simbol

Simbol	Nama Simbol	Simbol	Nama Simbol
$\angle$	Sudut	$\neq$	Ketidaksamaan
$\circ$	Derajat	$\approx$	Perkiraan
∟	Sudut siku	$<$	Kurang dari
$\overleftrightarrow{A}$	Garis	$\leq$	Kurang dari sama dengan
$\overline{AB}$	Segmen Garis	$>$	Lebih dari
$\vec{A}$	Ray	$\geq$	Lebih dari sama dengan
$\widehat{AB}$	Busur	$\in$	Elemen / anggota
$\lvert x-y \rvert$	Jarak	$\notin$	Bukan elemen / anggota
$\perp$	Tegak lurus	$\forall$	Untuk semua / setiap
$\parallel$	Pararel	$\exists$	"ada"
$f(x)$	Fungsi x	$\nexists$	"tidak ada"
$\{\quad\}$	Kurung kurawal	$\therefore$	"karena itu"
$\lvert\quad\rvert$	Nilai mutlak	y'	Turunan pertama y
$(f\circ g)$	Komposisi fungsi	y''	Turunan kedua y
(a,b)	Interval terbuka	$\cong$	Kongruen dengan
$[a,b]$	Interval tertutup	$\equiv$	Ekuivalen
$\emptyset$	Himpunan kosong	$\sim$	Kesamaan
$A\subseteq B$	Superset	Δ	Segitiga
$A\subset B$	Subset	π	Konstansi phi
$A\cup B$	Gabungan	rad	Radian

"m"	Gradien	$\triangleq$	Sama menurut definisi
A^T	transpose	∞	lemniscate
A^{-1}	Invers	$\Leftrightarrow$	Jika dan hanya jika
$det(A)$	Determinan A		

Glosarium

Istilah	Keterangan
Sudut	Daerah yang dibentuk oleh dua buah ruas garis yang titik pangkalnya sama
Sudut siku	Sudut yang besarnya 90°
Garis	Himpunan titik-titik dengan arah tertentu yang tak terbatas
Ruas garis	Garis yang dibatasi oleh dua titik
Kongruen	Dua atau lebih benda yang memiliki bentuk dan ukuran yang sama
Sebangun	Dua atau lebih benda yang memiliki bentuk sama tetapi ukuran berbeda
Gradien	Nilai kemiringan suatu garis dalam koordinat kartesius
Fungsi	Suatu relasi yang memetakan setiap anggota domain tepat satu ke kodomain
Komposisi fungsi	Gabungan dua fungsi yang membentuk fungsi baru
Geometri transformasi	Proses perubahan bentuk dan letak pada suatu bidang geometri dari posisi awal (x, y) ke posisi lainya (x', y').
Fungsi injektif/into	Fungsi yang anggota kodomain hanya dipasangkan satu kali dengan anggota domain artinya bahwa untuk $x_1 \neq x_2$ lalu $f\ (x_1) \neq\ f(x_2)$.
Fungsi bijektif	Fungsi yang semua anggota domain dan kodomain terpasangkan tepat satu
Fungsi surjektif/onto	Fungsi yang anggota kodomainnya boleh memiliki pasangan lebih dari satu, tetapi

	tidak boleh ada anggota kodomain yang tidak dipasangkan
Pencerminan	Proses perubahan yang memindahkan titik pada bidang yang ditentukan dengan jarak dari titik asal ke cermin yang sama dengan jarak cermin ke titik bayangan
Translasi	Proses perubahan hanya pada posisi/letak tetapi bentuk dan ukurannya tetap
Putaran/rotasi	Perputaran pada bidang datar berdasarkan sebuah titik pusat rotasi, arah rotasi, dan besar sudut rotasi
Dilatasi / Similaritas	Proses pengubahan jarak titik-titik dengan faktor pengali tertentu terhadap suatu titik tertentu yang tidak mengubah arahnya tetapi mengubah bentuk dan ukuranya (diperbesar atau diperkecil)
Isometri	Transformasi yang tidak mengubah bentuk dan ukuran
Afinitas	Suatu geometri yang berdasarkan aksioma-aksioma kesejajaran
Definisi	Sebuah pernyataan yang dibuat menggunakan konsep tak terdefinisi atau telah terdefinisi sebelumnya
Aksioma	Sebuah pernyataan yang dapat diterima sebagai suatu kebenaran dan bersifat umum tanpa adanya pembuktian
Postulat	Sebuah pernyataan yang disepakati benar tanpa perlu adanya pembuktian
Proposisi	Suatu hubungan yang logis antara dua konsep

Teorema	Suatu pernyataan yang masih memerlukan pembuktian
Lema	Suatu teorema sederhana sebagai hasil antara dalam pembuktian teorema yang lain

BAB 1

GEOMETRI EUCLIDE

A. Sifat-sifat Dasar Geometri Euclide

Geometri merupakan rumusan tentang makna dari suatu benda, aktivitas, proses yang menjadi suatu konsep atau pokok bahasan matematika. Geometri menjadi salah satu cabang matematika yang mana di dalamnya mempelajari tentang titik, garis, maupun bidang. Dalam pembelajaran geometri, ada beberapa komponen utama yang harus dipahami, diantaranya yaitu: definisi, aksioma, postulat, dan proposisi.

Pada geometri *Euclide* terdapat bahasan tentang bidang segitiga. Segitiga pada *Euclide* berlaku beberapa teorema dan aturan-aturan yang berlaku diantaranya *phytagoras*, *sinus*, *cosinus*, maupun rumus-rumus terkait sudut. Aturan-aturan dan teorema yang ada pada geometri *Euclide* tersebut untuk memperoleh panjang sisi maupun besar sudut suatu segitiga, dan jumlah sudut di dalam segitiga *Euclide* adalah 180°.

Pada geometri *Euclide*, segitiga dapat didefinisikan sebagai bangun datar yang memiliki tiga segmen garis yang menghubungkan minimal tiga titik yang tidak segaris. Ketiga titik yang tak segaris menghasilkan besarnya sudut berbeda pula. Berdasarkan besar sudut, segitiga dibedakan menjadi lancip, siku-siku, tumpul dan sembarang. Berdasarkan sisinya, segitiga dibedakan menjadi sama kaki, sebarang dan sama sisi.

1. Definisi

Pada Geometri *Euclide*, ada 23 definisi yang meliputi titik, garis, dan bidang. Berikut beberapa definisinya.

Definisi 1 Titik adalah sesuatu yang tidak punya bagian (sesuatu yang punya posisi tetapi tidak punya dimensi)

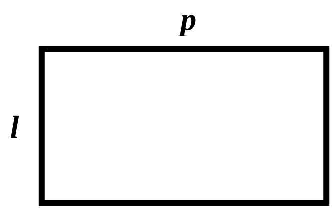
Definisi 2 Garis sesuatu yang punya panjang tetapi tidak punya lebar

Definisi 3 Ujung-ujung suatu garis adalah titik

Definisi 4 Garis lurus adalah garis yang terletak secara rata dengan titik-titik pada dirinya

Definisi 5 Bidang adalah sesuatu yang hanya mempunyai panjang dan lebar

Gambar ilustrasi disamping merupakan contoh pada definisi 5. Gambar tersebut menyatakan bahwa suatu bidang yang hanya memiliki panjang dan lebar. Panjang di simbolkan (p) dan lebar disimbolkan (l)



Gambar 1.1. Definisi 5

Pada definisi 6-10 menyatakan tentang sebuah bidang dan sudut yang terbentuk dari sebuah garis, sedangkan definisi 13-14 pembatas dari suatu bangun.

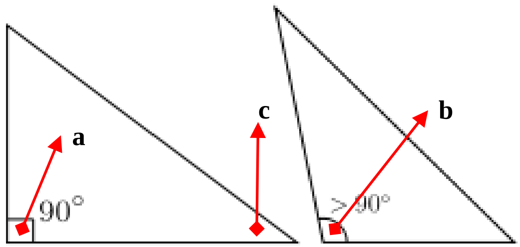
Definisi 6 Sisi-sisi dari bidang berupa garis

Definisi 7 Bidang datar adalah bidang yang terletak secara rata dengan garis-garis lurus pada dirinya

Definisi 8	Sudut bidang terbentuk dari dua garis pada bidang yang bertemu pada sebuah titik dan tidak terletak dalam sebuah garis lurus
Definisi 9	Dan ketika garis-garis yang membentuk sudut lurus, sudut tersebut *disebut rectilinear*
Definisi 10	Ketika garis lurus berdiri pada sebuah garis lurus dan membentuk sudut berdekatan yang besarnya sama, masing-masing sudut tersebut adalah *sudut siku-siku*, dan garis yang berdiri dikatakan *tegak lurus* dengan garis kurus tempatnya berdiri
Definisi 13	Batas adalah sesuatu yang merupakan ujung dari apapun
Definisi 14	Bangun adalah sesuatu yang dibentuk oleh batas atau batas-batas
Definisi 23	*Garis-garis lurus sejajar* adalah garis lurus yang berada pada bidang datar yang sama, dan jika diperpanjang secara terus menerus pada kedua arah tidak akan berpotongan di arah manapun

Pada definisi 11-12 menyatakan tentang sebuah besaran suatu sudut.

Definisi 11	Sudut tumpul adalah sudut yang lebih besar dari sudut siku-siku
Definisi 12	Sudut lancip adalah sudut yang lebih kecil dari sudut siku-siku



Gambar 1.2. Besar Sudut: (a) Siku-siku; (b) Tumpul; (c) Lancip

Pada definisi 15-18 menyatakan tentang terbentuknya sebuah lingkaran dan bagian-bagiannya.

Definisi 15 Lingkaran adalah bangun datar yang dibentuk oleh satu garis, sedemikian hingga semua garis lurus yang jatuh pada bangun tersebut dari sebuah titik di dalam bangun tersebut, pada bangun tersebut panjangnya sama.

Definisi 16 Dan titik tersebut disebut pusat lingkaran

Definisi 17 Diameter lingkaran adalah suatu garis lurus yang digambar melalui pusat lingkaran dan berakhir di dua arah keliling lingkaran

Definisi 18 Setengah lingkaran adalah bangun yang dibentuk oleh diameter dan keliling lingkaran yang dipotong oleh diameter

Pada definisi 19-22 menyatakan tentang bangun datar segitiga dan segiempat, serta jenis-jenisnya.

Definisi 19 Bangun-bangun *rectilinear* adalah bangun-bangun yang dibentuk oleh garis lurus. Bangun *segitiga* adalah bangun yang dibentuk oleh tiga garis lurus, bangun *segiempat* adalah bangun yang dibentuk oleh empat garis lurus, bangun *segibanyak* adalah bangun yang dibentuk oleh lebih dari empat garis lurus

Definisi 20 Dari bangun segitiga, *segitiga sama sisi* adalah segitiga yang memiliki tiga sisi yang sama, *segitiga sama kaki* adalah segitiga yang memiliki dua sisi yang sama, *segitiga sembarang* (segitiga tak sama panjang) adalah segitiga yang ketiga sisinya tidak ada yang sama

Definisi 21 *Segitiga siku-siku* adalah segitiga yang memiliki sudut siku-siku, *Segitiga tumpul* adalah segitiga yang memiliki sudut tumpul, *Segitiga lancip* adalah segitiga yang memiliki sudut lancip

Definisi 22 *Persegi* adalah bangun yang semua sisinya memiliki panjang yang sama dan memiliki sudut siku-siku, *Persegi panjang* adalah bangun yang memilik sudut siku- siku tetapi tidak memiliki dua pasang sisi yang panjangnya sama, *Belah ketupat* adalah bangun yang semua panjang sisinya sama tetapi tidak memiliki sudut suku-siku.

2. Aksioma dan Postulat

Aksioma adalah pernyataan yang diakui kebenarannya tanpa memerlukan pembuktian. Ada 5 aksioma pada Geometri *Euclid* yaitu:

Aksioma 1 Hal-hal yang sama adalah sama dengan suatu yang lain

Aksioma 2 Jika sesuatu yang sama ditambah dengan sesuatu yang sama, jumlahnya sama. Contoh: $A = B, C = D$, maka: $A + C = B + D$

Aksioma 3 Jika sesuatu yang sama dikurangi dengan sesuatu yang sama, sisanya sama

Aksioma 4 Hal-hal yang berimpit satu sama lain, hal-hal tersebut sama

Aksioma 5 Keseluruhan lebih besar dari pada sebagian

Postulat adalah asumsi yang menjadi pangkal dalil dan dianggap benar tanpa perlu membuktikannya. Ada 5 postulat pada Geometri *Euclid* yaitu:

Postulat 1 Melalui dua titik sebarang dapat dibuat garis lurus

Postulat 2 Ruas garis dapat diperpanjang secara kontinu menjadi garis lurus

Postulat 3 Melalui sebarang titik dan sebarang jarak dapat dilukis lingkaran

Postulat 4 Semua sudut siku-siku sama

Postulat 5 Jika suatu garis lurus memotong dua garis lurus dan akan membuat sudut-sudut dalam sepihak kurang dari dua sudut siku-siku, kedua garis tersebut jika diperpanjang tak terbatas, sudut dalam sepihak kurang dari dua sudut siku-siku

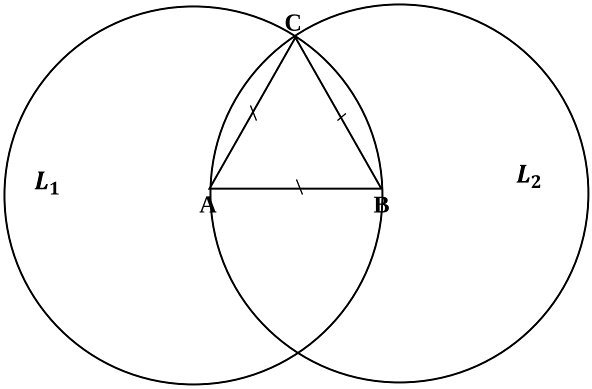
3. Proposisi

Proposisi adalah suatu hasil yang terbukti dan sering menarik. Ada 48 proposisi pada Geometri *Euclid* yaitu:

Proposisi 1 Jika diberikan garis lurus dengan panjang terbatas, maka dapat dibuat segitiga sama sisi.

Bukti: Diberikan garis $\overline{AB}$.

Buat lingkaran L1 dengan pusat A dan jari-jari AB	(postulat 3)
Buat lingkaran L2 dengan pusat B dan jari-jari AB	(postulat 3)
Maka, L1 dan L2 berpotongan di C	
Tarik garis dari A ke C dan dari B ke C	(postulat 1)
ΔABC adalah segitiga sama sisi	

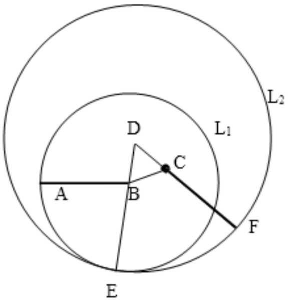


Gambar 1.3. Proposisi 1

Proposisi 2 Jika diberikan sebuah garis lurus dan sebuah titik di luar garis, maka melalui titik tersebut dapat dibuat garis lurus yang panjangnya sama dengan garis lurus yang diberikan.

Bukti: Diberikan garis $\overline{AB}$ dan titik C di luar garis $\overline{AB}$.

Buat lingkaran L1 dengan pusat B dan jari-jari $\overline{AB}$	(postulat 3)
Tarik garis dari B ke C	(postulat 1)
Buat segitiga sama sisi melalui garis $\overline{BC}$, Namakan ΔBCD	(proposisi 1)
Perpanjang garis $\overline{BD}$ sampai memotong L1 di E	(postulat 2)
Buat lingkaran L2 dengan pusat D dan jari-jari $\overline{DE}$	(postulat 3)
Perpanjang garis $\overline{CD}$ sampai memotong L2 di F	(postulat 2)
$\overline{BE} = \overline{AB}$ ………. (jari-jari L1)	(pers 1)
$\overline{DE} = \overline{DF}$ ………. (jari-jari L2)	
$\overline{DB} + \overline{BE} = \overline{DC} + \overline{CF}$	(aksioma 1)
Karena: $\overline{DB} = \overline{DC}$ ……….. (ΔBCD sama sisi)	
Maka: $\overline{BE} = \overline{CF}$	(pers 2)
	(aksioma 2)
Dari 1) dan 2) diperoleh $\overline{AB} = \overline{CF}$	



Gambar 1.4. Proposisi 2

Pada proposisi 3-10 dapat dibuktikan sendiri (**sebagai latihan**)

Proposisi 3 Jika diberikan dua garis lurus dengan panjang berbeda, maka garis lurus yang lebih panjang dapat dipotong sehingga panjangnya sama dengan garis lurus yang lebih pendek

Proposisi 4 Jika dua buah segitiga memiliki dua sisi bersesuaian yang panjangnya sama dan sudut-sudut yang dibentuk oleh kedua sisi tersebut besarnya juga sama, maka panjang sisi dan besar sudut yang bersesuaian lainnya juga sama

Proposisi 5 Dalam segitiga sama kaki, sudut-sudut alas besarnya sama dan jika kedua kaki diperparjang maka sudut-sudut di bawah alas juga sama besar

Proposisi 6 Jika dua sudut dalam sebuah segitiga besarnya sama, maka sisi-sisi yang berhadapan dengan sudut tersebut panjangnya juga sama

Proposisi 7 Jika alas dua buah segitiga berimpit, dan sisi-sisi yang bersesuaian pada dalam segitiga-segitiga tersebut sama panjang dan searah, maka titik potong sisi-sisi yang bersesuaian dalam setiap segitiga berimpit

Proposisi 8 Jika sisi-sisi yang bersesuaian dalam setiap segitiga panjangnya sama, maka sudut-sudut yang bersesauaian besarnya juga sama

Proposisi 9 Sudut *rectilinear* dapat dibagi menjadi dua sama besar

Proposisi 10 Garis lurus terbatas dapat dibagi menjadi dua bagian yang sama panjang

Pada proposisi berikut menjelaskan perpotongan antara garis lurus dengan garis yang tegak lurus dan memberikan titik potong pada pertemuan garis tersebut.

Proposisi 11 Jika diberikan sebuah garis lurus dan sebuah titik pada garis lurus tersebut, maka melalui titik tersebut dapat dibuat garis lurus yang tegak lurus pada garis lurus yang diberikan.

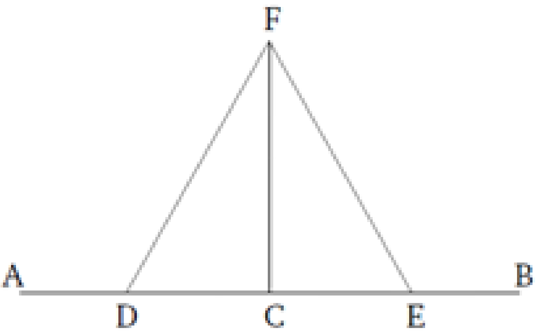
Bukti : Diberikan sebuah garis lurus $\overline{AB}$ dan C terletak pada garis tersebut

Akan dibuktikan bahwa:

Melalui titik C, dibuat garis tegak lurus ⊥ $\overline{AB}$.

Misalkan: Titik D adalah sebarang titik pada $\overline{AC}$, Maka dapat dibuat garis $\overline{CE} = \overline{CD}$	(Proposisi 2)
Melalui $\overline{DE}$ dapat dibuat segitiga sama sisi ΔFDE dengan $\overline{FC}$	(Proposisi 1)
Akan ditunjukkan bahwa:	
$\overline{FC}$ membentuk sudut siku-siku terhadap $\overline{AB}$ dari titik C yang diberikan	
Karena $\overline{DC} = \overline{CE} = \overline{CF}$ adalah garis persekutuan, Maka $\overline{DC}$ dan $\overline{CF}$ sama dengan $\overline{EC}$ dan $\overline{CF}$.	
Jika ΔFDE adalah sama sisi, maka $\overline{DF} = \overline{FE}$, Sehingga $\angle DCF = \angle ECF$ .... (saling berdekatan)	(proposisi 8)
"ketika garis lurus berdiri pada sebuah garis lurus dan membentuk sudut berdekatan yang besarnya sama, masing-masing sudut tersebut adalah sudut siku-siku, dan garis yang berdiri dikatakan tegak lurus dengan garis lurus tempatnya berdiri"	(definisi 10)
Sehingga $\angle DCF = \angle ECF$ adalah sudut siku-siku	

Garis lurus $\overline{FC}$ membentuk sudut siku-siku terhadap $\overline{AB}$ dari titik C yang diberikan (Terbukti)



Gambar 1.5. Proposisi 11

Proposisi 12 Jika diberikan sebuah garis lurus dan sebuah titik di luar garis lurus tersebut, maka melalui titik tersebut dapat dibuat garis lurus yang tegak lurus pada garis lurus yang di berikan

Proposisi 13 Jika sebuah garis lurus berdiri pada sebuah garis lurus, maka akan membentuk dua sudut siku siku atau sudut yang jumlahnya sama dengan dua sudut siku siku

Proposisi 14 Diberikan sebuah garis lurus dan sebuah titik pada garis tersebut, jika dua daris lurus melalui titik tersebut dan membentuk sudut yang besarnya sama dengan dua kali sudut siku-siku, maka kedua garis lurus tersebut segaris

Proposisi 15 Jika dua buah garis lurus berpotongan, maka akan terbentuk dua sudut bertolak belakang yang besarnya sama. Akibat : jika dua buah garis lurus berpotongan, maka sudut-sudut pada titik potong tersebut jumlahnya sama dengan empat sudut siku siku

Proposisi 16 Jika salah satu sisi dalam segitiga diperpanjang, maka sudut eksteriornya lebih besar dari pada sudut interior yang tidak bersisian

Bukti: Misalkan: diketahui ΔABC dan D perpanjangan garis $\overline{BC}$

- ➢ Ditunjukkan bahwa sudut luar $\angle ACD > \angle A$

$\overline{AC}$ dipotong garis $\overline{FB}$ menjadi 2 bagian, misal di E (proposisi 10)

Perpanjang garis $\overline{BE}$ hingga F melalui E, Sedemikian hingga $\overline{BE} = \overline{EF}$ (postulat 2)

Karena, $\overline{AE} = \overline{EC}$ dan $\overline{BE} = \overline{EF}$,

$\angle AEB = \angle CEF$ .... (bertolak belakang)

Maka: $\Delta\, AEB = \Delta\, CEF$ ..... (proposisi 4) (ss-sd-ss)

Jadi, $\angle BAE = \angle FCE$ (sudut yang bersesuaian)

Karena, $\angle ACD > \angle FCE$ (aksioma 5)

Maka: $\angle ACD > (\angle BAE = \angle A)$ Sedemikian hingga

(Terbukti)

$(\angle BAE = \angle FCE)$ Sehingga:
$\angle ACD > \angle A$

- Ditunjukkan bahwa $\angle ACD > \angle B$,

Perpanjang $\overline{AC}$ hingga ke H melalui C

Potong $\overline{BC}$ garis $\overline{AG}$ menjadi 2 bagian, misal di M (proposisi 10)

Perpanjang garis $\overline{AM}$ hingga G melalui M, (postulat 2)
Sedemikian hingga: $\overline{AM} = \overline{MG}$

Karena, $\overline{BM} = \overline{MC}$ dan $\overline{AM} = \overline{MG}$

$\angle AMB = \angle CMG$ ………… (bertolak belakang)

Maka: $\Delta\, AMB = \Delta\, CMG$ ……. (ss-sd-ss) (proposisi 4)

Jadi, $\angle ABM = \angle GCM$ (sudut yang bersesuaian)

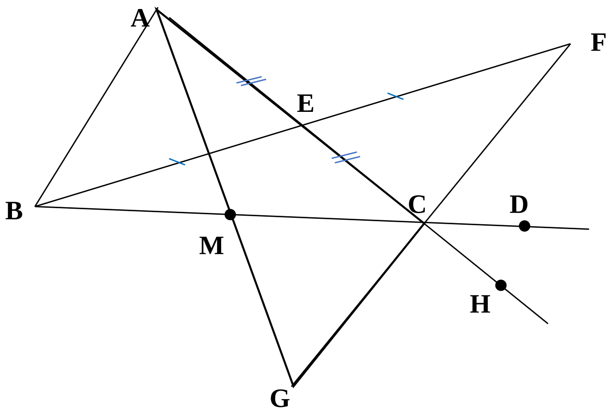
Karena, $\angle MCH > \angle GCM$ (aksioma 5)

Maka: $\angle MCH > \angle ABM = \angle B$

Sedemikian hingga $(\angle ABM = \angle GCM)$

Karena, $\angle MCH = \angle ACD$ (bertolak belakang) (**Terbukti**)

Maka: $\angle ACD > \angle B$



Gambar 1.6. Proposisi 16

Proposisi 17 Jumlah dua sudut dalam segitiga kurang dari dua sudut siku-siku

Bukti: Misalkan: diketahui ΔABC

Akan ditunjukkan: $\angle A + \angle B <$ dua sudut siku, Karena Geometri *Euclid* menitikberatkan pada pembuktian gambar

Maka: $\angle ABD =$ (pers 1)
$dua\ sudut\ siku - \angle B$

"jika sesuatu yang sama ditambah dengan sesuatu yang sama, nilainya sama" (aksioma 2)

Sehingga: (pers 2)

$\angle ABD + \angle B =$
$dua\ sudut\ siku - \angle B + \angle B$

$\angle ABD + \angle B =$
$dua\ sudut\ siku$

Perpanjang garis $\overline{CB}$ hingga ke D melalui B, Maka: $\angle ABD$ adalah sudut luar ΔABC.

”Dalam segitiga, jika salah satu sisi diperpanjang, maka sudut eksteriornya lebih besar dari sudut interior yang tidak bersisian dengan sudut tersebut” (proposisi 16)

Maka: $\angle ABD > \angle A$ (pers 3)

Dari (2), (3), dan aksioma 5, diperoleh: (pers 4)

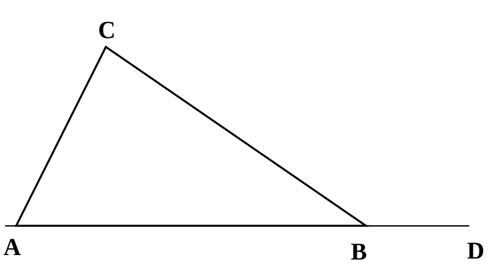
$\angle A + \angle B <$ *dua sudut siku*

Dengan cara yang sama dapat diperoleh: (pers 5)

$\angle A + \angle C <$ *dua sudut siku* (pers 6)

$\angle C + \angle B <$ *dua sudut siku*

Dari (4), (5), dan (6) ”dalam segitiga, jumlah dua sudut kurang dari dua sudut siku” **(terbukti)**



Gambar 1.7. Proposisi 17

Proposisi 18 Dalam segitiga, sudut di hadapan sisi yang lebih panjang juga lebih besar

Proposisi 19 Dalam segitiga, sisi di hadapan sudut yang lebih besar juga lebih panjang

Proposisi 20 Jumlah dua sisi dalam segitiga lebih besar dari sisi yang lainnya

Proposisi 21 Jika dari ujung-ujung salah satu sisi segitiga dibuat dua garis lurus sedemikian hingga membentuk segitiga baru, maka jumlah kedua sisi (yang tidak berimpit) segitiga baru lebih kecil daripada jumlah kedua sisi (yang tidak berimpit) segitiga awal, tetapi besar sudut yang dibentuk lebih besar

Proposisi 22 Jika diberikan tiga garis lurus maka dari garis lurus, maka dapat dibentuk sebuah segitiga

Proposisi 23 Jika diberikan sebuah sudut dan sebuah garis lurus, maka melalui garis lurus tersebut dapat dibuat sudut yang besarnya sama dengan yang diberikan

Proposisi 24 Jika dua buah segitiga memiliki dua sisi yang bersesuaian, tetapi sudut yang dibentuk oleh sisi- sisi tersebut pada segitiga pertama lebih besar, maka alas segitiga pertama lebih panjang

Proposisi 25 Jika dua buah segitiga memiliki dua bersesuaian sisi yang sama besar, tetapi sisi lainnya pada segitiga pertama lebih besar daripada yang di segitiga yang ke dua, maka sudut yang berhadapan dengan sisi yang lebih besar pada segitiga pertama juga lebih besar daripada yang di segitiga ke dua

Proposisi 26 Jika dua buah segitiga memiliki dua sudut bersesuaian sama besar dan sisi yang terkait dengan sudut-sudut tersebut sama panjang, maka sudut dan sisi yang bersesuaian lainnya juga sama besar.

Pada proposisi 27-29 menjelaskan perpotongan garis lurus yang membentuk beberapa sudut yang sama besar. Sudut yang terbentuk adalah sepihak (sehadap), luar maupun dalam berseberangan.

Proposisi 27 Jika sebuah garis lurus memotong dua garis lurus dan membentuk sudut dalam berseberangan yang sama besar, maka kedua garis lurus yang dipotong tersebut sejajar

Bukti: Misalkan:

Sebuah garis transversal memotong dua garis k dan m di titik A dan B, Membentuk sepasang sudut dalam berseberangan yang sama yaitu: $\angle 1$ dan $\angle 2$

Andaikan garis k dan m tidak sejajar

Maka garis k dan m berpotongan, misal di titik C dan membentuk ΔABC.

Misalkan:

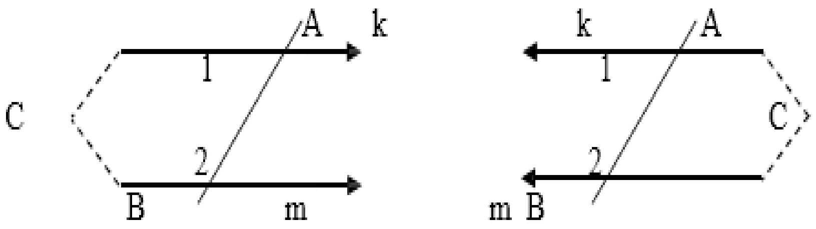
Titik C terletak di sebelah kiri garis $\overline{AB}$ atau di sebelah kanannya

Sudut luar ΔABC = Sudut dalam ΔABC

(kontradiksi dengan proposisi16)

Jadi, pengandaian salah

Sehingga garis *m* dan *k* sejajar



Gambar 1.8. Proposisi 27

.

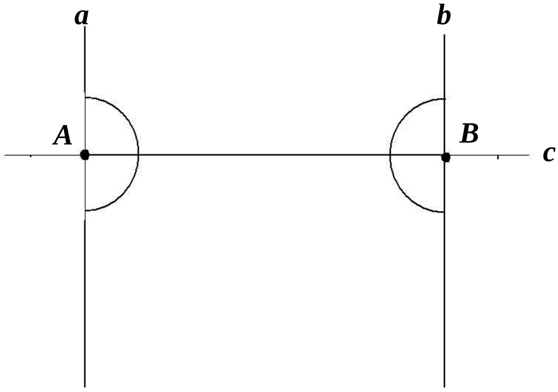
Proposisi 28 Jika sebuah garis lurus memotong dua garis lurus dan membentuk sudut eksterior sama dengan sudut interior yang tidak bersisian (sehadap), atau jumlah sudut interiornya sama dengan dua sudut siku-siku, maka kedua garis lurus yang dipotong tersebut sejajar

Proposisi 29 Jika sebuah garis lurus memotong dua garis lurus yang sejajar dan membentuk sudut dalam berseberangan yang sama besar, maka sudut eksterior sama dengan sudut interior yang tidak bersisian (sehadap), dan jumlah sudut interiornya sama dengan dua sudut siku-siku

Bukti: Misalkan:

Sebuah bidang *V* dianggap sebagai bidang *Euclides*, artinya himpunan titik-titik *V* diberlakukan sistem aksioma *Euclides.*

"apabila ada dua garis a dan b dipotong garis ketiga yaitu c di titik $A \in a$ dan titik $B \in b$ sehingga jumlah besarnya dua sudut dalam sepihak di A dan di B kurang dari 180° maka a dan b akan berpotongan pada bidang yang terbagi oleh garis c yang memuat kedua sudut dalam sepihak" (Aksioma *Euclides)*



Gambar 1.9. Proposisi 29

Pada proposisi 30-36 menjelaskan tentang bidang yang terbentuk dari garis lurus yang sejajar, sehingga garis tersebut membentuk bangun datar, misal segitiga, jajargenjang dan lainnya.

Proposisi 30 Jika dua buah garis lurus sejajar dengan sebuah garis lurus, maka kedua garis lurus tersebut sejajar satu sama lainnya.

Proposisi 31 Melalui sebuah titik di luar garis lurus dapat dibuat garis lurus yang sejajar dengan garis lurus tersebut

Proposisi 32 Dalam sebuah segitiga, jika salah satu sisi diperpanjang, maka besar sudut eksterior sama dengan jumlah besar sudut interior yang tidak bersisian

Proposisi 33 Garis lurus yang terkait dengan ujung-ujung garis lurus yang sejajar dan sama panjang juga sejajar dan sama panjang

Proposisi 34 Dalam jajar genjang, sudut-sudut yang tidak bersisian (berhadapan) sama besar dan diagonalnya membagi dua daerahnya sama besar

Proposisi 35 Jika dua buah jajargenjang terletak pada garis-garis sejajar yang sama dan alasannya berimpit maka luas kedua jajargenjang tersebut sama

Proposisi 36 Jika dua buah jajargenjang terletak pada garis-garis sejajar yang sama dan alasannya sama panjang, maka luas kedua jajargenjang tersebut sama

Proposisi 46 Melalui sebuah garis dapat dibuat sebuah jajargenjang

Pada proposisi 37-43 menjelaskan tentang perbandingan alas bidang datar, misal segitiga, jajargenjang dan lainnya, dari garis lurus yang sejajar membentuk luas bidang datar tersebut yang sama.

Proposisi 37 Jika dua buah segitiga terletak pada garis-garis sejajar yang sama dan alasnya berimpit, maka luas kedua jajargenjang tersebut sama

Proposisi 38 Jika dua buah segitiga terletak pada garis-garis sejajar yang sama dan alasannya sama panjang, maka luas kedua jajargenjang sama

Proposisi 39 Jika dua buah segitiga memiliki luas yang sama dan alasnya serta sisinya berimpit, maka kedua segitiga tersebut terletak pada garis-garis sejajar yang sama

Proposisi 40 Jika dua buah segitiga memiliki luas yang sama dan alasnya serta sisinya sama panjang, maka kedua segitiga tersebut terletak pada garis-garis sejajar yang sama

Proposisi 41 Jika sebuah jajargenjang memiliki alas yang berimpit dengan alas sebuah segitiga dan terletak dalam garis sejajar yang sama, maka luas jajargenjang sama dengan dua kali alas segitiga

Proposisi 42 Jika diberikan sebuah segitiga dan sebuah sudut *rectilinear*, maka melalui sudut *rectilinier* tersebut dapat dibuat jajargenjang yang luasnya sama dengan dua kali luas segitiga tersebut

Proposisi 43 Dalam jajar genjang, komplemen-komplemen jajargenjang pada diagonal memiliki luas yang sama

Proposisi 44 Jika diberikan sebuah garis lurus, sebuah sudut rectilinear, dan sebuah segitiga, maka melalui sudut dan garis lurus tersebut dapat dibuat sebuah jajargenjang yang luasnya sama dengan dua luas segitiga yang diberikan

Proposisi 45 Jika diberikan sebuah sudut dan sebuah bidang *rectilinear*, maka melalui sudut tersebut dapat dibuat jajargenjang yang luasnya sama dengan bidang yang diberikan

Pada proposisi 47-48 berikut menjelaskan tentang segitiga dan aturan-aturannya yang mana termuat dalam teorema *phytagoras*.

Proposisi 47 Dalam segitiga siku-siku, kuadrat sisi di hadapan sudut siku-siku sama dengan jumlah kuadrat dua sisi yang lainnya

Proposisi 48 Jika dalam segitiga, kuadrat salah satu sisi sama dengan jumlah kuadrat dua sisi yang lainnya, maka sudut yang dibentuk oleh dua sisi yang lainnya tersebut adalah siku-siku

Bukti: Berdasarkan Dalil Phytagoras:

Luas daerah yang tidak diarsir sama dengan Luas persegi ABCD – 4 x Luas daerah yang diarsir

Maka:

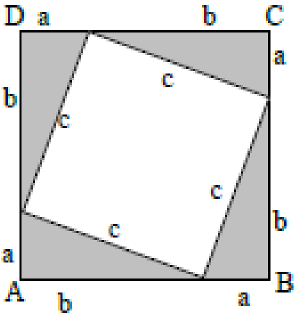
$$c^2 = (a+b)(a+b) - \left(4 \times \frac{1}{2}ab\right)$$

$$c^2 = a^2 + 2ab + b^2 - \left(4 \times \frac{1}{2}ab\right)$$

$$c^2 = a^2 + 2ab + b^2 - (2ab)$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

(Terbukti)



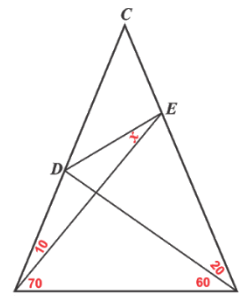
Gambar 1.10. Proposisi 47-48

B. Latihan Soal

Kerjakan soal berikut dengan tepat dan benar menggunakan teorema/dalil, aksioma, proposisi, atau definisi yang sesuai.

1. Seorang anak menaikkan layang-layang dengan benang yang panjangnya 250 meter. Jarak anak di tanah dengan titik yang tepat berada di bawah layang-layang adalah 70 meter. Hitunglah ketinggian layang-layang tersebut.
2. Titik P terletak pada sisi BA dari ΔABC. Suatu garis lurus ditarik ke sisi BC (diperluas jika perlu) dari sudut tersebut. Buktikan:
   a. Kaki yang tegak lurus terletak pada sisi BC sebagai sudut
   b. $\angle ACB$ lancip atau tumpul
3. Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di $(2,3)$ dan menyinggung garis $3x - 4y = 4$.
4. Diketahui dua lingkaran menyinggung *sumbu x* di titik $(4,0)$ dan menyinggung garis $4x - 3y = 0$. Tentukan jarak kedua titik pusat lingkaran tersebut.
5. Tentukan garis singgung lingkaran: $x^2 + y^2 + 10x - 2y + 6 = 0$ yang sejajar dengan garis: $2x + y + 7 = 0$.
6. Tentukan garis singgung lingkaran: $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 3 = 0$ yang tegak lurus dengan garis: $x + y - 3 = 0$
7. Diketahui titik A dan B terletak pada: $x^2 + y^2 - 3x + 2y - 8 = 0$, kemudian dibuat garis-garis singgung lingkaran yang berpotongan di titik $(-3,1)$. Tentukanlah persamaan garis AB tersebut.
8. Diketahui lingkaran L_1: $x^2 + y^2 - 14x - 8y + 13p = 0$ dan L_2: $x^2 + y^2 = 13$. Garis singgung L_2 dan L_1 di titik $(2,3)$, maka tentukanlah nilai p.
9. Jelaskan bahwa suatu garis mempunyai titik tak hingga banyaknya.

10. Didefinisikan bahwa suatu segmen adalah himpunan titik-titik. Jelaskan definisi lengkapnya dan apakah himpunan titik-titik ini dapat berupa himpunan kosong?
11. Jika A, B, C adalah suatu segitiga, maka buktikan bahwa ketiga sinar: $B/C, A/C, A/B$ mempunyai transversal (yaitu suatu garis yang memotong ketiganya).
12. Pada segitiga ABC, misalkan garis bagi sudut B berpotongan pada lingkaran tersebut, dimana terdapat A, B, C, E berbeda dari B. Buktikan bahwa BE merupakan diameter lingkaran jika dan hanya jika $AB = BC$.
13. Andaikan dua bidang berlainan berpotongan, maka himpunan titik potongnya adalah sebuah garis. Buktikan!
14. Diketahui segitiga sembarang ABC. Titik D, E, F berturut-turut pada sisi-sisi AB, BC, AC. Gambarlah ΔDEF!
15. Jika diketahui $A \neq B$, maka buktikan bahwa:
    a. $A/B \subset AB$ dan $B/A \subset AB$
    b. $A \notin A/B$ dan $B \notin B/A$
    c. A/B tidak kosong
    d. $AB = A/B \cup \{A\} \cup \overline{AB} \cup \{B\} \cup B/A$
    e. Himpunan pada ruas kanan saling lepas
16. Jika titik $A(-2, 4)$, $B(h, 3)$, $C(3, 0)$, dan $D(5, k)$ adalah titik-titik sudut jajar genjang $ABCD$. Tentukan nilai h dan !
17. Jika $A(-h, -k)$, $B(5, -2\sqrt{3})$, $C\ (k, 8\sqrt{3})$, dan $D(-9, h)$ adalah titik-titik, sehingga $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Tentukanlah nilai h dan !
18. Tentukan nilai x, pada gambar berikut,!



BAB 2

TRANSFORMASI

A. Definisi Transformasi

Suatu fungsi pada V adalah suatu padanan yang mengaitkan setiap anggota V dengan satu anggota V. Jika f adalah fungsi dari V ke V yang mengaitkan setiap $x \in V$ dengan $y \in V$, maka ditulis $y = f(x)$, x dinamakan prapeta dari y oleh f dan y dinamakan peta dari x oleh f. Daerah asal fungsi tersebut adalah V dan daerah nilainya juga V. Fungsi yang demikian dinamakan fungsi pada f.

Definisi 2.1 Misalkan V bidang *Euclides*. Fungsi T dari V ke V disebut suatu transformasi jika dan hanya jika T sebuah fungsi Bijektif.

Fungsi yang bijektif adalah sebuah fungsi yang bersifat surjektif dan injektif.

Surjektif: artinya jika T suatu transformasi, maka tiap titik $B \in V$ ada prapeta $A \in V$, sehingga $B = T(A)$, B peta dari A dan A prapeta dari B,

Untuk $\forall Y \in B, \exists X \in A$

Injektif: artinya jika $A_1 \neq A_2$ dan $T(A_1) = B_1$, $T(A_2) = B_2$, Maka $B_1 \neq B_2$

atau jika $T(P_1) = Q_1$, $T(P_2) = Q_2$, dimana $Q_1 = Q_2$, maka $P_1 = P_2$

Karena transformasi T merupakan fungsi bijektif pada bidang V ke bidang V, maka dapat dituliskan $(T: V \rightarrow V)$. Sehingga seluruh teori geometri *Euclide* akan berlaku di dalamnya, maka transformasi T juga memiliki invers (T^{-1}) dan berupa transformasi juga.

Penulisan anggota V dituliskan menggunakan huruf besar, missal $A, B, \ldots$., dan anggota V merupakan juga pasangan terurut yang dapat dituliskan $A(a, b)$, $B(x, y)$ dan jika $P(c, d)$ maka $T(P) = T(c, d) = P' = (c', d')$.

Pada contoh berikut, anggaplah V adalah bidang *Euclide*, artinya pada himpunan titik V berlaku pada sistem aksioma *Euclide*.

Contoh 2.1 Andaikan $A \in V$. Jika ada perpetaan (padanan) T dengan V ke V.

Jadi $T: V \rightarrow V$ didefinisikan:

$T(A) = A$ dan apabila $P \neq A$, maka $T(P) = Q$ dengan Q titik tengah garis $\overline{AP}$.

Penyelesaian: Diketahui bahwa A memiliki peta, yaitu A sendiri

Ambil sebarang titik $R \neq A$ pada V. Karena, V bidang *Euclides* maka, ada satu garis yang melalui A dan R jadi, ada satu ruas garis yaitu $\overleftrightarrow{AR}$, sehingga ada tepat satu titik S dengan S antara A dan R, Maka: $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{SR}$.

Berarti untuk setiap $X \in V$ terdapat satu $Y \in V$ dengan $Y = T(X)$ yang memenuhi T bijektif.

➢ Akan dibuktikan untuk T surjektif

Selidiki apakah setiap titik di V memiliki prapeta

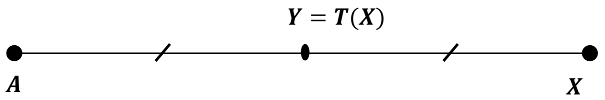
Apabila $Y \in V$ apakah ada $X \in V$ yang bersifat $T(X) = Y$?

Jika $Y = A$ prapetanya adalah A sendiri, karena $T(A) = A$.

Apabila $Y \neq A$, maka ada X tunggal dengan $X \in \overrightarrow{AY}$; $\overline{AY} = \overline{YX}$.

Jadi, Y adalah titik tengah $\overleftrightarrow{AX}$, maka $Y = T(X)$.

Berarti bahwa X adalah prapeta dari titik Y, dimana setiap titik pada V memiliki prapeta. Jadi T adalah suatu padanan yang surjektif



- Akan dibuktikan untuk T injektif

Misalkan: Ambil sebarang titik $P \neq A, Q \neq A$ dan $P \neq Q$,

Dimana P, Q, A tidak segaris (kolinier).

Andaikan $T(P) = T(Q)$

Karena, $T(P) \in \overleftrightarrow{AP}$ dan $T(Q) \in \overleftrightarrow{AQ}$

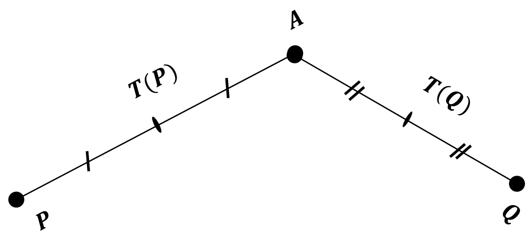
Maka, $\overleftrightarrow{AP}$ dan $\overleftrightarrow{AQ}$ memiliki titik sekutu: A dan $T(P) = T(Q)$

Berarti bahwa garis $\overleftrightarrow{AP}$ dan $\overleftrightarrow{AQ}$ berimpit, berakibat $Q \in \overleftrightarrow{AP}$

Sehingga berlawanan dengan pemisalan P, Q, A tidak segaris.

Jadi haruslah $T(P) \neq T(Q)$

Sehingga benar T injektif.



Dengan demikian bahwa padanan T tersebut adalah padanan bijektif yang memuat surjektif dan injektif. Sehingga T suatu transformasi dari V ke V ditulis $T: V \rightarrow V$.

Contoh 2.2 T adalah padanan pada bidang Euclides V suatu sistem koordinat ortogonal yang mengkaitkan setiap titik P dengan P' yang letaknya satu satuan dari P dengan arah sumbu X positif. Buktikan apakah T suatu transformasi ?

Penyelesaian: Jika $P(x, y)$, maka $T(P) = P'$ dan $P' = (x + 1, y)$

Dimana daerah asal T adalah seluruh bidang V

- Akan dibuktikan T surjektif

Misalkan $A(x, y)$ dan andaikan $B = (x', y')$

Jika B prapeta titik $A(x, y)$, maka berlaku $T(B) = (x' + 1, y')$

Jadi, $x' + 1 = x$, dan $y' = y$

atau $x' = x - 1$ dan $y' = y$

Jelas bahwa: $T(x - 1, y) = \big((x - 1) + 1, y\big) = (x, y)$

Karena, x', y' selalu ada untuk semua nilai x, y

Maka B juga selalu ada.sehingga $T(B) = A$

Karena A sebarang, aka setiap titik di V memiliki prapeta

Sehingga T surjektif

➢ Akan dibuktikan T injektif

Andaikan $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x_2, y_2)$ dengan $P \neq Q$

Sehingga, $T(P) = (x_1 + 1, y_1)$ dan $T(Q) = (x_2 + 1, y_2)$

Jika, $T(P) = T(Q)$, maka $(x_1 + 1, y_1) = (x_2 + 1, y_2)$

Jadi, $x_1 + 1 = x_2 + 1$, atau $x_1 = x_2$ dan $y_1 = y_2$

Maka: $P = Q$

Sehingga kontradiksi dengan pengandaian.

Jadi, haruslah $T(P) \neq T(Q)$ maka T injektif

Dengan demikian bahwa T adalah padanan yang bijektif. Maka T merupakan suatu transformasi dari V ke V.

Contoh 2.3 Misalkan V bidang *Euclides* dan A sebuah titik tertentu pada V. Maka ditetapkan relasi T sebagai berikut

1 i) $T(P) = A$, jika $P = A$

ii) Jika $P \in V$ dan $P \neq A$, $T(P) = Q$ dengan Q merupakan titik tengah ruas garis $\overleftrightarrow{AP}$

Apakah relasi T merupakan suatu transformasi?

Penyelesaian: Berdasarkan definisi 2.1

1) T suatu fungsi dari V ke V

2) T suatu fungsi bijektif

1) Akan ditunjukkan bahwa T suatu fungsi dari V ke V

Ambil sebarang titik $P \in V$.

Karena $A \in V$, maka $P = A$ atau $P \neq A$

- ➢ Untuk P = A, ada titik $A \in V$ (tunggal) peta dari P,

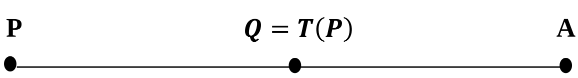
  Sehingga $A = T(P)$

- ➢ Untuk $P \neq A$, ada $AP \in V$ (tunggal)

  Setiap $\overleftrightarrow{AP}$ mempunyai titik tengah Q (tunggal).

  Karena $Q \in \overleftrightarrow{AP}$ dan $\overleftrightarrow{AP} \in V$
  Maka $Q \in V$.
  Jadi, untuk $P \neq A$, ada $Q \in V$

  Sehingga $T(P) = Q$ dan Q titik tengah $\overleftrightarrow{AP}$
  Karena setiap $P \in V$, ada $T(P) \in V$ yang tunggal
  Maka T merupakan fungsi dari V (**terbukti**)



2) Akan ditunjukkan bahwa T suatu fungsi bijektif

- ➢ T fungsi pada (Surjektf)

  Ambil sebarang titik $R \in V$.
  Karena di V ada satu titik A, Maka $R = A$ dan $R \neq A$.

  Untuk $R = A, R$ mempunyai prapeta, yaitu A sendiri

  Untuk R ≠ A

Berdasarkan geometri *Euclide*:

Ada $\overleftrightarrow{AR}$ dan setiap ruas garis $\overleftrightarrow{AR}$ memiliki titik tengah, misal M

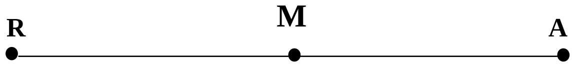
Jadi, M prapeta dari R

5 Akibatnya, untuk $R \neq A$, ada $M \in V$

Sehingga $T(M) = R$ dan M titik tengah $\overleftrightarrow{AR}$

Karena setiap $R \in V$ mempunyai prapeta oleh fungsi T

Maka T merupakan suatu fungsi pada (surjektif)



➢ T fungsi satu-satu (injektif)

Ambil dua titik sebarang, misalnya P dan Q,

1 Dimana , $Q \in V$, maka $T(P) = T(Q)$.

Sehingga akan dibuktikan $P = A, \quad Q = A$ dan $P \neq A, \quad Q \neq A$

Untuk $P = A, \quad T(P) = P = A$

$T(P) = T(Q)$ berarti $T(Q) = A$

Jadi, $Q = A$ dan $P = Q$

Untuk $Q = A, \quad T(Q) = Q = A$

Diketahui $T(P) = T(Q)$, maka $T(P) = A$

Jadi, $P = A$ dan $P = Q$

Untuk P ≠ A dan Q ≠ A

Misalkan $T(P) = P'$ dan $(Q) = Q'$, maka $P' \in \overleftrightarrow{PA}$ dan $Q' \in \overleftrightarrow{QA}$

Karena $P' \in \overleftrightarrow{PA}$ maka $\overleftrightarrow{PA} = \overleftrightarrow{AP'}$

5 Karena $Q' \in \overleftrightarrow{QA}$ maka $\overleftrightarrow{QA} = \overleftrightarrow{AQ'}$

Karena $T(P) = T(Q)$, berarti $P' = Q'$ dan $\overleftrightarrow{AP'} = \overleftrightarrow{AQ'}$

Dengan demikian, $\overleftrightarrow{PA} = \overleftrightarrow{QA}$, Jadi A, P, Q *kolinear*.

Karena A, P, Q *kolinear*.

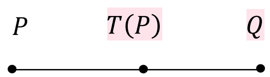
Sehingga P' titik tengah $\overleftrightarrow{PA}$ dan Q′ titik tengah $\overleftrightarrow{AQ}$,

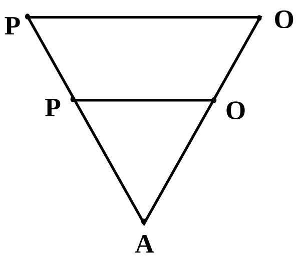
Maka $P = Q$.

Jadi, setiap $P, Q \in V$, $T(P) = T(Q)$ diperoleh $P = Q$.

Maka dikatakan T sebagai fungsi satu-satu

Dengan demikian bahwa T merupakan suatu transformasi





Contoh 2.4 Andaikan g sebuah garis dan T sebuah transformasi $T: V \rightarrow V$, yang didefinisikan sebagai:

Jika $X \in g$, maka $T(X) = X$. Jika $X \notin g$, maka $T(X)$ adalah titik tengah ruas garis dari X ke g yang tegak lurus.

Buktikan T suatu transformasi?

Penyelesaian:

- Akan dibuktikan: T surjektif

Kasus 1: untuk $X \in g$, maka $T(X) = X$

Berdasarkan definisi 2.1

Maka: $X' = X$, karena $T(X) = X' = X$

Jadi, $\forall X' \in V$, maka $\exists X \in V$, $\ni T(X) = X' = X$

Kasus 2: untuk $X \notin g$, maka $T(X)$ adalah titik tengah

Ambil sebarang $X' \in V$,

Menurut teorema dasar geometri *Euclide* bahwa "ada satu garis yang tegak lurus pada garis tertentu melalui titik di luar garis tersebut".

Sehingga, dapat dibuat sebuah segmen (ruas garis) yang tegak lurus g melalui X' dapat dinamakan $\overleftrightarrow{OX'}$.

Berdasarkan Postulat 2 bahwa: $\overleftrightarrow{OX'}$ dapat diperpanjang ke titik tertentu, misal X. Maka diperoleh: $\overrightarrow{OX'} = \overrightarrow{X'X}$

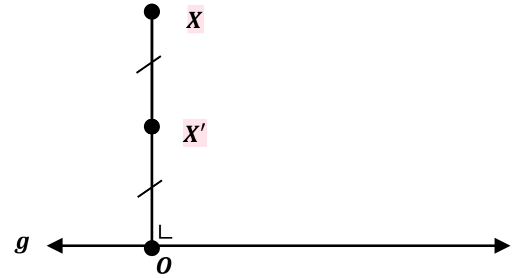
Karena: $\overrightarrow{OX'} = \overrightarrow{X'X}$ dan V bidang *Euclide*,

Maka: ada X tunggal dengan $X' \in \overrightarrow{X'X}$, untuk X' satu-satunya titik tengah $\overleftrightarrow{OX}$

Berarti: X adalah prapeta dari X'

Jadi, $\forall X' \in V,\ \exists X \in V, \ni T(X) = X'$

Dengan demikian T surjektif



- Akan dibuktikan: T injektif

  Ambil sebarang titik $X, Y \in V$ dengan $X \neq Y$

Maka, ada beberapa kemungkinan, yaitu:

1) $X \in g, Y \notin g$
   $\Longrightarrow T(X) = X' = X, T(Y) = Y' \neq X$
   $\Longrightarrow T(X) \neq T(Y)$
2) $X \notin g, Y \in g$
   $\Longrightarrow T(X) = X' \neq Y, T(Y) = Y$
   $\Longrightarrow T(X) \neq T(Y)$
3) $X \notin g, Y \notin g$
   Sehingga jelas bahwa ruas garis orthogonal X ke $g \neq$ ruas garis orthogonal Y ke g

Akan ditunjukkan bahwa $X \neq Y, \Longrightarrow T(X) \neq T(Y)$

Andaikan : $T(X) = T(Y)$

Maka:

$T(X)$ adalah titik tengah ruas orthogonal Y ke g dan X ke g

$T(Y)$ adalah titik tengah ruas orthogonal X ke g dan Y ke g

Sehingga, $X = Y$

Jadi, kontradiksi yang seharusnya $X \neq Y \Longrightarrow T(X) \neq T(Y)$.

Dengan demikian, T injektif

B. Istilah dalam Transformasi

1. Unsur Tetap

Definisi 2.2 Suatu titik A di V disebut titik tetap dari transformasi T, jika $T(A) = A$, dan apabila suatu garis l disebut garis tetap dari transformasi T, jika $T(l) = l$.

Contoh 2.5 Transformasi $T(x, y) = (x + 4, y - 3)$ tidak memiliki titik tetap tetapi memiliki garis tetap.

Bukti: Misalkan: $P(x, y)$ titik tetap

Maka: $T(P) = (x + 4, y - 3) = P = (x, y)$

- Akan dibuktikan setiap transformasi memiliki titik tetap

$x + 4 = x \Longrightarrow 4 = 0$

$y - 3 = y \Longrightarrow -3 = 0$

Jadi, T tidak memiliki titik tetap

Misalkan: $T(x, y) = (2x + y, x - y)$

$2x + y = x$ dan $x - y = y$, diperoleh:

$x + y = 0$ dan $x - 2y = 0$

Maka: $x = 0$ dan $y = 0$

Jadi, T hanya memiliki satu titik tetap yaitu $(0, 0)$

Misalkan: $A = (x, y)$ suatu titik tetap,

Maka: $(x, y) = (y, 4x)$, Sehingga $x = y$ dan $y = 4x$

Jadi diperoleh $x = 0$ dan $y = 0$;

Berarti titik $(0,0)$ merupakan satu-satunya titik tetap

- Akan dibuktikan setiap transformasi memiliki garis tetap

Diketahui bahwa $T(x,y) = (y,4x)$ apakah garis tetap?

Misal: $l \equiv ax + by + c = 0$ adalah garis tetap

1 Maka: $T(x,y) = (y,4x) = (x',y')$

Diperoleh: $y = x'; x = \frac{1}{4}y'$, Maka:

$l \equiv a\frac{1}{4}y' + bx' + c = 0$

$l \equiv bx + a\frac{1}{4}y + c = 0$

$l \equiv 4bx + ay + c = 0$

Karena l garis tetap, maka $T(l) = l = l'$

1 Sehingga diperoleh: $\frac{4b}{a} = \frac{a}{b} = \frac{4c}{c}$ dengan asumsi $a,b,c \neq 0$

3 Maka: $4b^2 = a^2$; $(b-a)c = 0;$ dan $(4b-a)c = 0$

Dibuktikan dengan kasus 1:

Jika $c \neq 0$, maka $b = a$ dan $a = 4b$ (tidak mungkin, karena dipenuhi jika $a = 0$ dan $b = 0$)

Dibuktikan dengan kasus 2:

Jika $c = 0$, maka $b \neq a$ dan $a \neq 4b$

Maka: $a = 2b$ dan $a = -2b$

Sehingga diperoleh garis tetap T yaitu:

Untuk $a = 2b$, pada $ax + by + c = 0$, maka:

$2bx + by + 0 = 0 \Longrightarrow 2x + y = 0$

Untuk $a = -2b$, pada $ax + by + c = 0$, maka:

$$-2bx + by + 0 = 0 \Longrightarrow -2x + y = 0$$

Jadi, garis tetapnya adalah $2x + y = 0$ dan $-2x + y = 0$

2. Kolineasi (tidak segaris)

Definisi 2.3 Suatu transformasi T disebut punya sifat kolineasi, jika t memetakan garis menjadi garis lagi.

Oleh karena yang diketahui bahwa suatu refleksi merupakan suatu kolineasi, maka rotasi juga suatu kolineasi, karena setiap isometri adalah suatu kolineasi. Sehingga, jika ada g adalah garis maka T adalah koleniasi jika $T(g)$ berupa garis yaitu himpunan titik $P' = T(P)$ dengan P terletak pada g

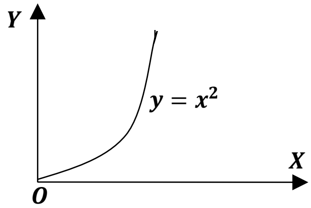
Contoh 2.6 Diketahui $f(x) = x^2$ dengan $x > 0$

Penyelesaian: Berdasarkan fungsi tersebut bahwa dipandang sebagai transformasi dengan domain sumbu X positif yang berupa garis lurus dan hasilnya kurva $y = x^2$

$f(x)$ dituliskan transformasi

$T: (x, 0) \rightarrow (x, x^2)$

Dengan rumus: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix}$



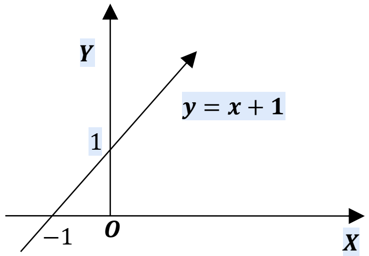
Gambar di samping mengilustrasikan hasil transformasi garis lurus (sumbu X positif) kurva $y = x^2$ yang tidak berupa garis lurus.

Maka $T: (x, 0) \to (x, x^2)$ bukan kolineasi atau fungsi $f(x) = x^2$ bukan transformasi kolineasi.

Contoh 2.7 Diketahui $f(x) = x + 1$

Penyelesaian: Berdasarkan fungsi tersebut bahwa dipandang sebagai transformasi yang dinyatakan $T: (x, 0) \to (x, x + 1)$ dengan mentransformasikan garis lurus (sumbu X) menjadi $y = x + 1$,

Dengan rumus: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x + 1 \end{pmatrix}$



Gambar di samping merupakan hasil transformasi garis lurus $y = x + 1$ dengan (sumbu X positif).

Maka $T: (x, 0) \to (x, x + 1)$ adalah kolineasi atau fungsi $f(x) = x + 1$ merupakan transformasi kolineasi.

3. Identitas

Definisi 2.4 Suatu transformasi T disebut transformasi identitas, jika dan hanya jika $T(A) = A$ untuk setiap A di V. Dinotasikan I.

4. Isometri

Definisi 2.5 Transformasi T disebut Isometri, jika untuk setiap A, B di V, berlaku: $|AB| = |T(A)T(B)|$, (jika $T(A) = A'$ dan $T(B) = B'$). Dalam istilah lain disebut isometri jika mempertahankan jarak.

$\boldsymbol{T}$ **isometri jika** $|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{T}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{T}(\boldsymbol{B})| = |\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'|$

Contoh 2.8 Diketahui $T(x,y) = \begin{cases} (x, y+1); \forall x \geq 0 \\ (x, y+2); \forall x < 0 \end{cases}$

Tunjukkan apakah T Isometri ?

Bukti: Dimisalkan $A(0,0)$ dan $B(-1,0)$

Maka: $A'(0,1)$ dan $B'(-1,2)$

Sehingga $|AB| = 1$ dan $|A'B'| = \sqrt{2}$

Karena $|AB| \neq |A'B'|$, sehingga T bukan isometri.

Dimisalkan $A(0,0)$ dan $B(1,0)$

Maka: $A'(0,1)$ dan $B'(0,4)$

Sehingga $|AB| = 1$ dan $|A'B'| = 4$

Karena $|AB| \neq |A'B'|$, sehingga T bukan isometri.

5. Involusi

Definisi 2.6 Transformasi V disebut involusi, jika $V \neq I$ dan berlaku $V^2 = I$, artinya $V = V^{-1}$.

Involusi: merupakan transformasi yang inversnya diri sendiri. Sehingga refleksi garis adalah suatu involusi.

Berdasarkan definisi bahwa: terdapat dua transformasi yaitu T dan I, serta komposisi TL

Diperoleh: $(TL)^{-1} = L^{-1}T^{-1}$,

Maka: $(TL)(L^{-1}T^{-1})$

$[(TL)L^{-1}]T^{-1} = [T(L\,L^{-1})]T^{-1} = [T.I]T^{-1} = T.T^{-1} = I$

Dengan cara yang sama juga diperoleh: $(L^{-1}T^{-1})(TL) = I$

Contoh 2.9 Diketahui $T(x, y) = (-x, kx + y)$, Tunjukkan T Involusi

Bukti: Menggunakan hasil kali (komposisi) dua transformasi

$T(x, y) = (-x, kx + y)$, maka:

$T(T(x, y)) = (-(-x), k(-x) + kx + y) = (x, y)$

Jadi, T involusi

Menggunakan matriks: $T(x, y) = (-x, kx + y)$

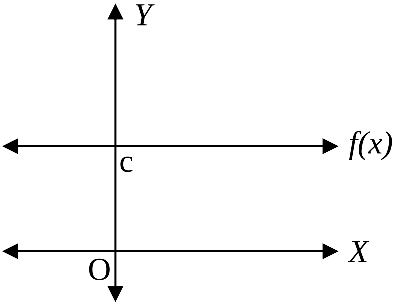
$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, maka $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$

Karena $A = A^{-1}$, maka T involusi juga.

C. Jenis Fungsi pada Transformasi

1. Fungsi Konstan

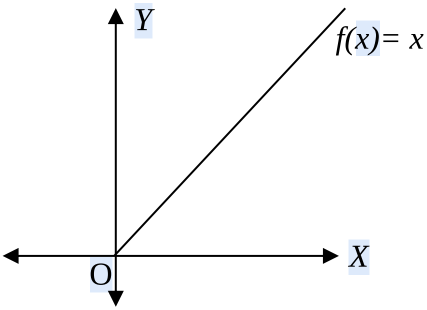
Fungsi konstan merupakan suatu fungsi f yang dinyatakan dalam $f(x) = c$, dengan c suatu konstanta. Grafiknya dilukis dalam suatu sumbu koordinat dengan domainnya sumbu X merupakan garis yang sejajar dengan sumbu X.



Gambar 2.1. Fungsi Konstanta

2. Fungsi Identitas

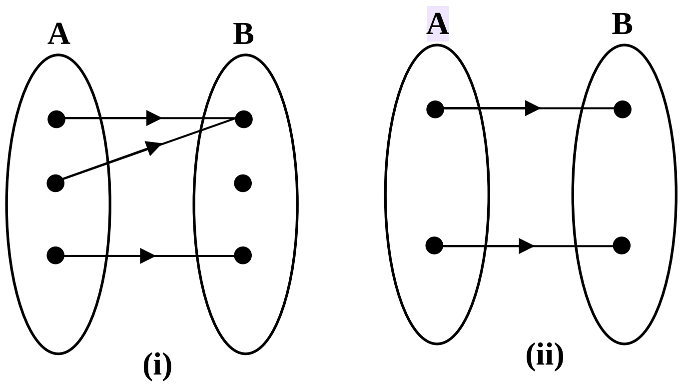
Fungsi Identitas adalah suatu fungsi f yang dinyatakan dalam $f(x) = x$. Fungsi ini di lambangkan I , sehingga $I(x) = x$.



Gambar 2.2. Fungsi Identitas

3. Fungsi Into dan Fungsi Injektif (Satu-Satu)

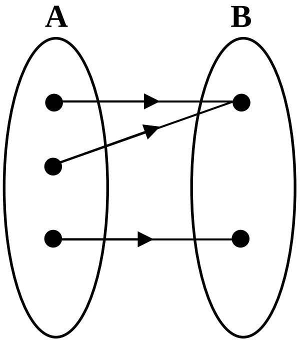
Fungsi Into	Suatu $f : A \rightarrow B$ memetakan setiap anggota A dengan tepat satu anggota B, tetapi ada anggota B yang bukan peta dari A, maka $f : A \rightarrow B$
Fungsi Injektif	Suatu $f : A \rightarrow B$ memetakan setiap anggota A dengan tepat satu anggota B, tetapi anggota B yang menjadi peta dari anggota A, maka $f : A \rightarrow B$



Gambar 2.3. : (i) Fungsi Into, (ii) Fungsi Injektift

4. Fungsi Surjektif (Onto/Pada)

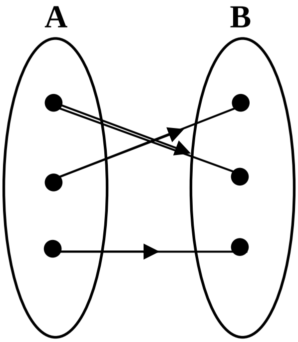
Suatu $f : A \rightarrow B$ memetakan setiap anggota A dengan tepat satu anggota B, dan setiap anggota B (tidak bersisa) menjadi peta dari anggota A, maka $f : A \rightarrow B$.



Gambar 2.4. Fungsi Surjektif

5. Fungsi Bijektif (Korespondensi Satu-Satu)

Suatu $f : A \rightarrow B$, setiap anggota B (tidak bersisa) menjadi peta dari A dan setiap anggota B adalah peta tunggal dari A



Gambar 2.5. Fungsi Bijektif

6. Fungsi Genap

Fungsi genap adalah suatu fungsi f dimana berlaku $f(x) = f(-x)$.

Fungsi genap merupakan fungsi yang pangkat dari **variabelnya bilangan genap**

Dikatakan fungsi genap dalam bentuk pecahan, jika **pangkat variabel pada pembilang dan penyebut**

semua genap atau semua ganjil.

7. Fungsi Ganjil

Fungsi ganjil adalah suatu fungsi f dimana berlaku $f(-x) = -f(x)$

Fungsi ganjil merupakan fungsi yang pangkat dari **variabelnya bilangan ganjil**

Dikatakan fungsi ganjil dalam bentuk pecahan, jika **pangkat variabel pada pembilang ganjil dan penyebut berpangkat genap, atau sebaliknya.**

8. Fungsi Linear

Fungsi linear adalah fungsi yang peubahnya paling tinggi berpangkat satu atau suatu fungsi yang grafiknya merupakan garis lurus. Bentuk umum persamaan fungsi linear adalah: $y = ax + b$ dengan a dan $b \in R, a \neq 0$

Grafik fungsi linear berupa garis lurus dengan menghubungkan titik potong dengan sumbu X dan sumbu Y pada koordinat cartesius.

Contoh 2.10. Gambarlah grafik yang persamaannya: $y = 3x - 4$.

Penyelesaian: Untuk menggambar grafik fungsi linear dapat digunakan dua cara yaitu menggunakan tabel dan menentukan titik potong

➢ Menggunakan Tabel

$y = 3x - 4$		
x	y	(x, y)

0	-4	(0, - 4)
1	-1	(1, -1)
2	2	(2, 2)
3	4	(3, 4)
4	8	(4, 8)

- Menggunakan titik potong pada sumbu X dan Y

  Perpotongan dengan sumbu X, dengan $y = 0$

  $\Leftrightarrow y = 3x - 4$

  $\Leftrightarrow 0 = 3x - 4$

  $\Leftrightarrow 3x = 4 \Leftrightarrow x = {}^4/_3$

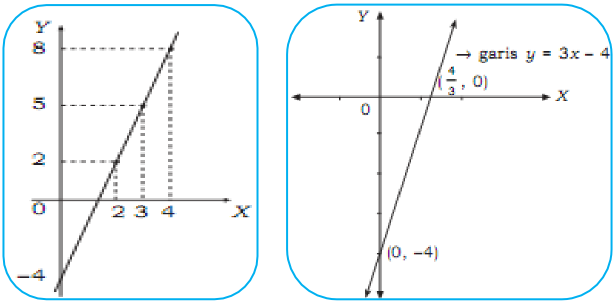
  Jadi, koordinat titik potongnya $(4/3, 0)$

  Perpotongan dengan sumbu Y, dengan $x = 0$

  $\Leftrightarrow y = 3x - 4$

  $\Leftrightarrow y = (3 \cdot 0) - 4 \Leftrightarrow y = -4$

  Jadi, koordinat titik potongnya $(0, -4)$



Gambar 2.6. Persamaan garis : $y = 3x - 4$

D. Hasil Kali (Komposisi) pada Transformasi

Definisi 2.7. Hasil Kali Transformasi Andaikan F dan G dua transformasi, untuk $: V \rightarrow V, G: V \rightarrow V$, maka komposisi dari F dan G ditulis $(G \circ F)$, didefinisikan sebagai: $(G \circ F)(P) = (G[F(P)]), \forall P \in V$.

Teorema 2.1. Hasil Kali Transformasi Jika $F: V \rightarrow V$, dan $G: V \rightarrow V$ masing-masing merupakan transformasi, Maka hasil kali $H = G \circ F : V \rightarrow V$ adalah juga transformasi.

Bukti: Syarat transformasi jika bersifat bijektif.

Akan dibuktikan H surjektif dan injektif

- H Surjektif

Karena F adalah transformasi, maka:

daerah nilai F adalah seluruh bidang F

daerah asal G juga seluruh V , karena G juga transformasi.

Ambil $y \in V$, apakah ada X sehingga $H(x) = y$?

Karena G transformasi, Maka untuk setiap $y \in V$, ada $z \in V$.

sehingga $y = G(z)$

Karena F suatu transformasi, Maka pada z , ada $\in V$.

sehingga $z = F(x)$.

Maka $y = G\ [F(x)]$ atau $y = (G \circ F)(x)$.

Jadi $y = H(x)$.

- H Injektif

Dikatakan H injektif, jika $P \neq Q$, maka $H(P) \neq H(Q)$.

Andaikan $H(P) = H(Q)$, maka $G[F(P)] = G\,[F(G)]$.

Karena G injektif, maka F$(P) = F(Q)$.

Karena F injektif, maka $P = Q$.

Hal ini kontradiksi dengan pengandaian, seharusnya adalah bahwa $P \neq Q$. Jadi pengandaian bahwa $H(P) = H\,(Q)$ salah

4 Dengan demikian haruslah $H(P) \neq H(Q)$

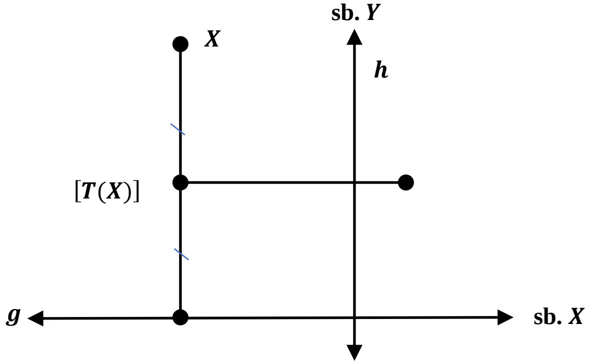
Karena H injektif dan surjektif, maka H bijektif, berarti bahwa H suatu transformasi.

Contoh 2.11 Andaikan Garis g sebagai sumbu X dan garis h sebagai sumbu Y suatu sistem koordinat ortogonal. Dimana titik potong h dan g di ambil sebagai titik asal.

Penyelesaian: Misalkan:

4 Jika $X \in g$, maka $T(X) = X$.

Jika $X \notin g$, maka $T(X)$ adalah titik tengah ruas garis dari X ke g yang tegak lurus



Ambil sebuah garis $h \perp g$ dan

M_h adalah refleksi dari garis h

Jadi, hasil kali $M_h[T(X)] = Y$ adalah suatu transformasi pula,

Sehingga $Y = (M_h {}^\circ T)(X)$

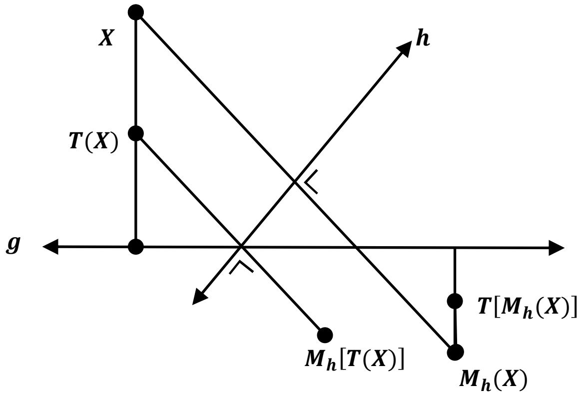
Andaikan $X = (x, y)$, maka:

$T(X) = (x, \frac{1}{2}y)$ dan $M_h[T(X)] = (-x, \frac{1}{2}y)$

Karena: $M_h[T(X)] = T[M_h(X)]$

Maka: $M_h \circ T(X) = T(X) {}^\circ M_h$.

Jadi, hasil kali transformasi **bersifat Komutatif,** akan tetapi sifat tersebut tidak selalu berlaku.



Berdasarkan yang diketahui bahwa $M_h[T(X)] = T[M_h(X)]$, maka $M_h \circ T(X) = T(X) {}^\circ M_h$.

Pada gambar terlihat bahwa garis g dan h tidak tegak lurus

Maka: $M_h[T(X)] \neq T[M_h(X)]$

Jadi, $M_h \circ T(X) \neq T(X) {}^\circ M_h$

4

Sehingga, dapat dikatakan bahwa: apabila S dan T transformasi,

Maka: $S \circ T \neq T \circ S$

Akan dibuktikan $M_h[T(X)] \neq T[M_h(X)]$

Karena, hasil kali transformasi T tidak terbatas pada dua transformasi, sehingga ada T lain pada hasil kali tersebut.

Misalkan: hasil kali transformasi T adalah $T_1 \circ T_2$,

Maka: ada T lain yaitu T_3

Sehingga hasil kali transformasi T dapat dituliskan: $T_3(T_2T_1)$

5

Andaikan: $P' = T_1(P),\ P'' = T_2(P'),\ P''' = T_3(P'')$

Maka:

Cara 1:	Cara 2:
$[T_3(T_2T_1)](P) = T_3[T_2T_1(P)]$	$[(T_3T_2)T_1](P) = (T_3T_2)[T_1](P)$
$= T_3[T_2\{T_1(P)\}]$	$= (T_3T_2)(P')$
$= T_3[T_2(P')]$	$= T_3[T_2(P')]$
$= T_3(P'')$	$= T_3(P'')$
$= P'''$	$= P'''$

8

Dapat dikatakan bahwa: $T_3(T_2T_1) = (T_3T_2)\ T_1 = T_3T_2T_1$

Jadi, hasil kali transformasi juga **bersifat asosiatif.**

"Hasil kali (komposisi) transformasi tidak hanya terbatas oleh dua transformasi, tetapi dapat dilakukan dengan beberapa transformasi".

E. Transformasi sebagai Hasil Balikan (Invers)

Suatu transformasi pada bidang V adalah fungsi bijektif, apabila daerah asal adalah V dan daerah hasilnya juga V.

Teorema 2.2 Jika g sebuah garis dan M_g refleksi pada garis g.

Maka: $M_g M_g(P) = P$, sehingga dapat ditulis: ${M^2}_g\ (P) = P$.

Dimana, M^2 adalah suatu transformasi yang memetakan setiap titik pada dirinya (Transformasi Identitas) dilambangkan I.

Jadi, $(P) = P,\ \ \forall P$.

Contoh 2.12 Jika I adalah identitas, maka:

Apakah I suatu transformasi?

Apakah I Injektif juga?

Penyelesaian: Untuk menunjukkan I transformasi, maka I haruslah bijektif, dimana I juga harus injektif dan surjektif sebagai syarat suatu transformasi.

- Untuk I injektif

Akan ditunjukkan bahwa:

$\forall x_1, x_2 \in V$ dimana $x_1 \neq x_2$, maka $I(x_1) \neq I(x_2)$

Ambil $x_1, x_2 \in V$, dengan $x_1 \neq x_2$

Berdasarkan definisi identitas bahwa:

$x_1 \in V \ \Rightarrow \ I(x_1) = x_1$ dan

$x_2 \in V \ \Rightarrow \ I(x_2) = x_2$

Karena $x_1 \neq x_2$, maka $I(x_1) \neq I(x_2)$

Jadi, I injektif

- Untuk I surjektif

  Akan ditunjukkan bahwa: $\exists x \in V, \ni I\ (x) = x$

  Ambil $y' \in V$, Berdasarkan definisi identitas bahwa:

  Jika $\in V$, maka $I(y) = y' = y$

  Sehingga: $\forall y' \in V, \exists y \in V, \ni y' = I\ (y) = y$

  Karena: $y' = y$. Jadi, I surjektif.

  Benar bahwa I suatu transformasi dan berlaku juga I injektif.

Karena yang diketahui bahwa T merupakan suatu transformasi dan I juga suatu transformasi, maka berlaku sifat berikut:

$TI(P) = IT(P) = I[T(P)] = T(P),\ \forall P$ Maka: $TI = T$

$IT(P) = I[T(P)] = T(P),\ \forall P$ Maka: $IT = T$

Sehingga $TI = IT = T$

Dengan demikian, transformasi identitas I berperan sebagai:

1) Bilangan I pada himpunan transformasi-transformasi dengan operasi perkalian antara transformasi-transformasi.
2) Pada himpunan bilangan-bilangan real dengan operasi perkalian, untuk setiap $x \neq 0$, ada balikan x^{-1}, sehingga $x(x^{-1}) = (x^{-1})x = 1$

Dalam transformasi, jika terdapat dua transformasi, misal T dan Q, yangmana hasil kalinya adalah I (transformasi identitas), Maka: dapat ditulis $TQ = QT = I$. Sehingga transformasi balikan dari T ditulis: T^{-1}, Dengan demikian bahwa: $TT^{-1} = T^{-1}T = I$.

Teorema 2.3. Setiap transformasi T memiliki balikan (invers)

Bukti: Diketahui T merupakan suatu transformasi

➢ Akan dibuktikan bahwa: T memiliki balikan

Misalkan: balikan dari T adalah L, maka $TL = LT = I$

Karena T suatu transformasi, maka T bijektif

Karena T bijektif, maka $\forall X \in V$,

1 Sehingga prapeta $A \in V, \ni T(A) = X$

Dapat ditentukan bahwa: $L(X) = A$

Karena: $T(A) = X$ dan $L(X) = A$, maka $T[L(X)] = X$

Jadi, $L(X)$ adalah prapeta dari X.

Maka diperoleh: $T[L(X)] = X$ atau $(TL)(X) = X$

Karena $(TL)(X) = X$, (berdasarkan definisi identitas)

Maka: $I(X) = X$

5 Sehingga: $(TL)(X) = I(X) = X$,

Jadi, $TL = I$

➢ Akan dibuktikan untuk: $(LT)(X) = L[T(X)]$

Andaikan $T(X) = B$, karena transformasi

9 Maka: $\exists x$ prapeta dari B dengan: $X = L(B)$

Karena: $T(X) = B$, maka $[T(X)] = L(B) = X$.

Sehingga: $(LT)(X) = X = I\,(X\,)$, $\forall X \in V$.

Maka: $LT = I$

Dengan demikian, $TL = LT = I$

➢ Akan dibuktikan bahwa L adalah suatu transformasi.

Diketahui: $L(X) = A$, artinya $L(X)$ prapeta dari X

Maka: $T(A) = X$, sehingga $T[L(X)] = X$

Andaikan: $L(X_1) = L(X_2)$ dan $T(A_1) = X_1$, $T(A_2) = X_2$

Karena: $L(X) = A$, maka $L(X_1) = A_1$, $L(X_2) = A_2$

Sehingga diperoleh: $A_1 = A_2$ dan $X_1 = X_2$,

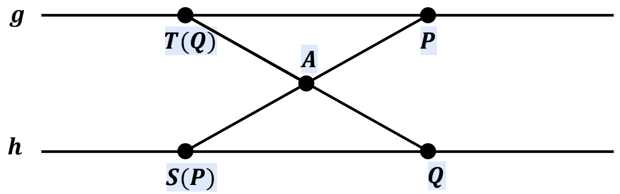
Karena: $L(X_1) = L(X_2)$

Dengan demikian bahwa transformasi T memiliki balikan yang disimbolkan $L = T^{-1}$.

Contoh 2.13. Jika ada dua garis g dan h yang sejajar dan titik A. Padanan S didefinisikan sebagai:

$S(P) = \overrightarrow{PA} \cap h$, untuk $\forall P \in g$

$T(Q) = \overrightarrow{QA} \cap g$, untuk $\forall Q \in h$



Penyelesaian: Berdasarkan gambar di atas bahwa:

Daerah asal S adalah garis g dan daerah asal T adalah garis h.

Daerah nilai S adalah garis h dan daerah nilai T adalah garis g.

8 Untuk $P \in g$, maka $(TS)(P) = T[S(P)] = P = I(P)$

Untuk $Q \in h$, maka $(ST)(Q) = S[T(Q)] = Q = I(Q)$

Sehingga: $TS = ST = I$

Dengan demikian bahwa T balikan dari S dan S balikan dari T.

Teorema 2.4. Setiap transformasi hanya memiliki satu balikan (invers)

Bukti: Andaikan T suatu transformasi dengan dua balikan: S_1 dan S_2

4 Karena S_1 balikan dari T,

Maka: $(TS_1)(P) = (S_1T)(P) = I(P), \forall P$

Karena S_2 balikan dari T,

9 Maka: $((TS_2)(P) = (S,T)(P) = 1(P), \forall P$

Sehingga: $(TS_1)(P) = (TS_2)(P), \Leftrightarrow T[S_1(P)] = T[S_2(P)]$

Karena T transformasi, maka $S_1(P) = S_2(P), \forall P$

Sehingga: $S_1 = S_2$

Jadi, balikan T adalah $S_1 = S_2 = S$

Dengan demikian transformasi T hanya memiliki satu balikan (invers)

Teorema 2.5. Balikan (invers) setiap pencerminan pada garis adalah pencerminan itu sendiri.

Bukti: Misalkan: pencerminan pada garis g adalah M_g

Andaikan $M_g(X) = Y$ dan $X \in g$

Maka: $M_g\left[M_g(X)\right] = X$ atau

$\left(M_g M_g\right)(X) = I(X),\ \forall X \in g$

$M_g \circ M_g = I$

Jadi: untuk setiap X diperoleh: $M_g \circ M_g = I$

Dengan demikian bahwa: $M^{-1}{}_g = M_g$

Definisi 2.8. Suatu transformasi yang balikannya adalah transformasi itu sendiri dinamakan suatu *involusi*

Bukti: Andaikan T dan S transformasi

Maka masing-masing memiliki balikan, yaitu T^{-1} dan S^{-1}

Sehingga: hasil kali transformasi tersebut, yaitu $T \circ S$ juga suatu transformasi.

Jadi ada balikan $(T \circ S)^{-1}$

Teorema 2.6. Apabila T dan S transformasi-transformasi,

Maka: $(T \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ T^{-1}$

Bukti: Diketahui bahwa: $(T \circ S)^{-1} \circ (T \circ S) = I$

$(S^{-1} \circ\ T^{-1})\circ (T \circ S)\ \Leftrightarrow S^{-1} \circ (T^{-1} \circ T\ ) \circ S$

$\Leftrightarrow S^{-1} \circ \; I \circ S =$
$S^{-1} \circ S = I$ (Benar)

Karena transformasi hanya memiliki satu balikan

5 Maka: $(T \; o \; S)^{-1} = S^{-1} \circ T^{-1}$.

Jadi, balikan hasil kali transformasi adalah hasil kali balikan-balikan transformasi dengan urutan yang terbalik.

Contoh 2.14. Pada suatu sistem sumbu ortogonal $X \circ Y$ didefinisikan transformasi F dan G adalah

1 $\forall P(x, y), \quad F(P) = \left(x + 2, \frac{1}{2}y\right)$ dan $G(P) =$ $(x - 2{,}2y)$

Penyelesaian: Diketahui bahwa:

2 $(FG)(P) = F[G(P)]$, Maka: $F[(x - 2{,}2y)] =$ $(x, y) = P$

2 $(GF)(P) = G[F(P)]$, Maka: $G\left[\left(x = 2, \frac{1}{2}y\right)\right] =$ $(x, y) = P$

Jadi, $(FG)(P) = (GF)(P) = P = I(P), \forall P$

atau $FG = GF = I$

Dengan demikian bahwa: F dan G balikan satu sama lain, dapat ditulis $G \; = \; F^{-1}$

Contoh 2.15. Pada sebuah sistem sumbu ortogonal ada garis

1 $g = \{(x, y)|y = x\}$ dan $h = \{(x, y)|y = 0\}$.

Tentukan P sehingga $(M_h M_g)(P) = R$, dengan $R = (2, 7)$.

Penyelesaian: Andaikan $P = (x, y)$, maka diperoleh:

$\left(M^{-1}{}_g\, M^{-1}{}_h\right)\left(M_h M_g\right)(P) = (M^{-1}{}_g\, M^{-1}{}_h)(R)$

Jadi: $P = M^{-1}{}_g[\, M^{-1}{}_h(R)]$

Karena: $R = (2, 7)$ dan $M^{-1}{}_h = M_h$

Maka: $M^{-1}{}_h(R) = M_h(R) = (2, -7)$

Sehingga:

$$M^{-1}{}_g[\, M^{-1}{}_h(R)] = M^{-1}{}_g\,[\, M^{-1}{}_h(2, -7)]$$

$$P = (-7, 2)$$

Sehingga diperoleh: $P = (-7, 2)$

F. Transformasi sebagai grup

Teorema 2.7. Himpunan Penyusun Grup

Suatu grup adalah himpunan x dengan aturan operasi komposisi yang memenuhi sifat berikut:

1) Operasi komposisi bersifat tertutup
2) Operasi komposisi bersifat asosiatif
   Untuk sebarang $a, b, c \in x$,
   Maka: $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
3) Memuat unsur netral (unsur satuan/unsur identitas):
   $\forall a \in x, a \circ I = I \circ a = a$
4) Memiliki invers:
   Untuk setiap $a \in x$, terdapat $a \in x^{-1}$ dan $a \circ x = x \circ a = I$
   Apabila dipenuhi juga untuk: $a \circ b = b \circ a$, maka disebut juga grup komutatif (Abel)

Bukti:

1) Untuk Operasi komposisi bersifat tertutup

Berdasarkan teorema 2.1 dan definisi 2.3, maka kolineasi merupakan transformasi.

Misalkan: V, W adalah kolineasi dan g adalah garis

Maka: $W(g) = g'$

$$(VW)(g) = V(W(g)) = V(g') = g''$$

Karena: W kolineasi, maka: g' adalah garis

Karena: V kolineasi, maka: g'' pun garis.

Jadi, sifat tertutup terpenuhi,

Karena: VW juga merupakan kolinesi

2) Operasi komposisi bersifat asosiatif

11 Misalkan: T, V, W transformasi,

Maka: $[W(VT)](A) = W\big((VT)(A)\big)$

$= W\ \Big(V\big(T(A)\big)\Big) \quad = WV\big(T(A)\big) \quad = [(WV)T](A)$

Jadi, $W(VT) = (WV)T$, maka bersifat asosiatif

3) Unsur netral transformasi adalah identitas

4) Invers merupakan transformasi

Misalkan: U adalah isometri dan g adalah garis,

Maka: $U(g) = g'$ akan berupa garis

Andaikan: V kolineasi dan g garis

6 Maka: terdapat garis h yang memenuhi: $V(h) = g$

Sehingga: $V^{-1}(g) = V^{-1}\big(V(h)\big) = (V^{-1}V)(h) = I(h) = h$

Dengan demikian bahwa: V^{-1} pun kolineasi, karena membawa garis lurus g menjadi garis luruh h

Contoh 2.16 Misalkan g suatu garis pada bidang V.

Didefinisikan suatu pemetaan dengan aturan:

4 i) Untuk sebarang titik A di bidang V, maka: $T(A) = A$

ii) Jika titik A pada garis g, maka: $T(B) = B$

iii) $\overleftrightarrow{AB}$ tegak lurus garis g

iv) Jarak B ke A setengah jarak A ke g

1) Buktikan bahwa T suatu transformasi
2) Buktikan bahwa T suatu kolineasi
3) Tentukan nilai tetap dan garis tepatnya (jika ada)

Penyelesaian: (buktikan sebagai latihan)

G. Latihan Soal

Kerjakan soal berikut dengan tepat dan benar

1. Diketahui titik-titik T(-a,-b) dan T'(b,a) = σ_g(T). Tentukan bahwa persamaan g adalah . . .
2. Diketahui sebuah fungsi g, dengan sumbu x pada bidang v, Apabila $P(x, 0)$, maka: $g(P) = (x, x^2)$
   a. Tentukan peta dari titik $K(2, 0)$ oleh ?
   b. Apakah $L(13, 16)$ merupakan daerah hasil ?
   c. Gambarkan daerah nilai ?
3. Misalkan V bidang *euclides* dan A sebuah titik tertentu pada V. Ditetapkan relasi T, maka: $T\ (P) = A, P = A, P \neq A$. Apakah relasi T merupakan fungsi?
4. Jika $P \in v, P \neq A, T(P) = Q$, merupakan titik tengah ruas garis $\overline{AP}$. Apakah relasi T merupakan fungsi?
5. $T: V \to V$, didefinisikan sebagai berikut:
   Apabila $P(x, y)$, maka:
   (i) $T(P) = (x + 1, y)$, untuk $x \geq 0$;
   (ii) $T(P) = (x - 1, y)$, untuk $x < 0$.
   Tentukan: T injektif dan suatu transformasi?
6. Diketahui tiga titik A, R, S yang berlainan dan tidak segaris. Ada padanan T yang didefinisikan: $T(A) = A,\ T(P) = P'$, sehingga P titik tengah $\overline{AP}$. Maka:
   a. Lukislah $R' = T(R)$
   b. Lukislah Z sehingga $T(Z) = S$
   c. Apakah T suatu transformasi?

7. Diketahui koordinat titik $P = (0, 0)$, dengan:
   $A_1 = \{(x, y)|x^2 + y^2 = 9\}$; $A_2 = \{(x, y)|x^2 + y^2 = 25\}$
   $T: A_1 \to A_2$ adalah suatu padanan,
   Apabila $X \in x_1$, maka: $T(X) = X' = \overleftrightarrow{PX} \cap A_2$
   a. Tentukan $T(B)$, jika $B = (-1, 0)$
   b. Tentukan prapeta dari $C(4, 3)$
   c. Apabila Z sebarang titik paa daerah asal T, tentukan jarak ZZ', dimana $Z' = T(Z)$
   d. Apabila E dan F dua titik pada daerah asal T, apakah dapat dikatakan tentang jarak $E'F'$?
8. Garis k dan l tidak sejajar. Buktikan bahwa X dan Y satu-satunya pasangan yang memenuhi persyaratan.
9. Dua garis g dan h tidak sejajar. A sebuah titik yang tidak terletak pada g dan h.
   a. Tentukan semua titik X dan Y pada h , sehingga A titik tengah ruas garis $\overline{XY}$, $A \notin g$, $A \notin h$.
   b. Tentukan semua $x \in g$, $y \in h$, $\ni$ A titik tengah $\overline{XY}$.
10. Diketahui sebuah titik K dan ruas garis $\overline{AB}$, $K \notin \overline{AB}$ dan sebuah garis g sehingga $g \parallel \overleftrightarrow{AB}$ dan jarak K dan $\overleftrightarrow{AB}$ adalah dua kali lebih panjang dari jarak antara K dan g. Ada juga padanan T dengan daerah asal $\overline{AB}$ dan daerah nilai g sehingga apabila $P \in \overline{AB}$ maka $T(P) = P' = \overleftrightarrow{KP} \cap g$, tentukan:
    a. Apakah bentuk himpunan peta-peta P' kalau P bergerak pada $\overline{AB}$
    b. Buktikan bahwa T injektif.
11. Diketahui: $f: v \to v$, jika $P(x, y)$ maka $f(P) = (|x|, |y|)$
    a. Tentukan $f(A)$, jika $A = (-3, 6)$
    b. Tentukan semua prapeta dari titik $B(4, 2)$
    c. Apakah bentuk daerah nilai ?
    d. Apakah f suatu transformasi ?

12. Jika garis s adalah sumbu x dan t adalah sumbu y dan berpotongan di titik A. Buktikan bahwa $M_t M_s(B) = A$, jika dan hanya jika $A = B$
13. Jika s adalah sumbu y dan $t = \{(x, y)|y = -x\}$, maka tentukan:
    a. Persamaan garis $R_s R_t(s)$
    b. $R_s R_t(P)$, jika $P(2, 3)$
14. Diketahui jika $k = \{(x, y)|y = 0\}$, $n = \{(x, y)|x = 3\}$, dan S adalah transformasi yang di definisikan: jika $R \in k$, maka $S(R) = R$, dan jika $R \notin k$, maka $S(R)$ adalah titik tengah segmen tegak lurus dari R ke k.
    a. Tentukan koordinat $R_s R_t(s)$, jika $P(-2, 3)$ dan $R(x, y)$
    b. Tentukan koordinat $R_t R_s(P)$, jika $P(2, 3)$ dan $R(x, y)$
15. Andaikan s adalah sumbu y dan $r = \{(x, y)|y = -x\}$, jika S adalah transformasi yang di definisikan: jika $P \in s$, maka $S(P) = P$ dan jika $P \notin s$, maka $S(P)$ adalah titik tengah segmen tegak lurus dari P ke s, $P(x,, y)$ sebarang titik. Tentukan koordinat $SR_s(P)$ dan selidiki apakah $SR_s(P) = R_s S(P)$?
16. Diketahui $g = \{(x, y)|y = 0\}$ dan $h = \{(x, y)|y = x\}$. Jika S suatu transformasi pada titik $A(2, -8)$ dan $P(x, y)$. Tentukan $R_h R_g S(A)$
17. Misalkan s adalah sumbu y, $t = \{(x, y)|x = 1\}$ dan u adalah persamaan garis $y = x$. Tentukan titik B sedemikian sehingga $R_h R_g R_u(B) = (5, 6)$
18. Jika s suatu garis, W_s suatu transformasi yang didefinisikan untuk semua titik C, maka berlaku:
    (i) Jika $C \in s$, maka $W_s(C) = C$
    (ii) Jika $C \notin s$, maka $W_s(C)$ adalah titik tengah segmen tegak lurus dari titik C ke s
    a. Tentukan koordinat $W_s(C)$ untuk $C(4, 2)$, jika $s = \{(x, y)|x = 2\}$,

b. Tentukan titik C sedemikian sehingga $R_sR_t(C) = (10, 2)$, jika s adalah sumbu y dan $t = \{(x, y)|x = 2\}$

19. Misalkan t adalah sumbu y dan s adalah persamaan garis $y = -x$. Tentukan titik A sedemikian hingga $R_sR_t(A) = (3, 4)$.

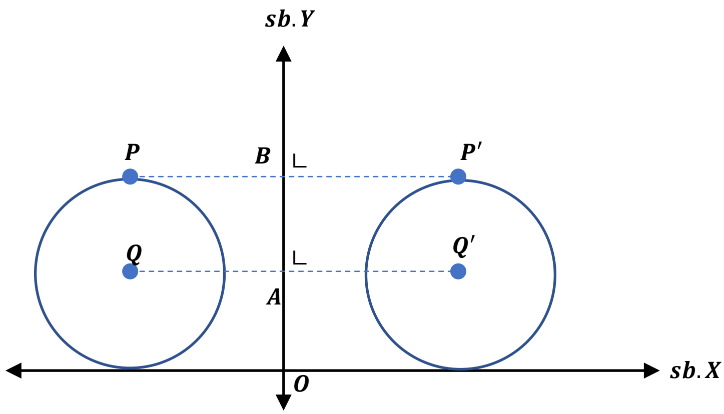
20. Diketahui garis g adalah sumbu X sebuah orthogonal dan $h = \{(x, y)|y = x\}$, maka tentukan:
   a. Persamaan garis $M_h[M_g(g)]$
   b. $P" = M_h[M_g(P)]$ jika $P = (0, 3)$
   c. $Q" = M_g[M_h(Q)]$ jika $Q = (3, -1)$
   d. $R" = M_g[M_h(R)]$ jika $R = (x, y)$
   e. Besarnya $\angle ROR"$, jika O titik asal

BAB 3

PENCERMINAN (REFLEKSI)

A. Definisi Pencerminan

Ketika anda bercermin, apa yang anda lihat? Apakah memiliki bentuk dan ukuran yang sama?. Untuk mengetahuinya, cobalah untuk mengamati antara diri anda dan bayangannya, serta jarak anda terhadap cermin. Dengan demikian anda akan mengetahui beberapa sifat-sifat dari pencerminan. Sebelum mengenal tentang sifat-sifatnya, perlu di ketahui terlebih dahulu definisi dari pencerminan. Pencerminan (Refleksi) merupakan suatu transformasi yang memindahkan setiap titik pada bidang dengan menggunakan sifat bayangan dari titik-titik yang akan dipindahkan.



Gambar 3.1. Pencerminan Lingkaran

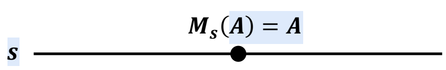
Perhatikan gambar di atas, terdapat dua lingkaran yang terletak berdekatan, kita dapat menganggap sumbu Y sebagai sumbu pencerminan, sehingga dapat dinyatakan bahwa:

1. Lingkaran Q kongruen dengan lingkaran Q'
2. Jarak setiap titik-titik lingkaran Q dan lingkaran Q' terhadap cermin sama.
3. Sudut yang dibentuk dari garis yang menghubungkan setiap titik bayangannya terhadap sumbu pencerminan adalah siku-siku.

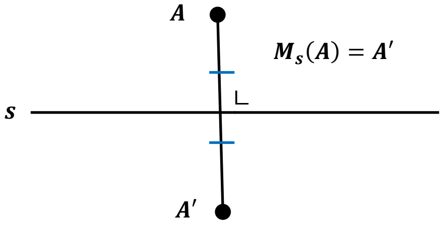
Jika suatu bangun geometri, misalkan lingkaran (gambar 3.1) dicerminkan terhadap garis tertentu, maka bayangan dari bangun tersebut kongruen dengan bangun semula. Untuk dapat melakukan pencerminan, harus ada atau ditentukan dahulu sebuah garis pada sumbu pencerminannya. Matriks pencerminan dilambangkan dengan (M_s), dimana s adalah sumbu pencerminan.

Definisi 3.1 Pencerminan (refleksi) pada sebuah garis s merupakan suatu pemetaan (fungsi) yang dilambangkan M_s, dimana didefinisikan untuk sebarang A pada bidang V dengan syarat:

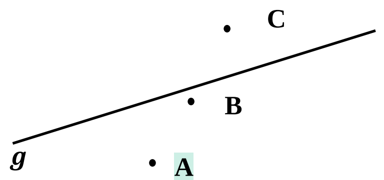
1. Jika $A \in s$, maka $M_s(A) = A$



2. Jika $A \notin s$, maka $M_s(A) = A'$, garis s adalah sumbu $\overline{AA'}$



Contoh 3.1 Misalkan diberikan titik-titik A, B, C serta garis g seperti gambar dibawah ini:



Buktikan dan Lukislah :

1) Titik $A \in g$ sehingga $A' = M_g(A)$
2) Titik $B \in g$ sehingga $B' = M_g(B)$
3) Titik $C \in g$ sehingga $C' = M_g(C)$

Penyelesaian:

1) Karena $\mathrm{A}' = \mathrm{M_g(A)}$ dan $\mathrm{A} \in \mathrm{g}$,

Maka: g merupakan sumbu dari $\overleftrightarrow{\mathrm{A'A}}$, artinya A' terletak pada garis l yang melalui A dan tegak lurus terhadap g,

Sehingga: apabila $\{\mathrm{N}\} = \mathrm{l} \cap \mathrm{g}$, Maka: $\mathrm{AN} = \mathrm{NA}'$ dengan A' terletak pada sisi yang berbeda oleh g.

2) Karena $B' = M_g(B)$ dan $B \in g$, maka $B' = B$.

3) Karena $C' = M_g(C)$ dan $C \in g$,

Maka: g merupakan sumbu dari $\overline{CC'}$.

Akibatnya: C' terletak pada garis m yang melalui C dan

dan C' tegak lurus g,

Sehingga: jika $\{M\} = m \cap g$, maka $CM = MC'$ dan C dengan C' terletak pada sisi yang berbeda oleh g.

Untuk mengetahui sifat-sifat dari pencerminan, maka ditunjukkan terlebih dahulu, pencerminan merupakan suatu transformasi.

Misalkan: diketahui daerah asal M adalah semua bidang V pada garis s, maka:

➢ Akan ditunjukkan bahwa M_s surjektif

5 Kasus 1: andaikan $X' \in s$, maka $X = X'$ karena $M_s(X) = X = X'$

Kasus 2: andaikan $X' \notin s$, berdasarkan sifat geometri Euclide,

Maka: $\exists\, X \in V$, sehingga s menjadi sumbu $\overleftrightarrow{XX'}$

Berarti bahwa: $M_s(X) = X'$, dimana X' memiliki prapeta

Jadi, M_s surjektif

➢ Akan ditunjukkan bahwa M_s injektif

Andaikan: $A \neq B$, maka:

6 Kasus 1: $A \in s$ dan $B \in s$, maka

$A' = M_s(A) = A$ dan $B' = M_s(B) = B$

Jadi, $A \neq B$ (benar)

6 Kasus 2: $A \in s$ dan $B \notin s$, maka

$A' = M_s(A) = A$ dan $B' = M_s(B)$ dengan $B \notin s$

Jadi, $A \neq B$ (benar)

Kasus 3: $A \notin s$ dan $B \notin s$

Andaikan $M_s(A) = M_s(B)$ atau $B' = A'$

Maka: $\overleftrightarrow{A'A} \perp s$ dan $\overleftrightarrow{B'B} \perp s$, yang berrti bahwa dari satu titik A' ada garis berlainan tegak lurus pada s (**mustahil**).

Jadi, pengandaian salah untuk: $A \neq B$ dan $B' = A'$, $M_s(A) = M_s(B)$

Sehingga jika $A \neq B$ maka $M_s(A) \neq M_s(B)$

Jadi, M_s injektif

Berdasarkan pembuktian tentang definisi pencerminan yang merupakan suatu transformasi, sehingga memunculkan beberapa teorema pencerminan, diantaranya adalah:

Teorema 3.1 Pencerminan pada garis merupakan suatu isometri

Bukti: Misalkan: Jika $A' = M_s(A)$ dan $B' = M_s(B)$, maka $AB = A'B'$

Ambil sebarang $A, B, A', B' \in V$,

Berdasarkan definisi pencerminan: $M_s(A) = A'$ dan $M_s(B) = B'$

Akan ditunjukkan $AB = A'B'$

Kasus 1:

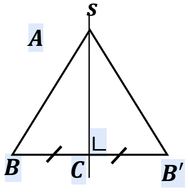
Jika $A, B \in s$, maka $A' = M_s(A) = A$ dan $B' = M_s(B) = B$

Jadi, $AB = A'B'$(benar)

Kasus 2:

Jika $A \in s$ dan $B \notin s$, maka:

$M_s(A) = A' = A$ dan $M_s(B) = B'$



Perhatikan gambar di samping

Perhatikan: ΔABC dan $\Delta AB'C$

$AC = A'C$ (berimpit), $m\angle ACB = m\angle ACB'$ (siku-siku)

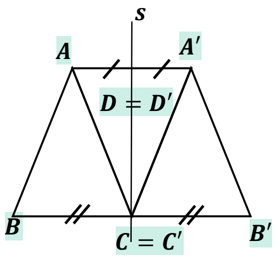
$BC = B'C$ (simetri terhadap sumbu s)

Jadi, diperoleh $\Delta ABC \cong \Delta AB'C$, sehingga $AB = A'B'$

Kasus 3:

Jika $A, B \notin s$, dan

$M_s(A) = A'$, $M_s(B) = B'$



Perhatikan: ΔACD dan $\Delta A'CD$

$DC = DC'$ (berimpit), $m\angle ADC = m\angle A'D'C'$ (siku-siku)

$AD = A'D$ (simetri terhadap sumbu s)

Jadi, diperoleh $\Delta ACD \cong \Delta A'D'C'$ $(s - sd - s)$

Perhatikan: ΔABC dan $\Delta A'B'C'$

$AC = A'C'$ (bukti kasus 2), $m\angle ACB = 90° - m\angle ACD$

$BC = B'C'$ (simetri terhadap sumbu s)

Jadi, diperoleh $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$ $(s - sd - s)$, sehingga $AB = A'B'$

Berdasarkan kasus 1, 2, 3 bahwa jika $A' = M_s(A)$ dan $B' = M_s(B)$, Maka: $AB = A'B'$

Teorema 3.2 Pencerminan merupakan suatu involusi

Bukti: Jika M_s merupakan pencerminan terhadap sumbu garis s, maka:

Akan ditunjukkan bahwa: $M_s^{-1}.M_s = I$ dan $M^{-1}{}_s = M_s$

Berdasarkan definisi pencerminan : $A' = M_s(A)$,

$$M_s^{-1}.M_s(A) = M_s^{-1}(A') = A$$

Jadi, $M_s(A) = A$, dengan $A' = A$

Sehingga: $M^{-1}{}_s = M_s$

Karena: $M_s^{-1} = M_s$, maka: $M_s^{-1}.M_s = M_s.M_s^{-1} = M_s^2 = I$

Teorema 3.3 Titik tetap dari pencerminan M_s adalah semua titik pada s

Garis tetap dari M_s adalah garis s dan semua garis yang tegak lurus pada s.

Bukti: Berdasarkan definisi pencerminan: $M_s(A) = A$ untuk setiap titik A pada s. Jadi titik tetapnya adalah semua titik pada s.

Garis s merupakan garis tetap, karena: $s' = M_s(s) = s$.

Misalkan:

g sebarang garis dengan g tidak sama dengan s dan

g merupakan garis tetap.

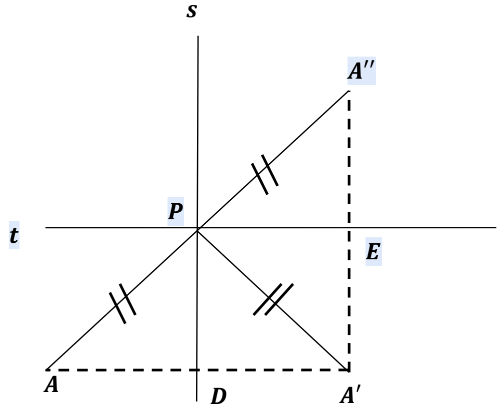
Ambil sebarang titik P pada g, dengan P bukan titik (g, s).

Karena: g garis tetap, maka $P' = M_s(P)$ pada g

Berarti bahwa: $g = \overleftrightarrow{PP'}$ tegak lurus s, karena s adalah sumbu $\overleftrightarrow{PP'}$.

Jadi, terbukti benar bahwa titik tetap dari pencerminan M_s adalah semua titik pada s, garis tetap dari M_s adalah garis s dan semua garis yang tegak lurus pada s.

Teorema 3.4 Jika s tegak lurus t dan $P = (s, t)$, maka:
$M_t M_s = H_P$



Bukti: Ambil sebarang titik A di bidang V.
Misalkan: $A' = M_s(A)$ dan $A'' = M_s(A')$
Maka: $A'' = M_s M_s(A)$
Karena: P pada s, maka $|PA| = |PA'|$.
Karena: P pada t, maka $|PA'| = |PA''|$.
Sehingga diperoleh: $|PA| = |PA''|$.
Misalkan: D titik tengah $\overleftrightarrow{AA'}$ dan E titik tengah $\overleftrightarrow{A'A''}$

3 Maka: $m(\angle DPA) = m(\angle DPA')$ dan $m(\angle EPA') = m(\angle EPA'')$

Karena: $m(\angle DPA') + m(\angle EPA') = 90°$

Maka: jumlah keempat sudut tersebut adalah $m(\angle EPA'') = 180°$

Berarti bahwa: A, P, A'' segaris dan P titik tengah $\overleftrightarrow{AA''}$

Sehingga terbukti $M_t M_s = H_P$

Teorema 3.5 Jika dua garis a, b dengan $a \parallel b$, Maka: $M_b M_a = S_{CD}$,
dengan $|CD| = 2$ x jarak (a, b) dan $CD \perp a$

Bukti: Misalkan: s adalah sebarang garis sedemikian
7 sehingga $s \perp a$

$$A = (a, s), B = (b, s).$$

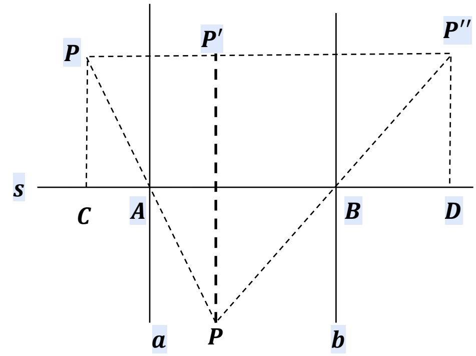
Berdasarkan teorema 3.4 maka diperoleh:

$$M_a M_s = H_A \text{ dan } M_b M_s = H_B$$

3 Sehingga: $M_b M_a = M_b \ I \ M_a$

$$M_b M_a = M_b \ (M_s M_s) \ M_a$$
$$= (M_b \ M_s) \ (M_s \ M_a)$$
$$= H_B H_a$$
$$M_b M_a = S_{CD} \text{ , dengan } |CD| = 2\ |AB|$$

Jadi, terbukti.



Teorema 3.6 Suatu geseran S_{AB} selalu dapat dianggap sebagai hasil kali dua pencerminan M_s dan M_t, dengan $s \parallel t$ dan $s \perp AB$, sedangkan jarak (s, t) adalah $\frac{1}{2}|AB|$.

Bukti: Dari titik-titik A dan B yang diketahui, maka diperoleh S_{AB}

Misalkan:

s adalah sebarang garis, sedemikian sehingga $s \perp AB$,

t sebarang garis dengan $s \parallel t$ dan jarak $(s, t) = \frac{1}{2}|AB|$.

Berdasarkan teorema 3.4 hasil kali pencerminan, maka $M_t M_s$ adalah S_{AB}.

B. Sifat-sifat Pencerminan

Berdasarkan beberapa pernyataan dari gambar 3.1 sebelumnya bahwa ada tiga komponen utama dalam pencerminan yaitu kekongruenan bentuk dan ukuran, jarak yang sama dan sudut yang dibentuk siku-siku terhadap sumbu pencerminan. Sehingga diperoleh beberapa sifat pencerminan diantaranya sebagai berikut:

Sifat 1: Ukuran dan bentuk bayangan sama dengan bentuk benda (kongruen)

Sifat 2: Jarak dari titik asal ke cermin, sama dengan jarak cermin ke titik bayangan

Sifat 3: Garis yang menghubungkan titik asal dengan titik bayangan, tegak lurus terhadap cermin

Sifat 4: Dua pencerminan terhadap sebuah garis merupakan suatu identitas, artinya yang direfleksikan tidak berpindah.

Sifat 5: Dua pencerminan terhadap dua sumbu yang sejajar, menghasilkan translasi (pergeseran) dengan sifat:

1) Jarak bangun yang asli dengan bayangannya sama, dengan dua kali jarak kedua sumbu pencerminan.
2) Arahnya tegak lurus pada kedua sumbu sejajar, dari sumbu pertama ke sumbu kedua.
3) Refleksi terhadap dua sumbu sejajar tidak bersifat komutatif

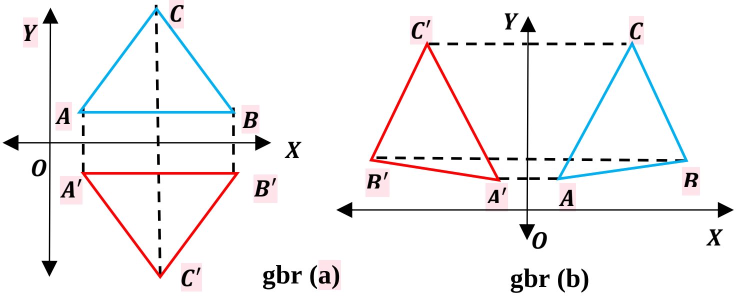
Sifat 6: Dua pencerminan terhadap dua sumbu yang saling tegak lurus, menghasilkan rotasi (perputaran) setengah lingkaran terhadap titik potong dari kedua sumbu pencerminan. Refleksi terhadap dua sumbu yang saling tegak lurus bersifat komutatif

Sifat 7: Dua refleksi berurutan terhadap dua sumbu yang berpotongan, menghasilkan rotasi (perputaran) yang bersifat:

1) Titik potong kedua sumbu pencerminan merupakan pusat perputaran.
2) Besar sudut perputaran sama dengan dua kali sudut antara kedua sumbu pencerminan.
3) Arah rotasi sama dengan arah dari sumbu pertama ke sumbu kedua

Berdasarkan sifat-sifat pencerminan, dapat diperoleh beberapa pencerminan terhadap sumbu pencerminan tertentu, diantaranya adalah.

1 1. Pencerminan terhadap sumbu X dan sumbu Y



Gambar 3.2. Pencerminan terhadap:
(a) sumbu ; (b) sumbu Y

Berdasarkan **gambar 3.2 (a)** sumbu X dan sifat transformasi refleksi

Diperoleh bahwa:

2 Jika koordinat A, B, C terhadap sumbu X, maka: $A' = A, B' = B$, dan $C' = \ C$,

Jika koordinat A, B, C terhadap sumbu Y, maka $A' = -A, B' = -B, C' = -C,$

Sehingga: dapat dituliskan hubungan $x' = x$ dan $y' = -y$.

Diperoleh: $x' = 1.x + 0.y$ dan $y' = 0.x - 1.y$

atau $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Berdasarkan **gambar 3.2 (b)** sumbu Y dan sifat transformasi refleksi:

Jika koordinat A, B, C terhadap sumbu X,

Maka : $A' = -A$, $B' = -B$, dan $C' = -C$,

Jika koordinat A, B, C terhadap sumbu Y,

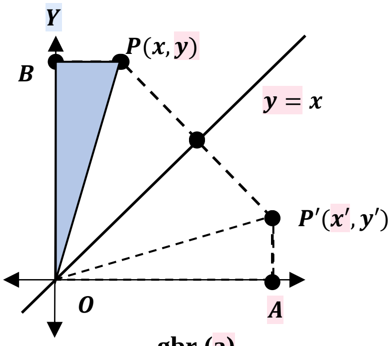
Maka: $A' = A$, $B' = B$, $C' = C$,

Sehingga: dapat dituliskan hubungan $x' = -x$ dan $y' = y$.

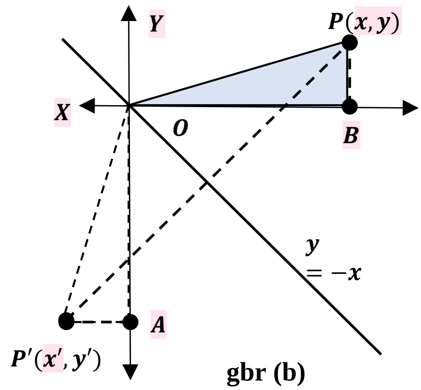
Diperoleh: $x' = -1.x + 0.y$ dan $y' = 0.x + 1.y$

atau $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

2. Pencerminan terhadap sumbu $Y = X$ dan sumbu $Y = -X$



gbr (a)



gbr (b)

Gambar 3.3. Pencerminan terhadap:
(a) sumbu $Y = X$; (b) sumbu $Y = -X$

Berdasarkan **gambar 3.3 (a)** sumbu $Y = X$ dan sifat transformasi refleksi

Diperoleh bahwa: $OA = OB$, dan $AP' = BP$

Maka dapat dituliskan hubungan: $x' = x$ dan $y' = y$.

Diperoleh: $x' = 0.x + 1.y$ dan $y' = 1.x + 0.y$

atau $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Berdasarkan **gambar 3.3 (b)** sumbu $Y = -X$ dan sifat transformasi refleksi

Diperoleh bahwa: $OA = OB$, dan $AP' = BP$

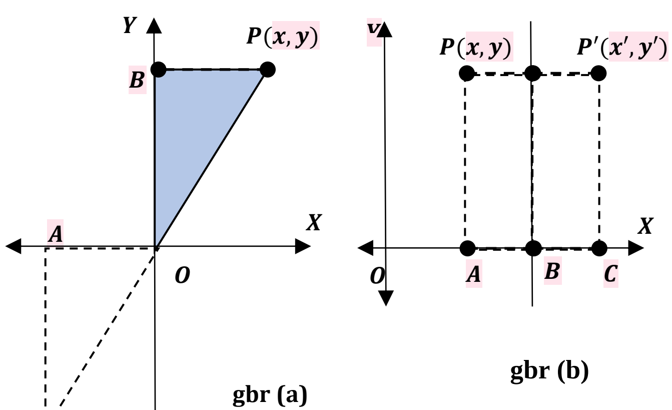
Maka dapat dituliskan hubungan:

$-x' = y$ atau $x' = -y$ dan $-y' = x$ atau $y' = -x$

Diperoleh: $x' = 0.x - 1.y$ dan $y' = -1.x + 0.y$

atau $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

3. Pencerminan terhadap titik asal $O(0, 0)$ dan garis $X = h$



Gambar 3.4. Pencerminan terhadap: (a) titik asal $O(0, 0)$; (b) garis $X = h$

Berdasarkan **gambar 3.4 (a)** titik asal $O(0,0)$ dan sifat transformasi refleksi

Diperoleh bahwa: $OA = BP$, dan $AP' = OB$

Maka dapat dituliskan hubungan:

$$-x' = x \text{ atau } x' = -x$$

$$\text{Dan } -y' = y \text{ atau } y' = -y$$

Diperoleh: $x' = -1.x + 1.y$ dan $y' = 0.x - 1.y$

atau $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Berdasarkan **gambar 3.4 (b)** garis $X = h$ dan sifat transformasi refleksi

Diperoleh bahwa:

Untuk sumbu X: $OA = X$, dan $OB = h$

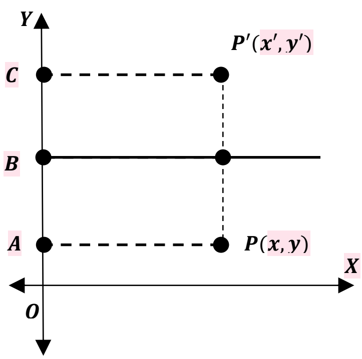
Diperoleh: $AB = h - X$, $\mathrm{BC} = \mathrm{AB} = \mathrm{h} - \mathrm{X}$, $\mathrm{OC} = \mathrm{OB} + \mathrm{BC}$

Sehingga: $\mathrm{X}' = 2\mathrm{h} - \mathrm{X}$

Untuk sumbu Y: $CP' = AP$, Sehingga: $y' = y$

Maka dapat dituliskan hubungan: $x' = 2h - x$ atau $y' = y$

4. Pencerminan terhadap garis $Y = k$



Gambar 3.5. Pencerminan terhadap garis

Berdasarkan **gambar 3.5** garis $Y = k$ dan sifat transformasi refleksi

Diperoleh bahwa:

Untuk sumbu X: $CP' = AP$,

Untuk sumbu Y: $OA = Y$, dan $OB = k$

Diperoleh: $AB = OB - OA = k - Y$,

$\mathrm{BC} = \mathrm{AB} = \mathrm{k} - \mathrm{Y}$,

$\mathrm{OC} = \mathrm{OB} + \mathrm{BC}$

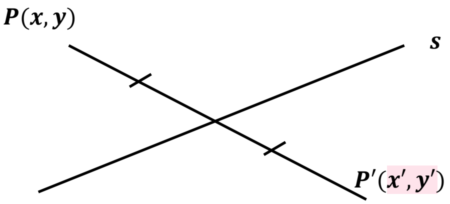
Sehingga: $Y' = 2\mathrm{k} - \mathrm{Y}$

C. Rumus Pencerminan

Berdasarkan persamaan garis pada bidang *Euclide*, ada beberapa cara menuliskan persamaan-persamaan dalam menyajikan pencerminan berkaitan dengan garis, sehingga penyajian tersebut memperoleh beberapa rumus secara umum pada pencerminan terhadap garis tertentu, diantaranya adalah sebagai berikut.

Rumus 1 Misalkan:

s suatu garis dengan bentuk persamaan, s : $ax + by + c + 0$



Jika $P(x, y)$ dan $P' = M_s(P)$,

Jika $P'(x', y')$ dengan P di luar s,

Maka harus dipenuhi: $\overline{PP'} \perp s$,

Sehingga : $\frac{y' - y}{x' - x} - \frac{b}{a}$ (1)

Titik tengah $\overleftrightarrow{PP'}$ terletak pada s, sehingga berlaku: (2)

$$a\left(\frac{x+x'}{2}\right)+b\left(\frac{y+y'}{2}\right)+c=0$$

Dari (1) dan (2), maka diperoleh:

$$bx'-ay'=bx-ay$$

$$ax'+by'=-ax-by-2c$$

Sehingga Rumus Pencerminan 1 adalah:

$$x'=\frac{(b^2-a^2)x-2aby-2ac}{a^2+b^2}=x-\frac{2a(ax+by+c)}{a^2+b^2}$$

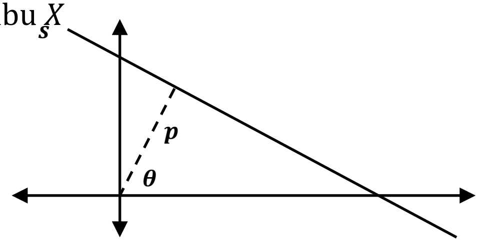
$$y'=\frac{-2abx+(b^2-a^2)y-2bc}{a^2+b^2}=y-\frac{2a(ax+by+c)}{a^2+b^2}$$

Rumus 2 Misalkan:

s suatu garis dengan bentuk persamaan, $s:$ $x\cos\theta+y\sin\theta-p=0$

p adalah jarak s terhadap pusat sumbu

θ adalah besar sudut yang dibentuk oleh garis $s\perp$ sumbu X



Pada ilustrasi gambar di atas terlihat bahwa:

Misalkan:

Persamaan garis 1 adalah $s:\ ax+by+c+0$

Persamaan garis 2 adalah $s : x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0$

Maka dapat diperoleh hubungan keduanya, yaitu:

$$a = \cos\theta\ , b = \sin\theta, c = -p$$

2 Sehingga diperoleh rumus pencerminan 2:

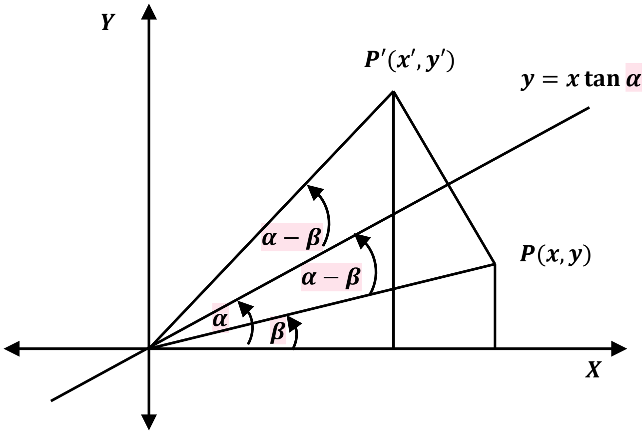
$x' = -x\cos 2\theta - y\sin 2\theta + 2p\cos\theta$

$y' = -x\sin 2\theta - y\cos 2\theta + 2p\sin\theta$

Rumus pencerminan 2 dalam bentuk matriksnya:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 2p \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$$

Rumus 3 Misalkan: g suatu garis dinyatakan $g : y = x\tan\alpha$

9 

Berdasarkan ilustrasi gambar di atas:

Misalkan: $P'(x', y') = M_g(P)$, maka diperoleh:

2
$$x' = OP'\cos(2\alpha - \beta)$$
$$= OP'(\cos(2\alpha)\cos(\beta) + \sin(2\alpha)\sin\beta)$$

$$= OP'\left(\cos(2\alpha)\left(\frac{x}{OP'}\right) + \sin(2\alpha)\left(\frac{y}{OP'}\right)\right)$$

$$= x\cos 2\alpha + y\sin 2\alpha$$

$$y' = OP'\sin(2\alpha - \beta)$$

$$= OP'(\sin(2\alpha)\cos(\beta) - \cos(2\alpha)\sin\beta)$$

$$= x\sin 2\alpha - y\cos 2\alpha$$

Sehingga diperoleh rumus pencerminan 3:

$x' = x\cos 2\alpha + y\sin 2\alpha$

$y' = x\sin 2\alpha - y\cos 2\alpha$

Rumus pencerminan 3 dalam bentuk matriksnya:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Contoh 3.2 Misalkan: Jika h sebuah garis yang melewati titik asal dengan koefisien arah -1, maka tentukan:

1) Titik A, jika $M_h(A) = (-2, 3)$
2) $M_h(P)$, untuk $P = (x, y)$

Penyelesaian: Diketahui bahwa h melewati titik asal $(0, 0)$ dengan $m = -1$

1) Maka: persamaan garis h adalah

$y - y_1 = m(x - x_1) \Leftrightarrow y - 0 = -1(x - 0)$

$\Leftrightarrow y = -x$

Jadi, $x + y = 0$

Diketahui juga bahwa $\overleftrightarrow{AA'} \perp h$ melalui $(-2, 3)$ dengan $m = -1$

Maka persamaan garis $\overleftrightarrow{AA'}$ adalah:

$y - y_1 = m(x - x_1) \Leftrightarrow y - 3 = 1(x + 2) \Leftrightarrow$
$y - 3 = x + 2$

Jadi, $y = x + 5$

Perpotongan garis h dan $\overleftrightarrow{AA'}$ adalah

Garis h adalah $y = -x$, sedangkan garis $\overleftrightarrow{AA'}$ adalah $y = x + 5$

Maka diperoleh: $-x = x + 5 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$

Disubstitusikan ke salah satu persamaan yaitu $y = -x = \frac{5}{2}$

Sehingga diperoleh titik tengah $\overleftrightarrow{AA'} =$
$(X_p, Y_p) = \left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$

Karena : $(X_p, Y_p) = \left(\frac{x+x_1}{2}, \frac{y+y_1}{2}\right)$, maka:

$\Leftrightarrow \left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{x-2}{2}, \frac{y+3}{2}\right)$

Untuk: $x - 2 = -5 \Leftrightarrow x = -3$; untuk: $y + 3 = 5 \Leftrightarrow y = 2$

Jadi, titik $A = (-3,2)$

2) Persamaan garis $\overleftrightarrow{PP'}$ adalah

$y - y_1 = m(x - x_1), \Leftrightarrow y - b = 1(x - a), \Leftrightarrow$
$y = x - a + b$

Perpotongan garis h dan $\overleftrightarrow{PP'}$ adalah

Karena: $y = -x$ (persamaan garis h)

Maka: $-x = x - a + b \Leftrightarrow 2x = a - b \Leftrightarrow$
$x = \frac{a-b}{2}$

Sehingga: $y = -\left(\frac{a-b}{2}\right)$

Titik tengah $\overleftrightarrow{PP'} = (X_p, Y_p) = \left(\frac{a-b}{2}, -\frac{a-b}{2}\right)$

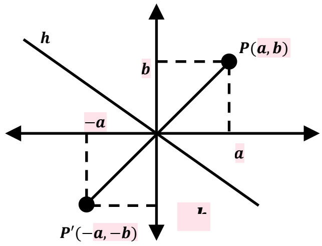
Karena : $\left(X_p, Y_p\right) = \left(\frac{x+x_1}{2}, \frac{y+y_1}{2}\right)$, maka:

$\Leftrightarrow \left(\frac{a-b}{2}, -\frac{a-b}{2}\right) = \left(\frac{x-2}{2}, \frac{y+3}{2}\right)$

Untuk: $x - 2 = a - b \Leftrightarrow x = -b$;

Untuk: $y + 3 = -a + b \Leftrightarrow y = -a$

Jadi, untuk $P = (x, y)$ diperoleh $P' = (-b, -a)$



D. Latihan Soal

Selesaikan soal berikut dengan tepat dan benar.

1. Diketahui dua titik A dan B. Lukislah sebuah garis g pada $R_g(A) = B$ dan tentukan $R_g(B)$
2. Diketahui bahwa $n = \{(x, y)|px + 2y - 4 = 0\}$ dan $K(-3, 1)$. Carilah p jika $R_n(K) = K$ dan lukislah!
3. Apabila ada V pada system sumbu orthogonal (tegak lurus) dan $A(1, 3)$, $B(-2, -1)$. Tentukan persamaan garis g sehingga $R_g(A) = B$
4. Diketahui $g = \{(x, y)|x = -3\}$, maka:
   a. Tentukan $A' = R_g(A)$, jika $A(2, 1)$
   b. Tentukan C, jika $R_g(C) = (-1, 7)$
   c. Tentukan $R_g(P)$, jika $P(x, y)$ sebuah titik sebarang.
5. Diketahui garis $h = \{(x, y)|y = x\}$
   a. Tentukan $R_h(A)$, jika $A = (2, -3)$
   b. Tentukan prapeta dari B' oleh R_h, jika $B' = (-3, 5)$

c. Tentukan $R_h(P) = P'$, jika $P(x, y)$ sebuah titik sebarang

6. Diketahui garis $g = \{(x, y)|x + y = 1\}$
   a. Tentukan $R_g(0)$
   b. Tentukan $R_g(A)$, jika $A = (1, 2)$
   c. Jika $P(x, x + 1)$, maka tentukan P apabila $R_g(P) = P$
7. Diketahui garis $k = \{(x, y)|ax - 3y + 1 = 0\}$ dan sebuah titik $B(3, -1)$. Tentukan nilai a apabila $R_k(B) = B$
8. Andaikan $h = \{(x, y)|y = 3x\}$ dan jika $A(4, 3)$. Tentukan koordinat-koordinat $A' = R_h(A)$
9. Diketahui g sebuah garis dan l sebuah lingkaran. Buktikan bahwa $R_g(l) = l'$, dimana l' sebuah lingkaran juga.
10. Jika V adalah sebuah sistem orthogonal XOY.
    Maka ada $g = \{(x, y)|x + y = 1\}$,
    a. Tentukan $R_g(A)$, jika $A = (1, 2)$
    b. Tentukan C sehingga $R_g(C) = B$, jika $B = (-2, 4)$
    c. Tentukan $R_g(P)$, jika $P = (P_1, P_2)$

BAB 4

GESERAN (TRANSLASI)

A. Ruas Garis Berarah

Sebelum membahas tentang geseran, pada sub bab ini akan di pelajari terlebih dahulu tentang ruas garis berarah, dikarenakan menjadi salah syarat pada geseran suatu transformasi.

Definisi 4.1 Ruas garis berarah merupakan suatu besaran yang mempunyai besar dan arah

Berdasarkan definisi 4.1 bahwa ruas garis berarah dapat disebut juga suatu vektor, yang mana pada sebuah vektor hanya ditentukan oleh suatu besaran dan arah saja. Dengan kata lain, jika kita memiliki dua buah vektor dikatakan sama apabila besar dan arahnya sama yang tidak memperhatikan letaknya (posisi).

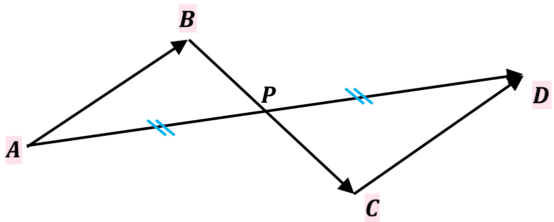
Sebuah vektor secara geometri digambarkan dengan anak panah, yang mana panjang anak panah sebagai besarnya vektor dan anak panahnya sebagai arah vektor. Perhatikan gambar vektor berikut

Apabila A dan B dua titik. Pada sebuah vektor, A sebagai titik pangkal dan B sebagai titik ujung yangmana dilambangkan $(\overrightarrow{AB})$, pada transformasi kita gunakan sebagai **ruas garis berarah**. Jika ada dua ruas garis $\overrightarrow{AB}$ dan $\overleftarrow{AB}$. Ini berarti dua hal yang berbeda, pertama menggambarkan sinar atau setengah garis yang berpangkal di A dan menuju ujung B, sedangkan yang kedua menggambarkan sinar atau setengah garis yang berpangkal di B dan menuju ujung A.

Misalkan: dua ruas garis $\overleftrightarrow{AB}$ dan $\overleftrightarrow{CD}$ disebut kongruen apabila $AB = CD$. Meskipun $AB = CD$, $\overleftrightarrow{AB}$ dan $\overleftrightarrow{CD}$ tidak harus sama juga, yangmana $\overleftrightarrow{AB}$ melambangkan suatu himpunan dan AB melambangkan suatu bilangan real. $\overleftrightarrow{AB}$ dan $\overleftrightarrow{CD}$ kongruen dituliskan . $\overleftrightarrow{AB} \cong \overleftrightarrow{CD}$.

Untuk mengetahui ruas garis berarah yang ekuivalen tidaklah cukup hanya membandingkan saja akan tetapi haruslah searah. Dua ruas garis berarah $\overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{CD}$ yang ekuivalen di tuliskan $\overrightarrow{AB} \overset{\dot{\circ}}{=} \overrightarrow{CD}$

Definisi 4.2. Ekuivalensi $\overrightarrow{AB} \overset{\dot{\circ}}{=} \overrightarrow{CD}$ apabila $S_P(A) = D$ dengan P titik tengah $\overrightarrow{BC}$.



Teorema 4.1 Andaikan $\overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{CD}$ dua ruas garis berarah tak segaris, maka segiempat $ABCD$ jajargenjang jika dan hanya jika $\overrightarrow{AB} \overset{\dot{\circ}}{=} \overrightarrow{CD}$

Bukti: Akan ditunjukkan bahwa jika $\overrightarrow{AB} \overset{\dot{\circ}}{=} \overrightarrow{CD}$ maka $ABCD$ jajargenjang dengan $\overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{CD}$ adalah dua ruas garis berarah yang tak segaris.

Dimiliki bahwa: $\overrightarrow{AB} \overset{\dot{\circ}}{=} \overrightarrow{CD}$

Misalkan: titik P adalah titik tengah $\overrightarrow{BC}$

Berdasarkan definisi ke-ekuivalenan, maka: $S_P(A) = D$

Berarti: $AP = PD$, sehingga P juga titik tengah AD

Hubungkan titik A ke C dan titik B ke D, Sehingga terbentuklah segiempat $ABCD$.

$\overrightarrow{AD}$ dan $\overrightarrow{BC}$ adalah diagonal-diagonal segiempat $ABCD$ yang terbagi sama panjang di P (definisi jajargenjang)

Terbukti.

Teorema 4.2 Diketahui ruas-ruas garis berarah $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$, maka:

1) $\overrightarrow{AB} \doteq \overrightarrow{AB}$ bersifat refleksi
2) Jika $\overrightarrow{AB} \doteq \overrightarrow{CD}$, maka $\overrightarrow{CD} \doteq \overrightarrow{AB}$ bersifat simetri
3) Jika $\overrightarrow{AB} \doteq \overrightarrow{CD}$ dan $\overrightarrow{CD} \doteq \overrightarrow{EF}$ bersifat transitif

Bukti: Akan ditunjukkan bahwa jika $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ maka $ABCD$ jajargenjang dengan $\overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{CD}$ adalah dua ruas garis berarah yang tak segaris.

1) Akan dibuktikan $\overrightarrow{AB} \doteq \overrightarrow{AB}$

Misalkan: P adalah titik tengah AB, maka $S_P(A) = B$

Berdasarkan definisi ke-ekuivalenan, maka diperoleh $\overrightarrow{AB} \doteq \overrightarrow{AB}$

2) Akan dibuktikan jika $\overrightarrow{AB} \doteq \overrightarrow{CD}$maka $\overrightarrow{CD} \doteq \overrightarrow{AB}$

Menurut teorema 4.1 bahwa jika $\overrightarrow{AB} \stackrel{\circ}{=} \overrightarrow{CD}$ maka segiempat $ABCD$ jajargenjang. Diagonal-diagonal $\overrightarrow{BC}$ dan $\overrightarrow{AD}$ membagi sama panjang di P, maka P adalah titik tengah $\overrightarrow{AD}$

Akibat: $S_P(C) = B$

Berdasarkan definisi ke-ekuivalenan, apabila $S_P(C) = B$ dengan P titik tengah $\overrightarrow{AD}$ maka $\overrightarrow{CD} \stackrel{\circ}{=} \overrightarrow{AB}$

3 3) Akan dibuktikan jika $\overrightarrow{AB} \stackrel{\circ}{=} \overrightarrow{CD}$ dan $\overrightarrow{CD} \stackrel{\circ}{=} \overrightarrow{EF}$

Diperoleh $\overrightarrow{AB} \stackrel{\circ}{=} \overrightarrow{CD}$ maka $S_P(A) = D$ dengan titik tengah $\overrightarrow{BC}$

Diperoleh $\overrightarrow{CD} \stackrel{\circ}{=} \overrightarrow{EF}$ maka $S_Q(C) = F$ dengan titik tengah $\overrightarrow{DE}$

Menurut teorema 4.1 bahwa jika $\overrightarrow{AB} \stackrel{\circ}{=} \overrightarrow{CD}$ maka segiempat $ABCD$ jajargenjang, sehingga
7 $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ dan $\overrightarrow{CD} \parallel \overrightarrow{EF}$ akibatnya $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{EF}$

Diketahui bahwa:

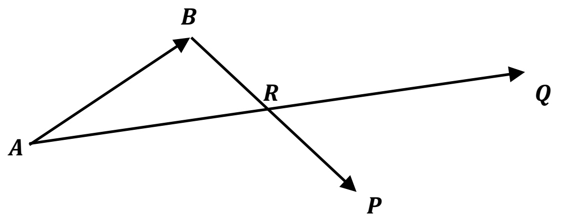
3 Jika $\overrightarrow{AB} \stackrel{\circ}{=} \overrightarrow{CD}$ maka $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

Jika $\overrightarrow{CD} \stackrel{\circ}{=} \overrightarrow{EF}$ maka $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$

Akibatnya: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$

Karena $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$ dan $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{EF}$, maka $ABEF$ jajargenjang.

Teorema 4.3 Diketahui sebuah titik P dan suatu ruas garis berarah $\overrightarrow{AB}$, maka ada titik tunggal Q sehingga $\overrightarrow{PQ} \overset{\circ}{=} \overrightarrow{AB}$:



Bukti: Akan dibuktikan keberadaan Q sehingga $\overrightarrow{AB} \overset{\circ}{=} \overrightarrow{PQ}$

Andaikan ada titik Q

Misalkan R adalah titik tengah $\overrightarrow{BP}$ dengan $S_P(A) = Q$

Maka: $\overrightarrow{AB} \overset{\circ}{=} \overrightarrow{PQ}$

Menurut teorema 4.2 (2) maka $\overrightarrow{PQ} \overset{\circ}{=} \overrightarrow{AB}$

Akan dibuktikan Q tunggal

Andaikan ada titik T sehingga $\overrightarrow{AB} \overset{\circ}{=} \overrightarrow{PT}$

Karena R titik tengah $\overrightarrow{BP}$ maka $S_R(A) = T$

Dengan setengah putaran A terhadap R atau $S_R(A)$ tunggal sehingga $\overrightarrow{RQ} \overset{\circ}{=} \overrightarrow{AR}$

Akibat 1: Jika $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, dan $P_3(x_3, y_3)$ titik-titik yang diketahui

Maka: titik $P(x_3 + x_2 - x_1, y_3 + y_2 - y_1)$ adalah titik tunggal

Sehingga: $\overrightarrow{P_3P} = \overrightarrow{P_1P_2}$

Andaikan P bukan titik tunggal, maka$\overrightarrow{P_3P} \neq \overrightarrow{P_1P_2}$,

artinya $\overrightarrow{P_3P} - \overrightarrow{P_1P_2} \neq 0$

Maka diperoleh: $\overrightarrow{P_3P} - \overrightarrow{P_1P_2} = (P - P_3) - (P_2 - P_1)$

$= [(x_3 + x_2 - x_1, y_3 + y_2 - y_1) - (x_3, y_3)] - [(x_2, y_2) - (x_1, y_1)]$
$= [(x_3 + x_2 - x_1 - x_3, y_3 + y_2 - y_1 - y_3)] - [(x_2 - x_1, y_2 - y_1)]$
$= [(x_2 - x_1, y_2 - y_1)] - [(x_2 - x_1, y_2 - y_1)]$
$= (0,0)$ **terbukti**

Akibat 2: Jika $P_n = (x_n, y_n)$, dimana $n = 1,2,3, \ldots.$ Maka:
$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_3P_4}$
$\Leftrightarrow x_2 - x_1 = x_4 - x_3, y_2 - y_1 = y_4 - y_3$
Karena: $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_3P_4}$, maka $P_1P_2 = P_3P_4$
Sehingga: $P_2 - P_1 = P_4 - P_3$
$\Leftrightarrow [(x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_4, y_4) - (x_3, y_3)]$
$\Leftrightarrow [(x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (x_4 - x_3, y_4 - y_3)]$
(**terbukti**)

Definisi 4.3

Andaikan $\overrightarrow{AB}$ sebuah ruas garis berarah dan k suatu bilangan real, maka $k\overrightarrow{AB}$ adalah ruas garis berarah $\overrightarrow{AP}$ sehingga $P \in \overrightarrow{AB}$ dan $AP = k(AB)$, jika $k > 0$.

Apabila $k < 0$ maka $k\overrightarrow{AB}$ adalah ruas garis berarah $\overrightarrow{AP}$ dengan P anggota sinar garis yang berlawanan arah dengan $\overrightarrow{AB}$, sedangkan $AP = |k|\ AB$, dimana bahwa $\overrightarrow{AP}$ kelipatan dari $\overrightarrow{AB}$.

Contoh 4.1

Diketahui: $A(2,1)$, $B\ (3,-4)$, dan $C\ (-1,5)$.
Tentukan

1) Titik D, sehingga $CD = AB$
2) Titik E, sehingga $AE = BC$
3) Titik F, sehingga $AF = \frac{1}{2}AC$

Penyelesaian:

1) Titik D, sehingga $CD = AB$, maka:

$\sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2} =$
$\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Sehingga:

$\Leftrightarrow \sqrt{(x_D - (-1))^2 + (y_D - 5)^2} =$
$\sqrt{(3-2)^2 + (-4-1)^2}$
$\Leftrightarrow \sqrt{(x_D + 1)^2 + (y_D - 5)^2} = \sqrt{(1)^2 + (-5)^2}$
$\Leftrightarrow \sqrt{(x_D + 1)^2 + (y_D - 5)^2} = \sqrt{26}$
$\Leftrightarrow (x_D + 1)^2 + (y_D - 5)^2 = 26$
$\Leftrightarrow {x_D}^2 + 2x_D + 1 + {y_D}^2 - 10y_D + 25 = 26$
$\Leftrightarrow {x_D}^2 + {y_D}^2 + 2x_D - 10y_D = 0$

Jadi, D memiliki semua titik pada persamaan lingkaran:

${x_D}^2 + {y_D}^2 + 2x_D - 10y_D = 0$

2) Titik E, sehingga $AE = BC$, maka:

$\sqrt{(x_E - x_A)^2 + (y_E - y_A)^2} =$
$\sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$

Sehingga:

$\Leftrightarrow \sqrt{(x_E - 2)^2 + (y_E - 1)^2} =$
$\sqrt{(-1-3)^2 + (5+4)^2}$
$\Leftrightarrow \sqrt{(x_E - 2)^2 + (y_E - 1)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (9)^2}$
$\Leftrightarrow \sqrt{(x_E - 2)^2 + (y_E - 1)^2} = \sqrt{97}$
$\Leftrightarrow (x_E - 2)^2 + (y_E - 1)^2 = 97$
$\Leftrightarrow {x_E}^2 - 4x_E + 4 + {y_E}^2 - 2y_E + 1 = 97$
$\Leftrightarrow {x_E}^2 + {y_E}^2 - 4x_E - 2y_E + 92 = 0$

Jadi, E memiliki semua titik pada persamaan lingkaran:

$$x_E{}^2 + y_E{}^2 - 4x_E - 2y_E + 92 = 0$$

3) Titik F, sehingga $AF = \frac{1}{2}AC$, maka:

$$\sqrt{(x_F - x_A)^2 + (y_F - y_A)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x_F - 2)^2 + (y_F - 1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(-1 - 2)^2 + (5 - 1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x_F - 2)^2 + (y_F - 1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{25}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x_F - 2)^2 + (y_F - 1)^2} = \sqrt{\frac{25}{4}}$$

$$\Leftrightarrow (x_F - 2)^2 + (y_F - 1)^2 = \frac{25}{4}$$

$$\Leftrightarrow x_F{}^2 - 4x_F + 4 + y_F{}^2 - 2y_F + 1 = \frac{25}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4x_F{}^2 + 4y_F{}^2 - 16x_F - 8y_F + 20 = 25$$

$$\Leftrightarrow 4x_F{}^2 + 4y_F{}^2 - 16x_F - 8y_F + 5 = 0$$

Jadi, F memiliki semua titik pada persamaan lingkaran:

$$4x_F{}^2 + 4y_F{}^2 - 16x_F - 8y_F + 5 = 0$$

Contoh 4.2 Diketahui: Jika $A(1, 3)$, $B\ (2, 7)$, dan $C\ (-1, 4)$ merupakan titik-titik pada segi empat $ABCD$. Tentukan titik-titik koordinat titik D

Penyelesaian: Berdasarkan teorema 4.1 , jika $ABCD$ sebuah jajargenjang,

Maka: $AB = CD$ dengan P adalah titik tengah BC dan AD

Karena: K adalah titik tengah BC,

Maka: $K = \left(\frac{x_B+x_C}{2}, \frac{y_B+y_C}{2}\right) = \left(\frac{2-1}{2}, \frac{7+4}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right)$

Karena: K adalah titik tengah AD,

Maka: $K = \left(\frac{x_A+x_D}{2}, \frac{y_A+y_D}{2}\right) = \left(\frac{1+x_D}{2}, \frac{3+y_D}{2}\right)$

Sehingga: $K = \left(\frac{1+x_D}{2}, \frac{3+y_D}{2}\right)$, karena $K = \left(\frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right)$

Maka:

Untuk nilai x: $\frac{1+x_D}{2} = \frac{1}{2}, \Leftrightarrow x_D = 0$

Untuk nilai y: $\frac{3+y_D}{2} = \frac{11}{2}, \Leftrightarrow y_D = 8$

Jadi, koordinat titik $D = (0, 8)$

Contoh 4.3 Diketahui: Jika $A(-2, 4)$, $B\ (h, 3)$, $C\ (3, 0)$, dan $D(5,\ k)$ merupakan titik sudut jajargenjang $ABCD$. Tentukan h dan k pada titik koordinat B dan D.

Penyelesaian: Karena: $\overrightarrow{AB} \doteq \overrightarrow{CD}$, berdasarkan teorema 4.2 (3), maka: $AB = CD$

Sehingga: $\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_D \\ y_D \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix}$, $\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} 2+h \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -k \end{pmatrix}$,

Untuk nilai h adalah $2 + h = -2$, $\Leftrightarrow h = -4$

Untuk nilai k adalah $-k = -1$, $\Leftrightarrow k = 1$

Jadi titik koordinat: $B\ (-4, 3)$ dan $D(5, 1)$

B. Definisi Geseran (Translasi)

Pada geometri *Euclide*, geseran (translasi) merupakan suatu transformasi yang memindahkan setiap titik pada bidang dengan jarak dan arah yang tetap.

Definisi 4.4 Suatu padanan G dikatakan suatu geseran (translasi) apabila terdapat ruas garis berarah $\overrightarrow{AB}$, sehingga setiap titik P pada bidang V menjadi P', dengan $P' = G_{\overrightarrow{AB}}(P)$ dan $\overrightarrow{PP'} \doteqdot \overrightarrow{AB}$.

Dengan kata lain bahwa untuk setiap ruas garis berarah dapat menentukan sebuah translasi, artinya: jika $\overrightarrow{AB}$ adalah suatu garis berarah, maka: $G_{\overrightarrow{AB}}$ sebagai sebuah geseran yang sesuai dengan $\overrightarrow{AB}$.

Teorema 4.4 Apabila $G_{\overrightarrow{AB}} = G_{\overrightarrow{CD}}$, maka jika dan hanya jika $\overrightarrow{AB} \doteqdot \overrightarrow{CD}$

Bukti: Diketahui bahwa: $\overrightarrow{AB} \doteqdot \overrightarrow{CD}$

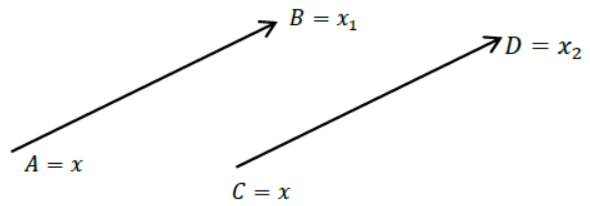
Ambil x sebarang, misalkan: $G_{\overrightarrow{AB}}(x) = x_1$ dan $G_{\overrightarrow{CD}}(x) = x_2$

Maka: $\overrightarrow{xx_1} \doteqdot \overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{xx_2} \doteqdot \overrightarrow{CD}$

Karena: $\overrightarrow{AB} \doteqdot \overrightarrow{CD}$, maka: $\overrightarrow{xx_1} \doteqdot \overrightarrow{xx_2}$

Berarti bahwa : $x_1 = x_2$

Jadi, terbukti bahwa $G_{\overrightarrow{AB}} = G_{\overrightarrow{CD}}$, sehingga dapat dilukiskan sebagai berikut



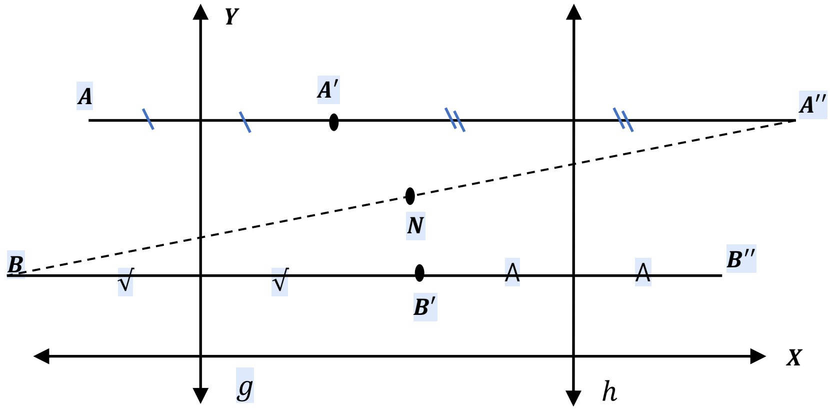
Teorema 4.5 Andaikan: g dan h dua buah garis sejajar, apabila ada dua titik A dan B, maka $\overrightarrow{AA''} \doteq \overrightarrow{BB''}$,

dimana: $A'' = R_h R_g(A)$ dan $B'' = R_h R_g(B)$

Bukti: Diketahui bahwa: $g \parallel h$, $A'' = R_h R_g(A)$ dan $B'' = R_h R_g(B)$

Akan dibuktikan: $\overrightarrow{AA''} \doteq \overrightarrow{BB''}$

Dapat ditentukan bahwa sebuah sistem koordinat dengan g sebagai sumbu Y dan sebuah garis tegak lurus dengan g sebagai sumbu X.



Berdasarkan gambar di atas:

ambil titik A dan B sebarang dengan $A \neq B$ dan $A, B \notin g, A, B \notin h$

- Andaikan: $A = (a_1, a_2)$ dan $B = (b_1, b_2)$

  Akan dibuktikan : $S_N(A) = B''$ dengan N adalah titik tengah $\overrightarrow{BA''}$

  (terlihat pada gambar bahwa garis g adalah $x = 0$)

- Andaikan persamaan garis h adalah $x = n$, $n \neq 0$, maka:

  $R_g(A) = A' = (-a_1, a_2)$ dan $R_h R_g(A) = A'' = R_h(A')$

  $\Leftrightarrow R_h(A') = A''$, $\Leftrightarrow R_h(-a_1, a_2) = A''$

  $\Leftrightarrow \big((-a_1) + 2(n + a_1), a_2\big) = A''$

  $\Leftrightarrow (2n + a_1, a_2) = A''$

  $R_g(B) = B' = (-b_1, b_2)$ dan $R_h R_g(B) = B'' = R_h(B')$

  $\Leftrightarrow R_h(B') = B''$, $\Leftrightarrow R_h(-b_1, b_2) = A''$

  $\Leftrightarrow \big((-b_1) + 2(n + b_1), b_2\big) = A''$

  $\Leftrightarrow (2n + b_1, b_2) = B''$

  Karena: N titik tengah $\overrightarrow{BA''}$, maka:

  $N = \left(\frac{2n+a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}\right)$, dan diperoleh $A = (a_1, a_2)$

  Sehingga:

  $S_N(A) = \left(2\left(\frac{2n+a_1+b_1}{2}\right) - a_1, 2\left(\frac{a_2+b_2}{2}\right) - a_2\right) = (2n + b_1, b_2)$

  Jadi, terbukti $S_N(A) = B''$

  Dengan demikian bahwa: $\overrightarrow{AA''} \doteq \overrightarrow{BB''}$

Dimana setiap ruas garis berarah, dengan pangkal sebuah titik dan berakhir di titik ujungnya oleh $R_h R_g$ adalah ekivalen (pada gambar di atas), sehingga hasil transformasi $R_h R_g$ adalah seakan-akan menggeser setiap titik sejauh jarak yang sama dan searah yang dinamakan sebagai geseran (translasi).

Teorema 4.6 Andaikan: g dan h sejajar dan $\overrightarrow{CD}$ sebuah garis tegak lurus pada g dengan $C \in g$ dan $D \in h$.

Apabila $\overrightarrow{AB} \doteq 2\,\overrightarrow{CD}$, maka $G_{\overrightarrow{AB}} = R_h R_g$

Bukti: Ambil titik P sebarang

Misalkan: $P' = G_{\overrightarrow{AB}}(P)$ dan $P'' = R_h R_g(P)$

Akan dibuktikan: $P' = P''$

Berdasarkan definisi 4.4 bahwa $\overrightarrow{PP'} \doteq \overrightarrow{AB}$

Karena $\overrightarrow{AB} \doteq 2\,\overrightarrow{CD}$, maka: $\overrightarrow{PP'} \doteq 2\,\overrightarrow{CD}$

Karena: $C \in g$, maka: $R_h R_g(C) = R_h[R_g(C)] = R_h(C) = C''$

Berarti bahwa: D titik tengah $\overrightarrow{CC''}$, sehingga: $\overrightarrow{CC''} \doteq 2\,\overrightarrow{CD}$

Berdasarkan Teorema 4.5 bahwa $\overrightarrow{CC''} \doteq \overrightarrow{PP''}$

Maka: $\overrightarrow{CC''} \doteq 2\,\overrightarrow{CD} \doteq \overrightarrow{PP'} \doteq \overrightarrow{PP''}$

Jadi, $G_{\overrightarrow{AB}}(P) = R_h R_g(P)$

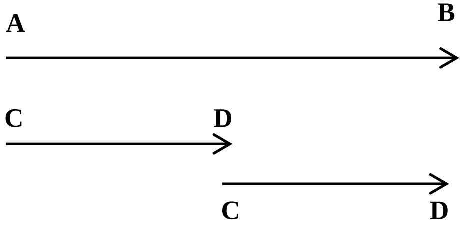
Karena P titik sebarang, maka $G_{\overrightarrow{AB}} = R_h R_g$

Dengan demikian bahwa setiap geseran $G_{\overrightarrow{AB}}$ dapat ditulis sebagai hasil kali dua pencerminan terhadap dua garis yang tegak lurus pada $\overleftrightarrow{AB}$ dan berjarak $\frac{1}{2}\overleftrightarrow{AB}$. Jika $\overleftrightarrow{AB}$ sebuah garis dan

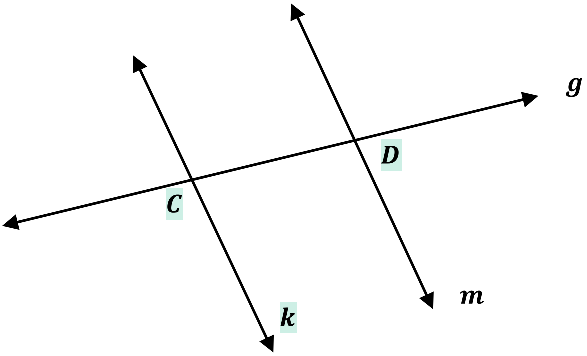
M titik tengah $\overleftrightarrow{AB}$, sedangkan g, h dan n tiga garis yang masing-masing tegak lurus di A, M, B pada ruas garis $\overleftrightarrow{AB}$, maka $G_{\overrightarrow{AB}} = R_h R_g = G_{\overrightarrow{AB}} = R_n R_h$. Sehingga dapat dikatakan bahwa geseran sebagai hasil kali dua pencerminan, dan pencerminan sendiri adalah suatu transformasi, maka geseran juga termasuk suatu transformasi dan suatu isometri.

Teorema 4.7 Jika $G_{\overrightarrow{AB}}$ sebuah geseran (translasi) sedangkan titik C dan titik D adalah dua titik, sehingga $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$, maka $G_{\overrightarrow{AB}} = S_D S_C$.

Bukti: Diketahui bahwa: $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$



Andaikan $g = \overleftrightarrow{CD}$, dimana garis $k \perp g$ di C dan $m \perp g$ di D



Maka: $\overrightarrow{CD}$ ruas garis berarah dari k ke m

Karena : $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$, Maka $G_{\overrightarrow{AB}} = R_m .\ R_k$

Sedangkan $S_D = R_m R_g$ dan $S_C = R_g R_k$.

Jadi, $S_D S_C = R_m R_g R_g R_k = R_m (R_g R_g) R_k$

Atau, $S_D S_C = R_m I R_k$

Maka diperoleh: $G_{\overrightarrow{AB}} = S_D S_C$.

Teorema 4.8 Jika $G_{\overrightarrow{AB}}$ sebuah translasi maka $(G_{\overrightarrow{AB}})^{-1} = G_{\overrightarrow{BA}}$

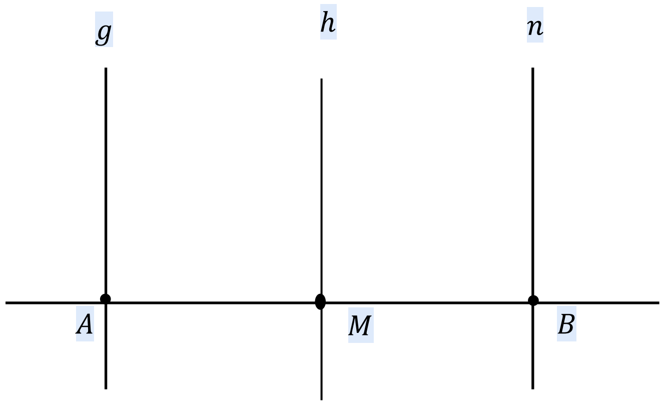
Bukti: Diketahui bahwa:

Geseran adalah hasil kali dua refleksi (Teorema 4.6)

Pencerminan adalah suatu transformasi (definisi 3.1)

Setiap transformasi memiliki balikan (Teorema 2.3)

Maka: setiap geseran juga memiliki balikan



Bukti: Diketahui bahwa: $G_{\overrightarrow{AB}} = R_h R_g = R_n R_h$

$G_{\overrightarrow{AB}}(A) = R_h R_g(A)$
$\Leftrightarrow R_h[R_g(A)], \Leftrightarrow R_h(A) = B$

$G_{\overrightarrow{AB}}(A)$
$= R_n R_h(A)$
$\Leftrightarrow R_n[R_h(A)],$
$\Leftrightarrow R_n(A) = B$

Jadi, $G_{\overrightarrow{AB}}(A) = R_h R_g(A) = R_n R_h(A)$ atau
$G_{\overrightarrow{AB}} = R_h R_g = R_n R_h$

Diketahui bahwa: $G_{\overrightarrow{BA}} = R_h R_n = R_g R_h$

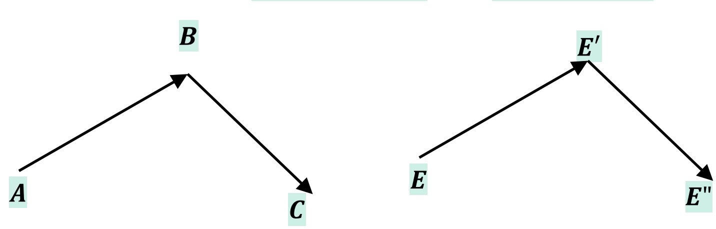
$G_{\overrightarrow{BA}}(B) = R_h R_n(B)$
$\Leftrightarrow R_h[R_n(B)], \Leftrightarrow R_h(B) =$
A

$G_{\overrightarrow{BA}}(B)$
$= R_g R_h(B)$
$\Leftrightarrow R_g[R_h(B)],$
$\Leftrightarrow R_n(B) = A$

Jadi, $G_{\overrightarrow{BA}}(B) = R_h R_n(B) = R_g R_h(B)$ atau
$G_{\overrightarrow{BA}} = R_h R_n = R_g R_h$
Sehingga: $(G_{\overrightarrow{AB}})^{-1} = (R_h R_n)^{-1}, \Leftrightarrow$
${R_h}^{-1}{R_n}^{-1} = R_h R_n = G_{\overrightarrow{BA}}$
Jadi, terbukti $(G_{\overrightarrow{AB}})^{-1} = G_{\overrightarrow{BA}}$

Teorema 4.9 Hasil kali dua geseran (translasi) adalah geseran (translasi)

Bukti: Andaikan dua buah translasi yaitu $G_{\overrightarrow{AB}}$ dan $G_{\overrightarrow{BC}}$.
Diperoleh $G_{\overrightarrow{AB}}(A) = B$ dan $G_{\overrightarrow{BC}}(B) = C$



- Jika $G_{\overrightarrow{BC}}$ dikomposisikan dengan $G_{\overrightarrow{AB}}$ melalui A

  Maka: $G_{\overrightarrow{BC}}\, G_{\overrightarrow{AB}}(A) = G_{\overrightarrow{BC}}\left[G_{\overrightarrow{AB}}(A)\right]$, $\Leftrightarrow$ $G_{\overrightarrow{BC}}\,(B) = C$

  Andaikan, ambil titik E sebarang.

  Maka diperoleh: $G_{\overrightarrow{AB}}(E) = E'$ dan $G_{\overrightarrow{BC}}\,(E') = E''$

  Berarti bahwa: $\overrightarrow{EE'} \doteq \overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{E'E''} \doteq \overrightarrow{BC}$

- Jika, $G_{\overrightarrow{BC}}$ dikomposisikan dengan $G_{\overrightarrow{AB}}$ melalui E

  Maka: $G_{\overrightarrow{BC}}\, G_{\overrightarrow{AB}}(E) = G_{\overrightarrow{BC}}\left[G_{\overrightarrow{AB}}(E)\right], \Leftrightarrow$ $G_{\overrightarrow{BC}}\,(E') = E''$

  Berarti bahwa: $\overrightarrow{EE'} \doteq \overrightarrow{AC}$

  Sehingga diperoleh: $G_{\overrightarrow{EE'}}(E) = E'' = G_{\overrightarrow{AC}}$

Teorema 4.10 Hasil kali (komposisi) suatu geseran (translasi) dan suatu setengah putaran adalah setengah putaran

Bukti: Andaikan $G_{\overrightarrow{AB}}$ adaah suatu geseran

Ambil titik C sebarang, dan misal ada titik E tunggal

Maka: $\overrightarrow{CE} \doteq \overrightarrow{AB}$

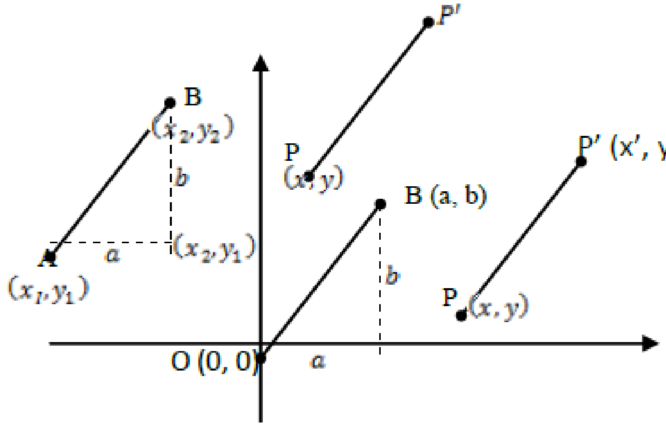
Ambil titik D, sehingga D titik tengah $\overrightarrow{CE}$, berarti: $\overrightarrow{CE} \doteq 2\overrightarrow{CD}$

Berdasarkan Teorema 4.7 bahwa $G_{\overrightarrow{AB}} = S_C S_D$

Jadi, $G_{\overrightarrow{AB}} S_C = (S_D S_C) S_C = S_D (S_C S_C) = S_D I = S_D$

Dengan demikian bahwa: $G_{\overrightarrow{AB}} S_C = S_D$

Geseran (translasi) pada geometri *Euclide* dalam bentuk analitik biasanya menggunakan prinsip-prinsip aljabar dan bilangan riil pada sistem koordinat kartesius, untuk menyelesaikan dalam persamaan bidang (dimensi 2 atau 3) atau garis (misal: garis lurus) dalam pengukuran. Perhatikan Gambar berikut!



Berdasarkan gambar di atas, diketahui bahwa: $B(a, b)$ dan $P(x, y)$

Jika: $G_{\overrightarrow{OB}}(P) = P'$, maka: $\overrightarrow{OB} \doteq \overrightarrow{PP'}$

Sehingga, $P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + a \\ y + b \end{pmatrix}$

Jika $B(x_2, y_2)$, $A(x_1, y_1)$, $P(x, y)$, maka diperoleh:

$$P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$$

Teorema 4.11 Jika $G_{\overrightarrow{OA}}$ sebuah geseran yang ditentukan oleh titik-titik $O(0,0)$ dan $A(a, b)$ dan T transformasi yang didefinisikan: Untuk semua titik $P(x, y)$, dengan $T(P) = (x + a, y + b)$, maka: $T = G_{\overrightarrow{OA}}$

Bukti: Ambil titik $P(x,y)$, dengan $T(P) = (x + a, y + b)$

Misalkan: $G_{\overrightarrow{OA}}(P) = P'$, berarti $\overrightarrow{PP'} \overset{\circ}{=} \overrightarrow{OA}$

$P' = (x + a - 0, y + b - 0) = (x + a, y + b)$

Jadi, $T(P) = P' = G_{\overrightarrow{OA}}(P)$, untuk setiap $P \in V$, Artinya $T = G_{\overrightarrow{OA}}$

Dengan menggunakan Teorema 4.10

Andaikan $A = (a,b)$ dan $B = (c,d)$

dengan $\overrightarrow{OA} \overset{\circ}{=} \overrightarrow{EF}$ dan $\overrightarrow{OB} \overset{\circ}{=} \overrightarrow{KH}$

Ambil titik $P(x,y)$ sebarang sehingga diperoleh:

$G_{\overrightarrow{OA}}(P) = P' = (x + a, y + b)$ dan $G_{\overrightarrow{OB}}(P) = P' = (x + c, y + d)$

Karena: $\overrightarrow{OA} \overset{\circ}{=} \overrightarrow{EF}$, maka: $G_{\overrightarrow{OB}}(P) = G_{\overrightarrow{EF}}(P) = (x + a, y + b)$

Karena: $\overrightarrow{OB} \overset{\circ}{=} \overrightarrow{KH}$, maka: $G_{\overrightarrow{OB}}(P) = P' = G_{\overrightarrow{KH}} = (x + c, y + d)$

Jika $G_{\overrightarrow{KH}}$ di komposisikan dengan $G_{\overrightarrow{EF}}$ melalui titik P,

Maka diperoleh: $G_{\overrightarrow{KH}}G_{\overrightarrow{EF}}(P) = G_{\overrightarrow{KH}}[G_{\overrightarrow{EF}}(P)]$

$\Leftrightarrow G_{\overrightarrow{KH}}(x + a, y + b), \Leftrightarrow \big((x + a) + c, (y + b) + d\big)$

$\Leftrightarrow G_{\overrightarrow{KH}}G_{\overrightarrow{EF}}(P) = \big(x + (a + c), y + (b + d)\big)$

Dengan demikian bahwa: $G_{\overrightarrow{KH}}G_{\overrightarrow{EF}}$ adalah geseran yang membawa titik $O(0,0)$ ke titik $\big((a + c), (b + d)\big)$

Contoh 4.4 Diketahui titik-titik $A(2,3)$, $B(4,3)$, dan $P(6,1)$

Tentukanlah $P' = G_{\overrightarrow{AB}}(P)$.

Penyelesaian: Misalkan: $P'(x', y')$, maka: $AB = B - A = (4,3) - (2,3) = (2,0)$

Sehingga: $P' = \binom{6}{1} + \binom{4-2}{3-3} \Leftrightarrow \binom{6}{1} + \binom{2}{0} = \binom{8}{1}$

Contoh 4.5 Diketahui titik $C(1,2)$ dan $D(3,4)$. Tentukanlah titik E, jika dipenuhi bahwa E adalah hasil geseran terhadap $\overrightarrow{CD}$ pada titik $F(1,1)$

Penyelesaian: Misalkan: $E(x, y)$, Sehingga: $E = G_{\overrightarrow{CD}}(F) \Leftrightarrow \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CD}$

$\Leftrightarrow (x_E - x_F, y_E - y_F) = (x_D - x_C, y_D - y_C)$

$\Leftrightarrow (x_E - 1, y_E - 1) = (3 - 1, 4 - 2)$

$(x_E - 1, y_E - 1) = (2, 2)$

Maka diperoleh : $x_E - 1 = 2 \Leftrightarrow x_E = 3$; $y_E - 1 = 2$, $\Leftrightarrow y_E = 3$

Jadi, titik $E = (3,3)$

Contoh 4.6 Jika $M(2,3)$ dan $N(4, -7)$, tentukan persamaan garis g dan h, sehingga $G_{\overrightarrow{MN}} = R_h R_g$

Penyelesaian: Diketahui bahwa: titik $M(2,3)$ dan $N(4, -7)$

Misal: jarak antara garis g dan $h = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$

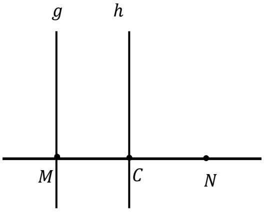
Maka: Garis g dan h tegak lurus terhadap $\overrightarrow{MN}$.

Karena: $g, h \perp \overrightarrow{MN}$, maka: $\overrightarrow{MN}$ ruas garis berarah dari g ke h.

Sehingga: $G_{\overrightarrow{MN}} = R_g . R_h = R_h . R_g$

- Berdasarkan rumus persamaan garis:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$



Maka persamaan garis $\overrightarrow{MN}$ adalah:

$\Leftrightarrow \frac{y-2}{7-3} = \frac{x-2}{-4-2}$

$\Leftrightarrow -6(y - 2) = 4(x - 2)$

$\Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3} + 3$

$\Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + 4\frac{1}{3}$

Jadi: $m\ (R_g : R_h) = \frac{3}{2}$

- Misalkan: $M \in g$, maka persamaan garis g adalah:

$(y - y_1) = m(x - x_1)$

$\Leftrightarrow (y - 3) = \frac{3}{2}(x - 2), \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x - 3 + 3,$

$\Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x$

Jadi, persamaan garis g adalah $y = \frac{3}{2}x$

- Diketahui Jarak antara garis g dan $h = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$, dan $M \in g$

Sehingga garis h melalui titik C dan titik $C = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$.

Maka diperoleh titik C terhadap sumbu koordinat (x, y) adalah:

$(x_C, y_C) = \left(\frac{x_M+x_N}{2}, \frac{y_M+y_N}{2}\right) = \left(\frac{2-4}{2}, \frac{3+7}{2}\right) =$
$(-1, 5)$

Jadi: $C(-1, 5)$

- Persamaan garis $h = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$ dan melalui $C(-1, 5)$ adalah

$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$

$\Leftrightarrow (y - 5) = \frac{3}{2}(x + 1),$

$\Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} + 5$

$\Leftrightarrow y = \frac{3}{2}\mathrm{x} + \frac{13}{2}$

Jadi, persamaan garis h adalah $y = \frac{3}{2}x + \frac{13}{2}$

C. Latihan Soal

Kerjakan soal berikut dengan tepat dan benar

1. Buktikan pernyataan berikut benar atau salah
   a. Jika $S_{AB} = R_s R_t$ maka $S_{BA} = R_t R_s$
   b. Setiap translasi adalah suatu involusi
2. Jika $A(2,3)$ dan $B(-4,7)$ adalah titik-titik. Maka tuliskan persamaan garis s dan t sedemikian hingga $R_s R_t = S_{AB}$
3. Jika diketahui titik-titik $A(-1,3)$, $B(-5,-1)$, dan $C(2,4)$. Maka:
   a. Tentukan $C' = S_{AB}(C)$
   b. Tuliskan persamaan garis s dan t sedemikian hingga $C \in s$ dan $R_t R_s = S_{AB}$
4. Jika $A(2,-1)$, $B(3,4)$ dan $s = \{(x+y) | y + 2x = 4\}$. Tuliskan persamaan untuk $s' = S_{AB}(s)$
5. Diketahui titik A, B, C adalah tak segaris, maka:
   a. Lukislah $G_{AB}(A)$, $G_{AB}(B)$, dan $G_{AB}(C)$
   b. Lukislah garis-garis g dan h dengan $A \in g$ dan $G_{AB} = M_h M_g$
   c. Lukislah garis-garis g dan h dengan $C \in g$ dan $G_{AB} = M_h M_g$
6. Diketahui titik-titik A, B, dan garis g sehingga $g \perp \overline{AB}$, maka lukislah:
   a. Garis h sehingga $M_h M_g = G_{AB}$
   b. Garis k sehingga $M_g M_k = G_{AB}$
   c. Garis m sehingga $m' = G_{AB}(m)$
   d. Titik C sehingga $G_{BA}(C) = B$
7. Jika $A(2,3)$ dan $B(-4,7)$, tentukan persamaan garis g dan h sehingga $M_h M_g = G_{AB}$
8. Diketahui $A(2,1)$ dan $B(5,-3)$, jika G adalah geseran (translasi) yang membawa A ke B, maka:
   a. Tentukan $G(C)$, jika $C(4,2)$
   b. Tentukan $G(P)$, jika $P(x,y)$

9. Diketahui $A(2,1)$ dan $B(3,4)$, persamaan $g = \{(x,y)|y + 2x = 4\}$, maka:
   a. Tentukan $G_{AB}(P)$, jika $P(x,y)$
   b. Tentukan titik D, sehingga $G_{AB}(D) = (1,3)$
   c. Sebuah persamaan garis h, jika $h = G_{AB}(g)$
10. Andaikan $A = (a_1, a_2)$ dan $B = (b_1, b_2)$. Maka buktikan menggunakan koordinat-koordinat, jika:
   a. $S_B S_A$ adalah suatu translasi
   b. P sebuah titik dan $P' = S_B S_A(P)$, maka $\overline{PP'} = 2\,\overline{AB}$
11. Diketahui $A = (2,1)$ dan $B = (-3,5)$, maka:
   a. Tentukan $S_A S_B(P)$, jika $P(x,y)$
   b. Tentukan persamaan himpunan $L' = S_A S_B(L)$, jika $L = \{(x,y)|x^2 + y^2 = 4\}$
12. Jika diketahui titik-titik $A(1,0)$, $B(2,5)$, $C(-3,8)$. Maka tentukan koordinat-koordinat titik D sehingga $G_{CD} = S_B S_A$
13. Diketahui garis-garis g dan h yang sejajar dan sebuah titik A yang tidak pada garis tersebut. Maka lukislah titik B sehingga $M_h M_g = G_{AB}$ dan titik C sehingga $M_h M_g = G_{zAC}$
14. Diberikan dua lingkaran L_1 dan L_2 dan garis g. Lukislah garis $h \parallel g$ yang memotong L_1 di P dan L_2 di Q sedemikian hingga $|PQ| = a$
15. Tentukan bayangan lingkaran $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$, jika ditranslasikan $T = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix}$

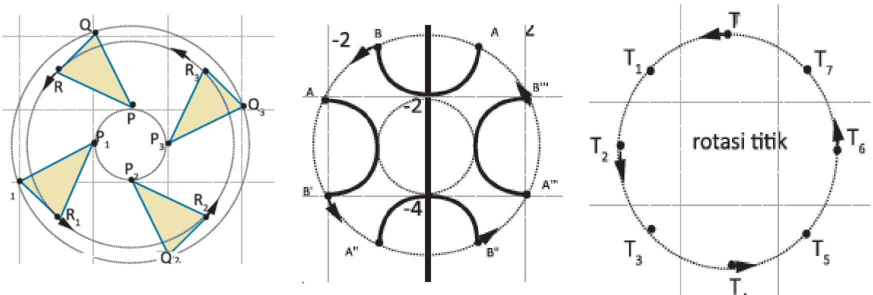
BAB 5

PUTARAN (ROTASI)

A. Definisi Putaran (Rotasi)

Putaran (Rotasi) pada transformasi geometri memiliki besar sudut tertentu, misalkan sebesar θ dengan arah putaran (rotasi) searah jarum jam dan berlawanan arah jarum jam. Arah putaran sudut dapat bernilai negatif apabila searah jarum jam dan bernilai positif apabila berlawanan arah jarum jam.

Putaran pada transformasi geometri ini juga membutuhkan sebuah titik acuan (titik pusat) sebagai sumbu putarnya yaitu titik pusat $O(0,0)$ dan $P(a,b)$ dengan $a,b \neq 0$. Putaran (rotasi) juga memiliki sifat terhadap benda atau bangun yaitu bangun yang diputar tidak mengalami perubahan bentuk atau ukuran, dan mengalami perubahan posisi. Berikut contoh putaran (rotasi) pada bidang, kurva, dan titik.



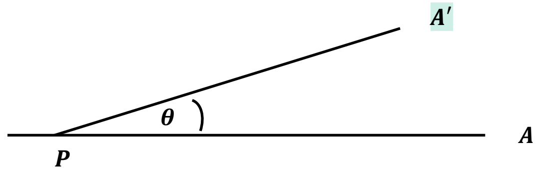
Gbr (a) Gbr (b) Gbr (c)

Gambar 5.1. Putaran Terhadap: (a) Bidang, (b) Kurva, (c) Titik

Definisi 5.1 Suatu putaran terhadap titik pusat P dan sudut θ merupakan suatu pemetaan untuk sebarang A pada bidang yang dinotasikan:

$$R_{(P,\theta)}(A) = \begin{cases} A & \text{untuk } A = P \\ A' & \text{untuk } A \neq P, \end{cases}$$

dengan $|PA'| = |PA|$ dan $m\angle APA'$



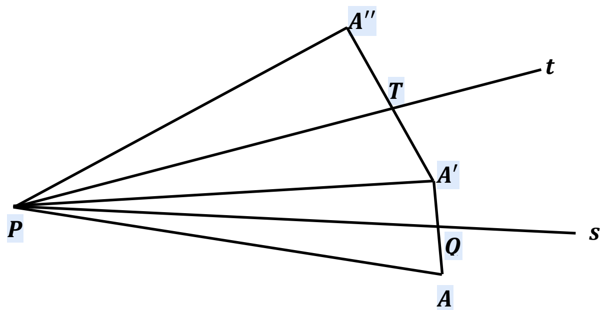
Teorema 5.1 Suatu putaran $R_{(P,\theta)}$ selalu dinyatakan sebagai dua pencerminan terhadap s dan t dengan P adalah titik (s,t) dan $m\angle(s,t) = \frac{1}{2}\theta$.

Bukti: Ambil sebarang titik A di bidang V, misalkan: $A \neq P$

Akan dibuktikan: $R_{(P,\theta)}(A) = (R_t R_s)(A)$ dengan P adalah titik (s,t) dan $m\angle(s,t) = \frac{1}{2}\theta$

Tarik garis s dan t yang masing-masing melalui P dan $m\angle(s,t) = \frac{1}{2}\theta$

Perhatikan gambar berikut.



Misalkan: $A' = R_s(A)$ dan $A'' = R_t(A')$

Sehingga: $A'' = R_t(A') = R_t[R_s(A)] = [R_tR_s](A)$

Misalkan: titik tengah AA' adalah Q dan titik tengah AA'' adalah T.

Sehingga diperoleh:

3 $m\angle(QPA) = m\angle(QPA')$ dan $m\angle(TPA') = m\angle(TPA'')$

Jika $\alpha = \angle(s,t)$, maka: $m\angle(TPA'') = 2m\angle(APQ) + 2m\angle(TPA')$

$\Leftrightarrow 2m\angle(QPA') + 2m\angle(A'PT)$,

$\Leftrightarrow 2m\angle(QPT) = 2m\angle(s,t) = 2\alpha = \theta$

$\Leftrightarrow m\angle(TPA'') = 2m\angle(s,t) = 2\alpha = \theta$

Berdasarkan sifat pencerminan bahwa: $|PA''| = |PA'| = |PA|$

Sehingga hasil dua kali pencerminan terhadap s dan t adalah

$|PA''| = |PA|$ dan $m\angle(TPA'') = 2m\angle(s,t) = 2\alpha = \theta$

Teorema 5.2 Andaikan s dan t dua garis yang tidak saling tegak lurus dan berpotongan di titik A. Misalkan P dan Q dua titik yang berlainan
3 dengan A, maka $m\angle(PAP'') = m\angle(QAQ'')$ dengan $P'' = R_tR_s(P)$ dan $Q'' = R_tR_s(Q)$.

Bukti: Untuk membuktikan ini dilakukan dengan beberapa kasus berikut.

- Kasus 1:

Andaikan P dan K terletak pada s,

Maka: $R_t[R_s(A)] = A''$ dengan $A'' = A$

Karena: $R_t[R_s(A)]$ sebuah isometri,

Maka: $P'' = K''$ dan $A'' = A$ terletak pada satu garis yang melalui A.

Sehingga: $m\angle(PAP'') = m\angle(KAK'')$

Jika $P \notin s$ dan besar sudut tidak berubah,

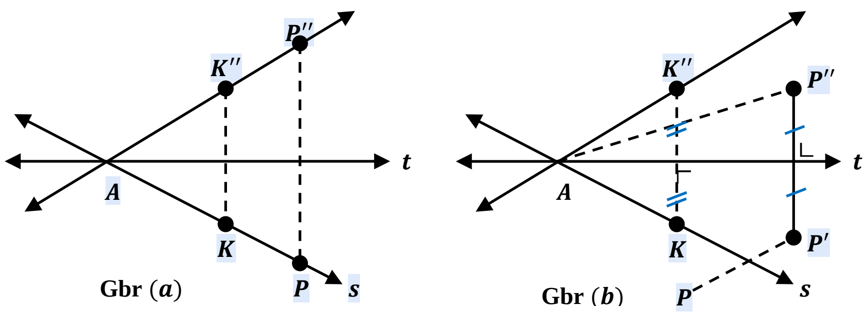
Maka: $m\angle(PAK) = m\angle(P''AK'')$

Karena hasil kali dua pencerminan garis adalah isometri,

Maka: $(APK) = (AP''K'')$

Jadi, $m\angle(PAK) = m\angle(P''AK'')$

Perhatikan gambar (a) berikut



Gbr (a) Gbr (b)

➢ Kasus 2:

Apabila kedudukan P seperti gambar (b)

Maka: $m\angle(PAP) = m\angle(PAK) + m\angle(KAP'')$

Sedangkan: $m\angle(KAK) = m\angle(KAP'') + \angle(P''AK'')$

Sehingga: $m\angle(PAP'') = m\angle(KAK'')$

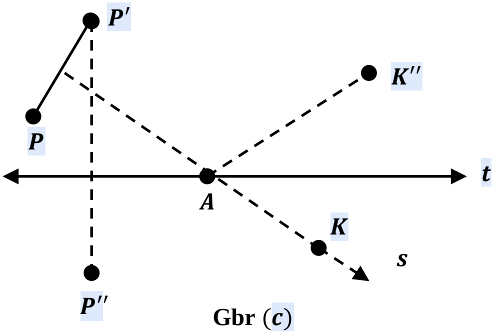
➢ Kasus 3: untuk kedudukan P seperti gambar (c),

Dapat dibuktikan: $m\angle(PAP'') = m\angle(KAK'')$

Jadi, untuk setiap titik $P \neq A$, diperoleh: $m\angle(PAP'') = m\angle(KAK'')$

Untuk titik Q, diperoleh: $m\angle(QAQ'') = m\angle(KAK'')$

Sehingga: $m\angle(QAQ'') = m\angle(PAP'')$

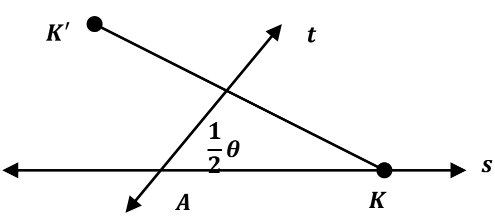


Gbr (c)

Teorema 5.3 Jika s dan t dua garis yang tidak saling tegak lurus dan berpotongan di titik A. Jika sudut antar garis s ke garis t adalah $\frac{1}{2}\theta$, maka: $R_{A,\theta} = R_t R_s$

Bukti: Andaikan titik $P \neq A$ dan titik $K \neq A$ pada s.

Andaikan $K' = R_t R_s(K)$, maka: $m\angle(KAK') = \frac{1}{2}\theta = \theta$



Jika $P' = R_t R_s(P)$, menurut teorema 5.2

Maka: $m\angle(PAP') = m\angle(KAK')$

Sehingga: $m\angle(PAP') = \theta$

Karena: $A' = R_t R_s(A) = A$ dan $R_t R_s$ sebuah isometri

Maka: $P'A' = PA$ sehingga $R_t R_s = R_{A,\theta}$

Karena komposit dua pencerminan terhadap dua garis yang berpotongan tidak tegak lurus merupakan rotasi dan kedua garis tersebut sebagai pusat rotasi.

Teorema 5.4 Hasil kali (komposisi) dua pencerminan akan berupa geseran atau putaran.

$$R_t R_s = \begin{cases} S_{AB} & \text{jika s} \parallel \text{t} \\ R_{(P,\theta)} & \text{jika s} \nparallel \text{t,} \end{cases}$$

Bukti: Andaikan ada rotasi $R_{A\theta 1}$ dan rotasi $R_{B\theta 2}$

Misalkan: tarik garis $s = \overleftrightarrow{AB}$, Jika $m\angle(XAY) = m\angle(XAZ) = \frac{1}{2}\theta_2$,

Maka: $R_{A,\theta 1} = R_s R_t$ dan $R_{B\theta 2} = R_u R_s$

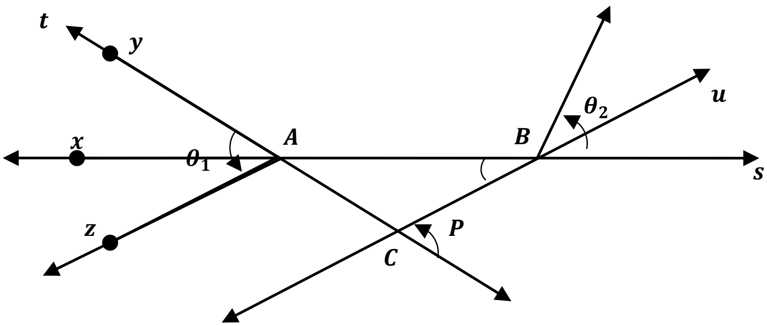
Jadi: $R_{B\theta 2} R_{A,\theta 1} = (R_u R_s)(R_s R_t) = R_u R_t$

Jika: u ∥ t, maka: $R_{B\theta 2} R_{A,\theta 1}$ adalah geseran (translasi)

Jika: u ∦ t (berpotongan di C), maka: $R_s R_t$ adalah putaran (rotasi)

Andaikan $R_{C\theta} = R_{B\theta 2} R_{B,\theta 1}$, maka apakah ada hubungan antara $\theta, \theta 1, \theta 2$?

Perhatikan gambar berikut



Gambar 5.2. Hasil Kali Dua Pencerminan

Terlihat bahwa: $m\angle(ACB) = \frac{1}{2}\theta_2$ dan $m\angle(BAC) = \frac{1}{2}\theta_1$

Sehingga: $m\angle(PCB) = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)$

Berarti bahwa: sudut dari t ke u adalah $\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)$, maka: $2\theta = \theta_1 + \theta_2$

Jika, $\theta_1 + \theta_2 > 180°$, naka: $\theta = (\theta_1 + \theta_2) - 360°$

Sebagai contoh:

Andaikan $\theta_2 = 140°$ dan $\theta_1 = 60°$.

Maka: $m\angle(ACB) = -80°$ dan $m\angle(PCB) = 100°$

Karena: $m\angle(ACB) = -80°$, maka sudut dari t ke u adalah $-80°$

Jadi, $\theta = -160°$ (diperoleh: $(\theta_1 + \theta_2) - 360°$)

Coba selesaikan kasus berikut. (**Latihan**)

Andaikan $R_{B\theta 2}R_{A,\theta 1} = R_{C\theta}$, tentukan:

1) $0 < |\theta_1 + \theta_2| \leq 180°$, maka: $\theta = (\theta_1 + \theta_2)$
2) $\theta_1 + \theta_2 > 180°$, maka: $\theta = (\theta_1 + \theta_2) - 360°$

3) $\theta_1 + \theta_2 < -180°$, maka: $\theta = (\theta_1 + \theta_2) + 360°$
4) $\theta_1 + \theta_2 = 0$, maka hasil kali rotasi adalah geseran (translasi)

Teorema 5.5 Hasil kali (komposisi) dua rotasi dengan pusat pada titik berbeda adalah sebuah rotasi atau translasi

Bukti: Andaikan: ambil dua rotasi sembarang $R_{A\theta 1}$ dan rotasi $R_{B\theta 2}$

6

Misalkan: tarik garis $s = \overleftrightarrow{AB}$, Ambil garis l, s, t

Sehingga: $s \cap t = \{A\}$, $l \cap s = \{B\}$

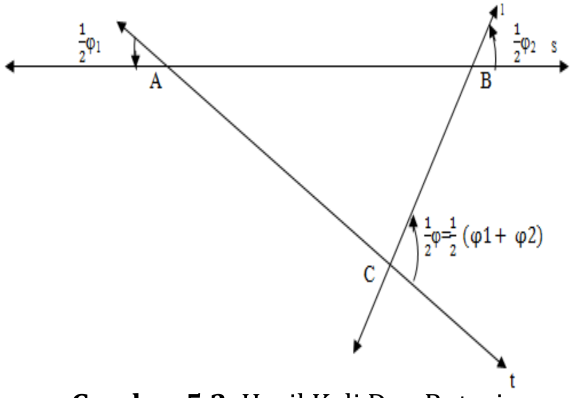
Sudut dari t ke s adalah $\frac{1}{2}\varphi_1$

Sudut dari s ke l adalah $\frac{1}{2}\varphi_2$

Maka: $R_{A,\theta 1} = R_s{}^\circ\, R_t$ dan $R_{B\theta 2} = R_l{}^\circ\, R_s$

Sehingga: $R_{B\theta 2} R_{A,\theta 1} = (R_l{}^\circ\, R_s)(R_s{}^\circ\, R_t) = R_t{}^\circ\, R_l$

Dapat di lukiskan seperti gambar berikut



Gambar 5.3. Hasil Kali Dua Rotasi

Teorema 5.6 Hasil kali (komposisi) sebuah rotasi dan sebuah translasi adalah sebuah rotasi yang sudut rotasinya sama dengan sudut rotasi yang diketahui

Bukti: Ambil sebarang rotasi $R_{A,\varphi}$ dan translasi Y_{BC}, sehingga:

komposisi kedua isometri adalah $R_{A,\varphi} \circ Y_{BC}$ dan $Y_{BC} \circ R_{A,\varphi}$

➢ Akan ditunjukkan $R_{A,\varphi} \circ Y_{BC}$

Misalkan (1): $2\,\overrightarrow{DA} = \overleftrightarrow{BC}$

garis t melalui titik D tegak lurus $\overleftrightarrow{BC}$

garis s melalui titik A sejajar garis t

Maka: $Y_{BC} = (R_s \circ R_t)$

Misalkan (2): garis r melalui titik A,

Maka: sudut dari s ke r adalah $\frac{1}{2}\varphi$

Sehingga: $R_{A,\varphi} = (R_r \circ R_s)$

Karena: $R_{A,\varphi} \circ Y_{BC}$, maka diperoleh:

$$R_{A,\varphi} \circ Y_{BC} = (R_r \circ R_s) \circ (R_s \circ R_t)$$
$$= R_r \circ (R_s \circ R_s) \circ R_t$$
$$= R_r \circ (I) \circ R_t$$
$$= (R_r \circ R_t)$$
$$= R_{E,\varphi 1}$$

Sehingga: $\rho_{A,\varphi} \circ Y_{BC} = \rho_{E,\varphi 1}$, dimana $\varphi_1 = \varphi$ dan $\{E\} = r \cap t$

➢ Akan ditunjukkan $Y_{BC} \circ R_{A,\varphi}$

Misalkan (1): $2\,\overrightarrow{AF} = \overleftrightarrow{BC}$

garis v melalui titik F tegak lurus $\overleftrightarrow{BC}$

garis s melalui titik A sejajar garis v

Maka: $Y_{BC} = (R_v \circ R_s)$

Misalkan (2): garis u melalui titik A ,

Maka: sudut dari u ke s adalah $\frac{1}{2}\varphi$

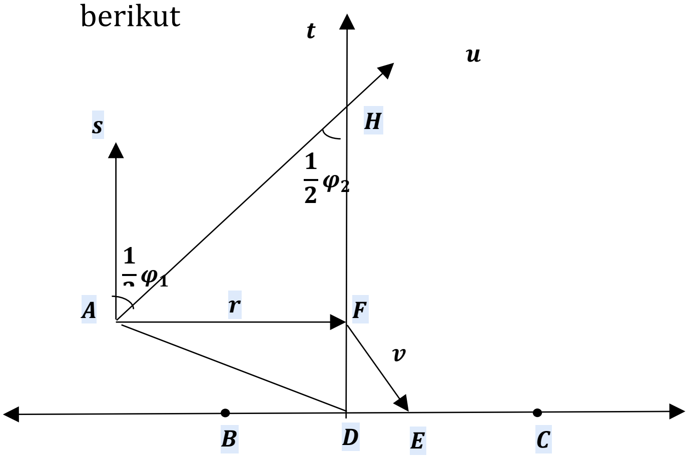
Sehingga: $R_{A,\varphi} = (R_s \circ R_u)$

Karena: $Y_{BC} \circ R_{A,\varphi}$, maka diperoleh:

$$
\begin{aligned}
Y_{BC} \circ R_{A,\varphi} &= \\
(R_v \circ R_s) \circ (R_s \circ R_u) \\
&= R_v \circ (R_s \circ R_s) \circ R_u \\
&= R_v \circ (I) \circ R_u \\
&= (R_v \circ R_u) \\
&= R_{H,\varphi 2}
\end{aligned}
$$

Sehingga: $Y_{BC} \circ R_{A,\varphi} = R_{H,\varphi 2}$, dimana $\varphi_2 = \varphi$ dan $\{H\} = v \cap u$

Dengan demikian dapat di lukiskan gambar berikut



Gambar 5.4. Hasil Kali Rotasi dan Translasi

Teorema 5.7 Himpunan semua translasi dan rotasi membentuk sistem matematika grup terhadap operasi hasil kali (komposisi)

Bukti: Himpunan semua translasi bersifat tertutup terhadap operasi komposisi

Ambil: R_{AB} suatu translasi, maka $R^{-1}{}_{AB} = R_{AB}$ suatu translasi

Ambil: $R_{A,\varphi}$ suatu rotasi, maka $R_{A,\varphi}{}^{-1} = R_{A,-\varphi}$ suatu rotasi juga.

Sehingga setiap unsur dari himpunan translasi dan rotasi, balikannya (invers) juga unsur dari himpunan translasi dan rotasi tersebut.

Berdasarkan teori sub grup,
Jadi, himpunan semua translasi dan rotasi membentuk grup terhadap operasi hasil kali (komposisi).

B. Rumus Putaran dan Maknanya

Dalam menyelesaikan soal-soal terkait putaran (rotasi), dapat menggunakan rumus-rumus putaran dengan ketentuan-ketentuan tertentu, diantaranya sebagai berikut:

1. Terhadap pusat $O(0,0)$

Misalkan:

$A(x,y)$ sebarang titik di bidang V dan

$A'(x',y')$ adalah peta dari A terhadap $R_{P,\theta}(A)$ atau $A' = R_{P,\theta}(A)$.

Misalkan:

sudut yang dibentuk oleh $\overrightarrow{OA}$ terhadap sumbu X positif adalah sebesar α.

Sehingga diperoleh: $x = \overrightarrow{OA}\cos\alpha$ dan $x = \overrightarrow{OA}\sin\alpha$

Maka:

$x' = \overrightarrow{OA}\cos(\alpha+\theta)$, $\Leftrightarrow x' = \overrightarrow{OA}(\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta)$,

$$\Leftrightarrow x' = x\,cos\theta - y\sin\theta$$

$y' = \overrightarrow{OA}\sin(\alpha+\theta)$, $\Leftrightarrow y' = \overrightarrow{OA}(\sin\alpha\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta)$,

$$\Leftrightarrow y' = x\sin\alpha + y\cos\theta$$

Sehingga rumus putaran terhadap pusat $(0,0)$ adalah

$X' = x\,cos\theta - y\sin\theta$ dan $Y' = x\sin\alpha + y\cos\theta$

atau dalam bentuk Matriks:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

2. Terhadap pusat $P(\mathrm{a},\mathrm{b})$

Misalkan: suatu sistem koordinat tegak lurus yang berpangkal di $P(a,b)$ dengan sumbu X'dan Y' yang sejajar dengan sumbu X dan Y.

Hubungan antar dua sumbu koordinat adalah: jika suatu titik C mempunyai koordinat $C(x, y)$ dan $C' = R_{P,\theta}(C)$ mempunya koordinat $C'(x', y')$

Maka dapat diperoleh rumus putaran $R\ [P(a, b), \theta]$:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Jika terhadap sistem koordinat XOY pada titik C mempunyai koordinat (x, y) dan C' mempunyai koordinat (x', y') terhadap $P(a, b)$,

Maka dapat diperoleh rumus putaran $R\ [P(a, b), -\theta]$:

$$\begin{bmatrix} x' - a \\ y' - b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - a \\ y - b \end{bmatrix}$$

Atau

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

Dengan:

$$p = -a\cos\theta + b\sin\theta + a$$

$$q = -a\sin\theta - b\cos\theta + b$$

Karena: besar sudut putaran (positif atau negatif), maka berpengaruh pada nilai *sinus* atau *cosinus*

9 Sehingga: $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ dan $sin\ (-\alpha) = -\sin\alpha$

Contoh 5.1 Persamaan bayangan terhadap garis $2x - y + 6 = 0$, yang dirotasikan pada pangkal koordinat dengan sudut putaran $-90°$ adalah

Penyelesaian: Diketahui bahwa: $(R, -90°)$ dengan pusat $(0,0)$, maka:

2 $x' = x\ cos\theta - y\sin\theta, \Leftrightarrow x' = x\cos(-90°) - y\sin(-90°)$

$\Leftrightarrow x' = 0 - y(-1) = y$

2 $y' = x \sin \alpha + y \cos \theta$, $\Leftrightarrow y' = x \sin(-90°) + y \cos(-90°)$

$\Leftrightarrow y' = x(-1) - 0 = -x$

Dengan Matriks: $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$x' = y$ dan $y' = -x$ dapat disubtitusikan ke persamaan:

$$2x - y + 6 = 0$$

Maka diperoleh:

$\Leftrightarrow 2(-y') - (x') + 6 = 0$, $\Leftrightarrow x' + 2y' - 6 = 0$

Jika sudut putaran $\alpha = \pi$ (180) (dismbolkan H)

Contoh 5.2 Diketahui $A = (0,0)$. Tentukan putaran yang memetakan titik $B = (1,0)$ pada $B' = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$

Penyelesaian: $R_{A(0,0),\alpha}(x, y) = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Maka:

$x = \cos B$ dan $y = \sin B$

$x' = \cos(\alpha + B)$ dan $y' = \sin(\alpha + B)$

Sehingga:

2 $$\begin{bmatrix} \cos(\alpha + B) \\ \sin(\alpha + B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \sin B - \sin \alpha \sin B \\ \sin \alpha \cos B + \cos \alpha \cos B \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ x \cos \alpha - y \sin \alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$R_{B'(0,0),\alpha}(x', y') = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-a \\ y-b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix}$$

Maka: $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ dan $\sin\alpha = \frac{1\sqrt{3}}{2}$, $\Leftrightarrow \alpha =$ $150°$

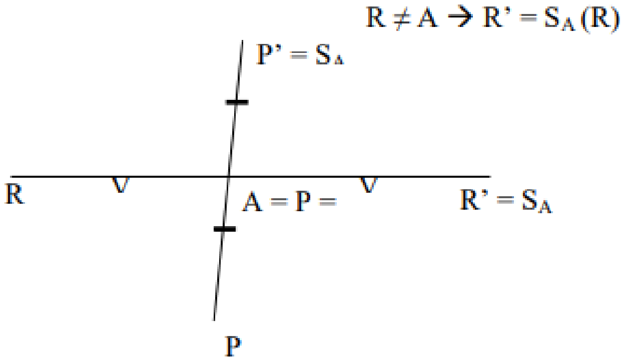
C. Setengah Putaran

Setengah putaran mencerminkan untuk setiap titik pada bidang terhadap sebuah titik tertentu. Setengah putaran disebut juga sebagai pencerminan pada sebuah titik yang dilambangkan: $S_A(P)$, dengan S sebagai setengah putaran, A sebagai titik putarnya, dan P sebagai titik yang akan di transformasikan.

Definisi 5.2 Setengah putaran pada suatu titik A adalah suatu padanan S_A yang didefinisikan untuk setiap titik P pada V:

1) Apabila $P = A$, maka $S_A(P) = P$ atau $S_A(A) = A$
2) Apabila $P \neq A, S_A(P) = P'$, sehingga A titik tengah $\overline{PP'}$

Perhatikan gambar berikut:



Berdasarkan gambar di atas dapat disimpulkan bahwa:

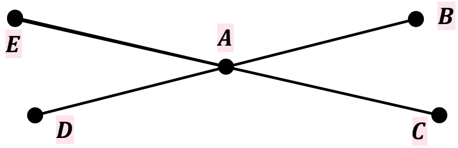
1) Titik R diputar dengan setengah putaran pada titik A menghasilkan $R' = S_A(R)$
2) Titik P diputar dengan setengah putaran pada titik A menghasilkan $P' = S_A(P)$.

3) Titik $R = A$ yang diputar dengan setengah putaran terhadap titik A menghasilkan titik R itu sendiri.

Contoh 5.3 Diberikan A, B, C adalah titik-titik pada bidang V

1) Tentukan titik D sehingga $D = S_A(B)$
2) Tentukan titik E sehingga $E = S_A(C)$

Penyelesaian:

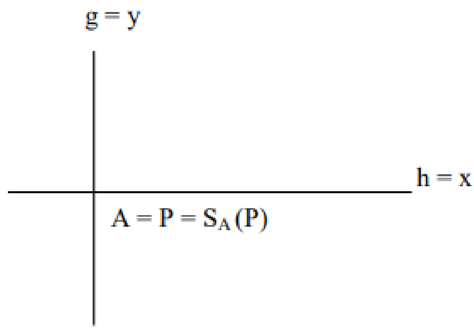


1) Menurut definisi 5.2 bahwa jika $B \neq A$, maka $D = S_A(B)$,
Dimana titik D diperoleh dari perpanjangan $\overrightarrow{BA}$ sepanjang $\overrightarrow{AB}$, sehingga A adalah titik tengah dari $\overrightarrow{BD}$.

2) Jika $C \neq A$, maka $C = S_A(E)$, dimana titik E diperoleh dari perpanjangan $\overrightarrow{CA}$ sepanjang $\overrightarrow{AC}$, sehingga A adalah titik tengah dari $\overrightarrow{CE}$.

Teorema 5.8 Jika A adalah titik dan $g \perp h$ yang berpotongan di A,
Maka: $S_A = R_g R_h$.

Bukti: Berdasarkan definisi 5.2 terdapat 2 kasus yaitu
Kasus 1: Jika $P = A$, maka $S_A(P) = P$



Berdasarkan gambar di atas diketahui bahwa:

Garis h adalah sumbu X dan garis g adalah sumbu Y

Garis h saling tegak lurus garis g

Jika A merupakan titik potong garis g dan h, Menurut definisi 5.2 bahwa $S_A(A) = A$ atau $S_A(P) = P$

Karena: $S_A = R_g R_h$, maka $S_A(A) = R_g R_h(A) = R_g(A) = A$

Karena: titik $P = A$, maka: $R_g R_h(P) = R_g(P) = P = S_A(P)$

Kasus 2: Jika $P \neq A$

Karena: $g \perp h$ maka dapat dibuat sebuah system sumbu orthogonal dengan g sebagai sumbu X dan h sebagai sumbu Y. Dimana A sebagai titik asal.

Akan ditunjukkan bahwa untuk setiap P berlaku $S_A(P) = R_g R_h(P)$

Andaikan: $P(x, y) \neq A$ dan $S_A(P) = P''(x_1, y_1)$

Karena: $S_A(P) = P''$, maka: A titik tengah $\overrightarrow{PP'}$

Sehingga: $(0, 0) = \left(\frac{x_1 + x}{2}, \frac{y_1 + y}{2}\right)$

Maka diperoleh:

$x_1 + x = 0 \, , \Leftrightarrow x_1 = -x$ dan $y_1 + y = 0 \, , \Leftrightarrow$
$y_1 = -y$

Jadi, $S_A(P) = P(-x, -y)$ .... pers (1)

Komposisi pencerminan:

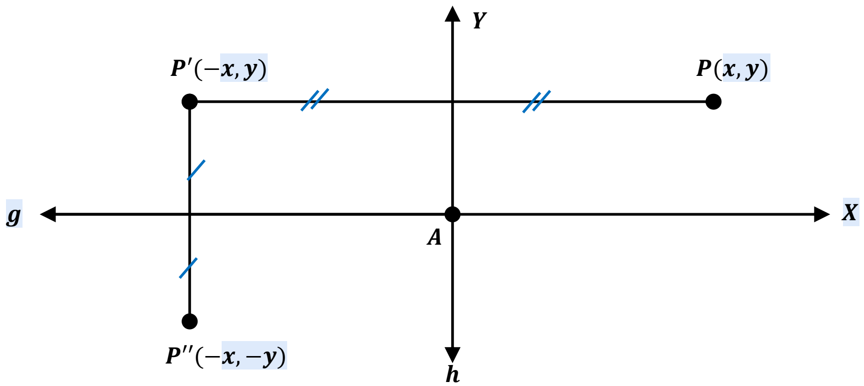
$R_g R_h(P) = R_g[R_h(P)] = R_g(-x, y)$

$R_g R_h(P) = (-x, -y)$ .... pers (2)

Dari persamaan (1) dan (2) maka diperoleh:

$S_A(P) = R_g R_h(P)$ untuk $P \neq A$.

Jadi, terbukti bahwa jika $S_A(P) = R_g R_h(P)$, maka: $S_A = R_g R_h$



Teorema 5.9 Jika $g \perp h$ maka $R_g R_h = R_h R_g$

Bukti: Berdasarkan definisi 5.2 diperoleh bahwa $S_A = R_g R_h$.

Sehingga terdapat 2 kasus dalam menyelesaikannya yaitu $P = A$ dan $P \neq A$.

Kasus 1: $P = A$, maka:

$R_g R_h(A) = R_g(A) = A$ atau $R_h R_g(A) = R_h(A) = A$

7 Sehingga $R_g R_h(A) = R_h R_g(A) = A$

Kasus 2: $P \neq A$, maka $R_g R_h(A) = S_A(A)$
1 $R_g R_h(P) = R_g[P'(-x, y)] = P''(-x, -y)$
$R_h R_g(P) = R_h[P'(x, -y)] = P''(-x, -y)$
Jadi, $R_g R_h(P) = S_A(P)$ sehingga $R_g R_h = S_A$
Berdasarkan kasus 1 dan kasus 2 bahwa komposisi pencerminan yang dirotasikan terhadap dua garis yang tegak lurus bersifat komutatif

Teorema 5.10 Jika S_A adalah setengah putaran, maka $S_A{}^{-1} = S_A$

Bukti: Andaikan g dan h dua garis yang tegak lurus, Maka: $R_g R_h = S_A$, dengan A titik potong antara g dan h

Jadi, $(R_g R_h)^{-1} = R_h{}^{-1} R_g{}^{-1} = S_A{}^{-1}$
Misalkan: $R_h{}^{-1} R_g{}^{-1} = S_A{}^{-1}$
Berdasarkan teorema 3.2 pencerminan
$R_g{}^{-1} = R_g$ dan $R_h{}^{-1} = R_h$
Karena : $(R_g R_h)^{-1} = R_h{}^{-1} R_g{}^{-1}$
Sehingga: $S_A{}^{-1} = (R_g R_h)^{-1}$
$S_A{}^{-1} = R_h{}^{-1} R_g{}^{-1}, \Leftrightarrow R_h{}^{-1} R_g{}^{-1} = R_g R_h$
Jadi, $S_A^{-1} = R_h R_g = S_A = R_g R_h$

4 **Teorema 5.11** Jika $A = (a, b)$ dan $P(x, y)$ maka $S_A(P) = (2a - x, 2b - y)$

Bukti: Andaikan bahwa: $A = P$, maka: $(a, b) = (x, y)$

Karena: $S_A(A) = A = (a, b)$, maka dapat dituliskan:

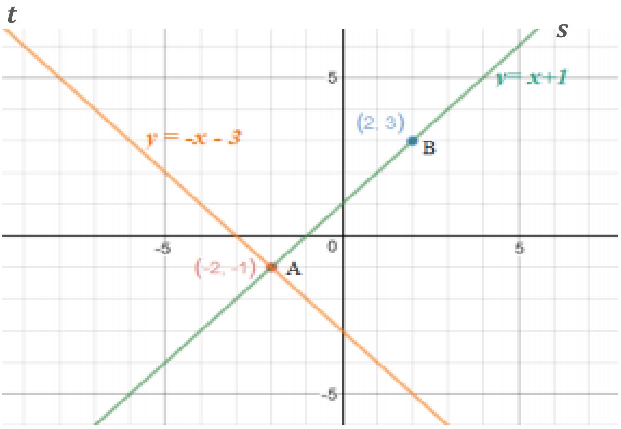
$(a, b) = [(2a - a), (2b - b)]$

$(a, b) = (2a - x, 2b - y)$

Jadi, terbukti bahwa : $S_A(P) = (2a - x, 2b - y)$

Contoh 5.4 Jika $A\,(-2,-1)$ dan $B\,(2{,}3)$, tentukan persamaan garis s dan t, sehingga $R_S(B) = B$ dan $S_A = R_s R_t$

Perhatikan Gambar berikut.



Penyelesaian: Berdasarkan gambar di atas bahwa:

➢ Persamaan garis s terhadap titik $A(-2,-1)$ dan $B(2, 3)$ adalah

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y-(-1)}{3-(-1)} = \frac{x-(-2)}{2-(-2)} \Leftrightarrow \frac{y+1}{4} = \frac{x+2}{4}$$

$\Leftrightarrow 4(y+1) = 4(x+2)$

$\Leftrightarrow 4y + 4 = 4x + 8$

Maka diperoleh garis s adaah: $y = x + 1$

Gradien dari persamaan garis s adalah $y = x + 1$ atau $m_1 = 1$

Karena tegak lurus, maka: $m_1 . m_2 = -1$

Sehingga diperoleh : $m_2 = -1$

➢ Persamaan garis t terhadap $A(-2,-1)$ dan $m_2 = -1$ adalah:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\Leftrightarrow y - (-1) = -1(x - (-2))$$

$$\Leftrightarrow y + 1 = -x - 2$$

$$\Leftrightarrow x + y = -3$$

Maka diperoleh persamaan garis t adalah: $y = -x - 3$

Contoh 5.5 Tentukan simbol dan matriks rotasi dari suatu rotasi dengan pusat $(1,-3)$ yang diputar berlawanan arah jarum jam sejauh $30°$

Penyelesaian: Simbol rotasi dituliskan : $R\ [P(a,b),\alpha]$

Karena titik pusat $(1,-3)$ dengan $\theta = 30°$

Maka diperoleh: $R[P\}(1,-3),30°]$

Matriks rotasi dituliskan: $M = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

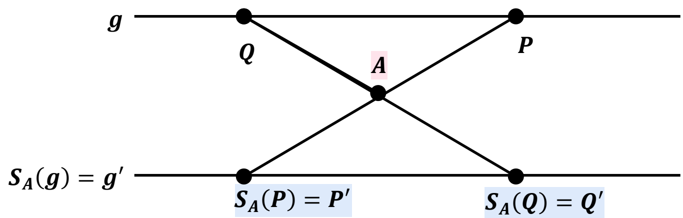
Karena: $\alpha = \theta = 30°$

Maka dapat diperoleh :

$$M = \begin{pmatrix} \cos 30° & -\sin 30° \\ \sin 30° & \cos 30° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Teorema 5.12 Andaikan S_A suatu setengah putaran dan g sebuah garis.
Apabila $A \in g$, maka: $S_A(g) = g'$

Bukti: Andaikan:
$P \in g'$, maka A titik tengah ruas garis $\overrightarrow{PP'}$ dengan $P' = S_A(P)$
$Q \in g'$, maka A titik tengah ruas garis $\overline{QQ'}$, dengan $Q' = S_A(Q)$,
Maka: $\Delta APQ \cong \Delta AP'Q'$. sehingga $PQP'Q'$ jajargenjang.
berarti bahwa: $\overline{PQ} \parallel \overline{P'Q'}$. Dengan demikian: $S_A(g) = g'$



Teorema 5.13 Jika $B \neq A$ adalah dua titik, maka hanya ada satu dari setengah putaran yang memetakan A pada B.

Bukti: Andaikan ada setengah putaran S_D dan S_E

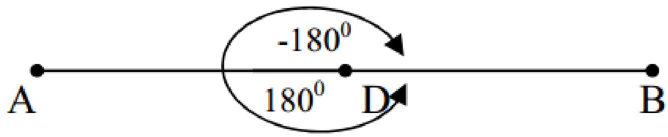
Sehingga: $S_D(A) = B$ dan $S_E(A) = B$

Berarti bahwa: $S_D(A) = S_E(A) = B$

Maka: $S_D{}^{-1}[S_D(A)] = S_D{}^{-1}[S_E(A)]$

Sehingga $S_D{}^{-1} = S_D$

Jadi, $A = S_D[S_E(A)]$



Teorema 5.14 Setengah putaran merupakan suatu dilatasi yang bersifat involusi.

Bukti: Andaikan P titik pusat setengah putaran S_P, maka:

Akan dibuktikan: Jika g sebuah garis, maka $S_p(g) = g'$

dan jika $S_P S_P{}^{-1} = I$, dengan I transfomasi identitas

Jelas bahwa: $S_p(g) = g'$, dengan g sebuah garis

Andaikan: $A, B \in g$ dan $\overrightarrow{\mathrm{PA}} = \overrightarrow{\mathrm{PA'}}$, maka $\overrightarrow{\mathrm{PB}} = \overrightarrow{\mathrm{PB'}}$

Karena: $m\angle(\mathrm{APB}) = \mathrm{m}\angle(\mathrm{A'PB'})$,

Maka: $\Delta\mathrm{PAB} \cong \Delta\mathrm{PA'B'}$, berarti bahwa $S_p(g) = g'$

Jadi, S_p suatu dilatasi

1 Karena: $S_p[S_p(A)] = S_p(A) = A'$, untuk $\forall\ A \in g$

Maka: $S_P{}^{-1}S_p(g) = I(g)$

Jadi, $S_P{}^{-1}S_p = I$, berarti: S_p bersifat involusi.

D. Latihan Soal

Selesaikan soal berikut dengan tepat dan benar.

1. Jika diketahui A adalah titik pusat dan titik $P(4,2)$, yangmana terletak pada sebuah garis g dengan sumbu y dan garis h dengan sumbu x. Tentukan $S_A(P)$
2. Tentukan bayangan titik masing-masing soal berikut ini:
   a. Titik A (2,5) dengan rotasi sejauh 43° yang berlawanan arah jarum jam dengan pusat (0,0)
   b. Tentukan bayangan persamaan $x^2 - 10x + 53 = 0$, jika dirotasi sejauh 43° berlawanan arah jarum jam
3. Tentukan maksud dari simbol rotasi: $R[P(5,-10), -45°]$
4. Diketahui $P(3,2)$ dan $Q(-6,4)$. Tentukan persamaan g dan h sehingga $R_g(Q) = Q$ dan $S_P = R_gR_h$
5. Jika $B = (1,3)$, maka tentukan:
   c. $S_D(D)$ jika $D(-3,4)$
   d. Titik E jika $S_B(E) = (-2,5)$
6. Jika sebuah garis g adalah sumbu y dan garis h adalah sumbu x dan titik A adalah titik pusat dan $P(-6,5)$. Maka tentukan $S_A{}^{-1}(P)$
7. Jika $D = (0,-3)$ dan $B = (2,6)$. Tentukan:
   3 a. $S_DS_B(B)$
   b. $S_DS_B(K)$, jika $K(-1,4)$
   c. $S_DS_B(K)$
8. Diketahui $A(-3,1)$, $B(4,3)$, dan $C(-4,-4)$. Tentukan $S_BS_A(C)$ dan buatah gambar ilustrasinya.

9. Diketahui $A(-4,2)$, $B(5,1)$, dan $C(3,0)$. Tentukan $S_B S_A(C)$ dan buatah gambar ilustrasinya.
10. Tentukan persamaan garis s dan t, jika $F(0,4)$ dan $G(3,2)$ sehingga $R_s(G) = G$ dan $S_F = R_s R_t$.
11. Diketahui titik $P(-2,3)$. Kalau $A(4,-5)$, maka $A' = \sigma_P(A)$ adalah ...
12. Diketahui $P = (2,1)$, $Q(1,-2)$ dan $R(0,3)$ yang tidak segaris. Tentukan titik S sehingga $PQRS$ sebuah jajaran genjang (paralelogram).
13. Diketahui garis m dengan persamaan $y = x$. Jika diketahui titik $A(a_1, a_2)$ tentukan titik B, sehingga $\sigma_m(B) = A$.
14. Diketauhi garis g dengan persamaan: $y = 3x$ dan sebuah titik A. Jika diketahui bahwa $\sigma_g(A) = A' = (3,0)$, maka titik A adalah ...
15. Diketahui $T(3,-2)$ dan garis g: $2x - 3y - 4 = 0$. Tentukan $T' = \sigma_g(T)$ dan titik T'.

BAB 6

ISOMETRI

A. Definisi dan Sifat-sifat Isometri

Secara umum, Isometri merupakan suatu transformasi terhadap pencerminan (refleksi), geseran (translasi), putaran (rotasi) pada sebuah garis dengan mempertahankan atau mengawetkan jarak (panjang suatu ruas garis).

Definisi 6.1 Misalkan T suatu transformasi, dikatakan transformasi T merupakan isometri jika dan hanya jika untuk setiap anggota pasangan titik P dan Q adalah anggota pada bidang V, berlaku untuk $\overrightarrow{P'Q'} = \overrightarrow{PQ}$, dimana $P' = T(P)$ dan $Q' = T(Q)$.

Contoh 6.1 Misalkan diketahui garis g pada bidang V. Jika ditetapkan transformasi T sebagai berikut:

1) Jika $P \in g$ maka $T\ (P)\ =\ P$
2) Jika $P \notin g$, maka $T(P) = P'$ sehingga garis g sumbu dari $\overrightarrow{PP'}$.

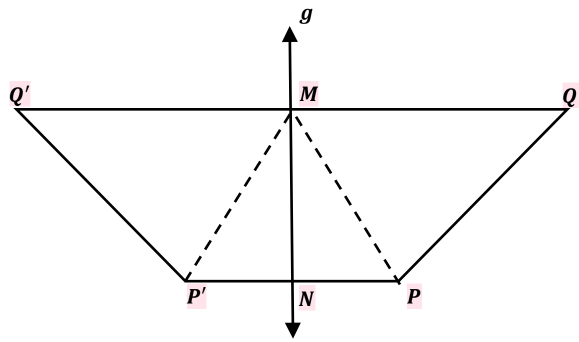
Apakah transformasi T suatu isometri atau bukan?

Penyelesaian: Berdasarkan definisi 6.1

Ambil sembarang anggota dua titik P dan Q dari bidang V.

Misalkan: $T(P) = P'$ dan $T(Q) = Q'$, maka diperoleh dua hal berikut:

- Garis g sumbu dari $\overleftrightarrow{PP'}$, misalkan
  $g \cap \overleftrightarrow{PP'} = \{N\}$,
  Maka: $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{NP'}$
- Garis g sumbu dari $\overleftrightarrow{QQ'}$, misalkan
  $g \cap \overleftrightarrow{QQ'} = \{M\}$,
  Maka: $\overrightarrow{QM} = \overrightarrow{MQ'}$



Berdasarkan gambar di atas, hubungkan diantaranya:

P dengan Q; P' dengan Q; P dengan M; P' dengan M

Perhatikan ΔPQM dengan $\Delta P'Q'M$

Karena: $PN = NP'$ dan $NM = MN$,
$\angle PNM \cong P'NM$ (sudut siku-siku)

Maka: $\Delta PQM \cong \Delta P'NM$

Karena: $PM = P'M$ dan $MN = NM$ Pers (1)

Maka : $\angle NMQ \cong NMQ'$ (sudut siku-siku)

Sehingga: $\angle PMN \cong P'MN$

$$\angle PMQ \cong \angle NMQ - \angle PMN$$

$$\angle P'MQ' = \angle NMQ' - \angle P'MN$$

$$= \angle NMQ - \angle PMN$$

Akibatnya: $\angle PMQ = \angle P'MQ'$ Pers (2)

$QM = Q'M$ Pers (3)

Dari pers (1), (2) dan (3), maka diperoleh:

$$\Delta PQM \cong \Delta P'Q'M$$

akibatnya : $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'}$

Karena P dan Q yang diambil dari sebarang titik pada bidang V, maka berlaku: $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'}$.

Jadi, transformasi T merupakan suatu isometri

Teorema 6.1. Sifat Isometri

Sebuah Isometri memiliki sifat-sifat :

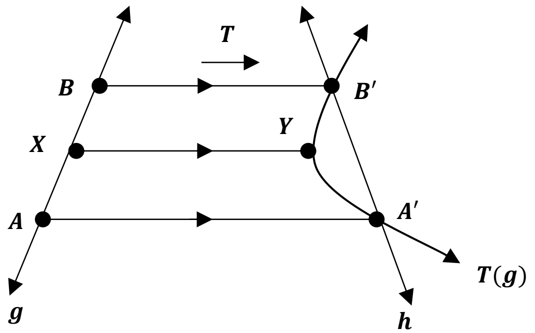
1) Memetakan garis menjadi garis.
2) Mengawetkan besarnya sudut antara dua garis.
3) Mengawetkan kesejajaran dua garis.

Bukti:

1) Ambil isometri sebarang T dan garis g.

Akan ditunjukkan bahwa: $T(g)$ berupa sebuah garis.

Perhatikan gambar berikut.



Berdasarkan gambar di atas,

Ambil dua titik sebarang A dan B pada garis g.

Misalkan: $T(A) = A'$ dan $T(B) = B'$, dan h garis lurus yang menghubungkan A' dan B'

Ditetapkan: $T(g) = \{Y | y = T(X), X \in g\}$,

Akibatnya: $A', B' \in T(g)$.

Jika $T(g)$ berupa garis lurus, maka $T(g) = h$.

Karena: $T(g) = h$

akan ditunjukkan: $T(g) \subset h$ dan $h \subset T(g)$.

➢ Untuk $T(g) \subset h$

Ambil sebarang titik $Y \in T(g)$, akibatnya diperoleh:

$Y \in T(g)$ terletak antara A' dan B' atau (A' Y B')

$Y \in T(g)$ terletak di luar daerah antara A' dan B' tetapi di bagian A' atau ($B'A'$ Y)

$Y \in T(g)$ terletak di luar daerah antara A' dan B' tetapi di bagian B' atau ($A'B'$ Y)

Karena: $Y \in T(g)$ dan (A' Y B')

Maka: ada $X \in g$ dan X antara A dan B atau (AXB) pers (1)

Karena: A, X, B kolinier,

Maka berlaku: $AX + XB = AB$

Karena: $A' = T(A), B = T(B), Y = T(X)$

dan T suatu transformasi

Maka: $A'Y = AX, YB' = XB$ dan $A'B' = AB$ pers (2)

Jika pers (2) ke (1) diperoleh: $A'Y + YB' = A'B'$ pers (3)

- Untuk $h \subset T(g)$

Ambil sebarang $C \in h$, akibatnya diperoleh:

C' antara A' dan B' atau $(A'\ C'\ B')$

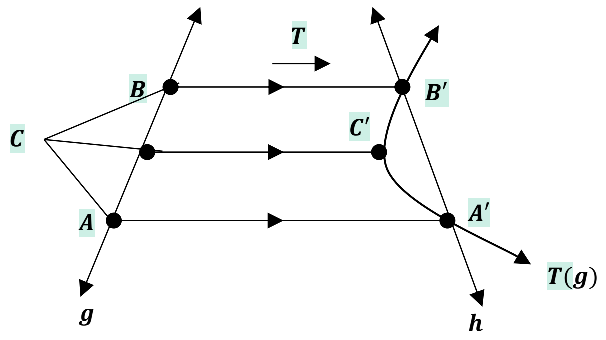
C' di luar daerah antara A' dan B' tetapi di bagian A' atau $(B'A'\ C')$

C' di luar daerah antara A' dan B' tetapi di bagian B' atau $(A'\ B'C')$

Dengan pembuktian kasus yang serupa,
Maka hanya ditunjukkan $(A'\ C'\ B')$

Karena: $C' \in h$ dan $h \in V$, maka: $C' \in V$.
Karena: T suatu transformasi dan $C' \in V$
Karena: ada $\in V$, sehingga $C' = T(C)$.

Perhatikan gambar berikut.



Misalkan: diandaikan $C \neq g$, maka: pers (1)

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \neq \overleftrightarrow{AB}$

Karena: $C' = T(C), A' = T(A), B' = T(B)$,

dan T suatu isometri

Maka: $A'C' = AC, C'B' = CB$, dan $A'B' = AB$ pers (2)

Jika (2) ke (1), diperoleh: $A'C' + C'B' \neq A'B'$ pers (3)

Karena: A', B', C' terletak pada garis lurus h dan

C' terletak antara A' dan B'

Maka diperoleh: $A'C' + C'B' = A'B'$ pers (4)

Karena pers (3) dan (4) kontradiksi,

Jadi, pengandaian salah.

Berdasarkan: $T(g) = \{Y | y = T(X), X \in g\}$

Akibatnya: $C \in g$, maka $C' \in T(g)$,

Berdasarkan: $T(g) \in h$, untuk sebarang $C' \in h$,

Dapat ditunjukkan: $C' \in T(g)$, maka $h \subset T(g)$

Karena: $T(g) \subset h$ dan $h \subset T(g)$, berakibat $T(g) = h$.

Karena: h suatu garis lurus, maka $T(g)$ juga garis lurus

Alternatif bukti pada sifat (1) Isometri

Andaikan g sebuah garis dan T suatu isometri

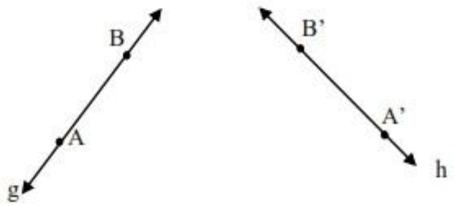
- Akan dibuktikan: $T(g) = g'$ adalah suatu garis juga

Ambil $A \in g$ dan $B \in g$

Maka: $T(g) = g'$, $A' = T(A)$, dan $B' = T(B)$

Melalui A' dan B' ada suatu garis, misalnya h.

Perhatikan ilustrasi gambar berikut.



- Akan dibuktikan: $h = g'$ dan $h \subset g'$

Ambil sebarang $X' \in h$, Karena berada pada bidang V

Maka: andaikan $(\overrightarrow{A'X'B'})$, artinya $\overrightarrow{A'X'} + \overrightarrow{X'B'} = \overleftrightarrow{A'B'}$

Karena T transformasi, maka ada X sehingga $T(X) = X'$

Karena T suatu isometri,

Maka: $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{A'X'}$, $\overrightarrow{XB} = \overrightarrow{X'B'}$, dan $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$

Sehingga: $\overrightarrow{A'X'} + \overrightarrow{X'B'} = \overrightarrow{AX} + \overrightarrow{XB} = \overleftrightarrow{AB}$

Berarti: A, X, B segaris pada garis g dan $X' = T(X) \in g$

Jadi, untuk setiap $X' \in h$, maka $' \in g'$, Sehingga: $h \subset g'$

- Akan dibuktikan $g' \subset h$

Ambil sebarang $' \in g'$,

Maka: ada $Y \in g$, sehingga: $(Y) = Y'$

Misalkan: $(\overleftrightarrow{AYB})$, artinya $Y \in g$ dan $\overrightarrow{AY} + \overrightarrow{YB} = \overleftrightarrow{AB}$

Karena T sebuah isometri,

Maka: $\overrightarrow{AY} = \overrightarrow{A'Y'}, \overrightarrow{YB} = \overrightarrow{Y'B'}$ dan $\overrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{A'B'}$

Sehingga: $\overrightarrow{A'Y'} + \overrightarrow{Y'B'} = \overrightarrow{AY} + \overrightarrow{YB} = \overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{B'A'}$

Berarti: A', Y', B' segaris, yaitu garis yang melalui A' dan B'

Karena h garis yang melalui A' dan B', maka: $Y' \in h$

Karena, jika $Y' \in g'$ dan $Y \in g$, berarti $g' \in h$

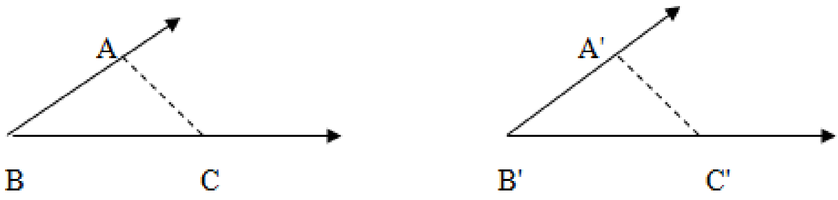
Sehingga: $h \subset g'$ dan $' \subset h$, maka $h = g$

Dengan demikian, jika g sebuah garis, maka $h = T(g)$ sebuah garis juga

2) Ambil sebuah $\angle ABC$

Andaikan: $A' = T\,(A),\ B' = T\,(B),\ C' = T\,(C)$

Perhatikan gambar berikut.



Menurut teorema 6.1 (1), maka $\overline{A'B'}$ dan $\overline{B'C'}$ adalah garis lurus.

Karena: $\angle ABC = \overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BC}$, maka $\angle A'B'C' = \overrightarrow{B'A'} \cup \overrightarrow{B'C'}$

Karena: $\overrightarrow{A'\,B'} = \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{B'\,C'} = \overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{C'\,A'} = \overrightarrow{CA}$

Sehingga: $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$

Jadi: $\angle A'B'C' = \angle ABC$

Sehingga, terbukti bahwa suatu isometri dapat mengawetkan besarnya suatu sudut.

Alternatif bukti pada sifat (2) Isometri

Ambil sebuah $\angle ABC$

5

- Akan ditunjukkan: $m(\angle ABC) = m(\angle A'B'C')$

Andaikan $A' = T(A), B' = T(B), C' = T(C)$, maka:

$\overrightarrow{A'B'}$ peta dari $\overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{B'C'}$ peta dari $\overrightarrow{BC}$

Sehingga: $\overline{AB}$ dan $\overline{BC}$ merupakan sebuah garis lurus

Karena: $\overline{AB}$ dan $\overline{BC}$ merupakan sebuah garis lurus

Maka: $\overline{A'B'}$ dan $\overline{B'C'}$ merupakan garis lurus juga

5

Karena: $\angle ABC = \overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BC}$, maka $\angle A'B'C' = \overrightarrow{B'A'} \cup \overrightarrow{B'C'}$

Perhatikan ΔABC dan $\Delta A'B'C'$ (di atas) bahwa:

$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{C'A'} = \overrightarrow{CA}$

Menurut teorema kekongruenan:

"jika dua buah segitiga yang memiliki sifat (s-s-s) sama, maka kedua segitiga tersebut kongruen".

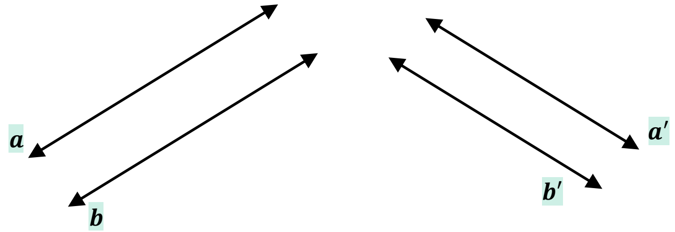
3

Sehingga: $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$, maka $\Delta A'B'C' \cong \Delta ABC$

Jadi, terbukti bahwa suatu isometri mengawetkan besarnya sudut

3) Mengawetkan kesajajaran dua garis

Perhatikan gambar berikut



Akan ditunjukkan bahwa: $a' \parallel b'$.

Andaikan: a' memotong b' di sebuah titik P'

Jadi: $P' \in a'$ dan $P \in b$.

Karena: T sebuah transformasi

Maka: ada P, sehingga $T(P) = P'$ dengan $P \in a$ dan $P \in b$.

Berarti: a memotong b di P

Jadi, pengandaian salah, karena kontradiksi dengan yang diketahui.

Sehingga: $a' \parallel b'$, maka berdasarkan teorema 6.1 sifat (2) bahwa:

Apabila $a \perp b$, maka $T(a) \perp T(b)$ dengan T sebuah isometri

<u>Alternatif bukti pada sifat (3) Isometri</u>

Akan ditunjukkan: $a' \parallel b'$

Andaikan a' memotong b' di titik P', maka $P' \in a'$ dan $P' \in b'$.

Berarti bahwa: a memotong b di P juga

Jadi, pengandaian salah, karena kontradiksi dengan yang diketahui

Jadi: $a \parallel b$

Teorema 6.2 Apabila garis $g \perp h$ dan T suatu isometri, maka $T(g) \perp T(h)$ juga.

Bukti: Karena: sudut dari garis $g \perp h$ maka sudut yang terbentuk adalah siku-siku dan T suatu isometri

Berdasarkan teorema 6.1 sifat (2),
Maka: Sudut yang dibentuk oleh $T(g)$ dan $T(h)$ juga siku-siku

Dengan demikian: $T(g)$ dan $T(h)$ saling tegak lurus

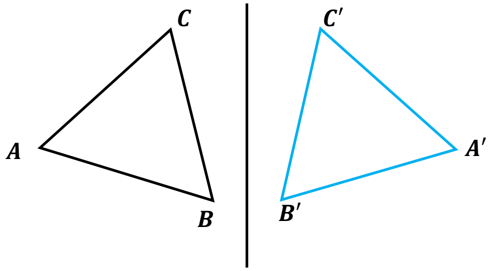
Berdasarkan teorema 6.1 sampai 6.2 di atas bahwa diperoleh sifat penting pada isometri.

Sifat penting Isometri dalam geometri transformasi:

1. Setiap refleksi (pencerminan) pada garis adalah isometri lawan
2. Setiap rotasi (perputaran) adalah isometri langsung
3. Setiap isometri merupakan sebuah isometri langsung atau

B. Isometri Langsung dan Isometri Lawan

Jika kita memiliki suatu transformasi T yang memetakan ΔABC pada $\Delta A'B'C'$, misalnya dengan sebuah pencerminan pada garis g. Perhatikan gambar berikut.



Terlihat bahwa jika pada ΔABC, urutan kelilingnya adalah $A \to B \to C$ (berlawanan arah putaran jarum jam) sedangkan bayangan ΔABC adalah $\Delta A'B'C'$, urutan kelilingnya adalah $A' \to B' \to C'$ (searah putaran jarum jam). Apabila arah keliling sesuai dengan putaran jarum jam, berorientasi negatif ($\Delta A'B'C'$) dan apabila arah keliling berlawanan dengan putaran jarum jam, berorientasi positif (ΔABC).

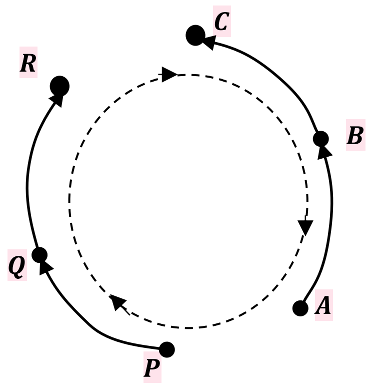
Definisi 6.2 Misalkan (P, Q, R) adalah tiga titik ganda yang koliniear (tidak segaris). Apabila urutan perputaran P, Q, R sesuai dengan perputaran arah jarum jam, maka P, Q, R disebut orientasi negatif. Apabila urutan perputaran P, Q, R berlawanan arah perputaran jarum jam, maka P, Q, R disebut orientasi positif

Definisi 6.3 Suatu Transformasi T disebut transformasi langsung, jika dan hanya jika transformasi tersebut mempertahankan orientasinya. Transformasi lawan jika dan hanya jika transformasi tersebut mengubah arah orientasinya.

Definisi 6.4 Suatu Transformasi T disebut mempertahankan orientasinya apabila untuk setiap tiga titik ganda A, B, C yang kolinear orientasinya sama dengan orientasi dari petanya (bayangan). Sedangkan lainnya disebut mengubah orientasinya.

Definisi 6.5 Isometri langsung adalah isometri yang dilakukan dengan transformasi langsung, dan isometri lawan adalah isometri yang dilakukan dengan transformasi lawan

Contoh 6.2 Ada enam titik A, B, C, P, Q, R. Tentukan orientasi negatif dan positif?



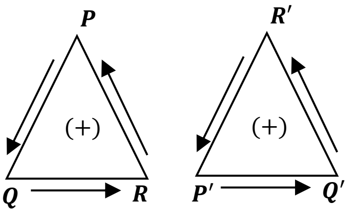
Penyelesaian: Berdasarkan gambar di atas, maka diperoleh:

1) Titik (A, B, C) memiliki urutan perputaran berlawanan arah jarum jam, maka (A, B, C) berorientasi positif.

2) Titik (P, Q, R) memiliki urutan perputaran searah jarum jam, maka (P, Q, R) berorientasi negatif

Contoh 6.3 (Isometri Langsung)

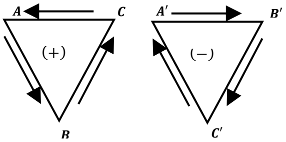
Misalkan: sebuah rotasi pada ΔPQR berlawanan dengan arah jarum jam (+), $\Delta P'Q'R'$ juga tetap berlawanan dengan jarum jam (+). Lukislah putaran segitiga tersebut



Gambar 6.1. Isometri Langsung

Contoh 6.4 (Isometri Lawan)

Misalkan: sebuah refleksi pada ΔABC berlawanan dengan arah jarum jam (+), $\Delta A'B'C'$ searah dengan jarum jam (-). Lukislah segitiga tersebut



Gambar 6.2. Isometri Lawan

C. Hasil Kali (Komposisi) Isometri

Teorema 6.3 Hasil kali (komposisi) dua buah isometri adalah sebuah isometri

Bukti: Ambil dua isometri, T_1 dan T_2
Akibatnya ada komposisi dari T_1 dan T_2
yaitu $T_1 \circ T_2$ dan $T_2 \circ T_1$
Akan ditunjukkan $T_1 \circ T_2$ adalah isometri
Ambil dua titik sebarang $A, B \in v$
Misalkan:
8 $T_2(A) = A_1, T_2(B) = B_1$ dan $T_1(A_1) = A'$, T_1-
$(B_1) = B'$
Maka diperoleh:
5 $(T_1 \circ T_2)(A) = T_1\, [T_2(A)] = T_1(A_1) = A'$
$(T_1 \circ T_2)(B) = T_1\, [T_2(B)] = T_1(B_1) = B'$
Karena:
T_2 isometri, maka $A_1B_1 = AB$
T_1 isometri, maka $A'B' = A_1B_1$
Karena: $A_1B_1 = AB$ dan $A'B' = A_1B_1$,
maka $A'B' = AB$
Jadi, $T_1 \circ T_2$ suatu isometri

Teorema 6.4 Hasil kali sebuah isometri terdapat paling banyak tiga buah refleksi

Bukti: Misalkan: U adalah suatu isometri
A, B, C adalah tiga titik yang tidak segaris
5 A', B', C' adalah peta dari A, B, C

Maka diperoleh: $|AB| = |A'B'|$, $|AC| = |A'C'|$, dan $|BC| = |B'C'|$

Sehingga dapat dibuktikan melalui beberapa kasus berikut

Kasus 1: $A = A'$, $= B'$, $C = C'$
Maka: $U = I$, dan I sebagai hasil kali dua pencerminan garis
Jadi: $I = M_s M_s$, dengan s adalah sebarang garis

Kasus 2: $= A'$, $B = B'$, $C \neq C'$
Untuk: U adalah suatu pencerminan terhadap garis s yaitu: garis yang melalui A dan B, dan $(C \neq C')$ memotong garis s

Kasus 3: $= A'$, $B \neq B'$, $C \neq C'$
Maka: hanya A yang dilalui garis s, $(B \neq B')$ dan $(C \neq C')$ memotong garis s

Kasus 4: $A \neq A'$, $\neq B'$, $C \neq C'$
Maka: akan terdapat suatu refleksi geser G yang membawa A, B, C berturut-turut pada A', B', C'

Diketahui bahwa: refleksi geser merupakan hasil kali tiga buah refleksi (pencerminan).

Sehingga, dari keempat kasus yang telah dibuktikan bahwa isometri adalah hasil kali dari paling banyak tiga buah refleksi.

Apabila sifat-sifat isometri (refleksi, rotasi, translasi) dikalikan dengan salah satu sifat tersebut, maka apakah akan memperoleh suatu isometri yang baru?. Untuk membuktikannya, maka perlu dilakukan melalui 2 contoh kasus berikut.

Kasus 1 Hasil kali refleksi dengan translasi

Andaikan: M sebuah refleksi dengan sumbu t

3 Sehingga: $M = G_{AB}(M)$, dengan $AB \parallel t$.

Andaikan: $G_{\overrightarrow{CD}}$ sebuah translasi

3 Maka: $G_{\overrightarrow{CD}}(M) = G_{\overrightarrow{CD}}\left[G_{\overrightarrow{AB}}(M)\right] = \left[G_{\overrightarrow{CD}}G_{\overrightarrow{AB}}\right](M)$

Karena hasil kali dengan dua translasi adalah translasi

Maka: ada dua garis berarah $\overrightarrow{EF}$

Sehingga: $G_{\overrightarrow{CD}}G_{\overrightarrow{AB}} = G_{\overrightarrow{EF}}$

Dengan demikian, maka: $G_{\overrightarrow{CD}}(M) = G_{\overrightarrow{EF}}(M)$

Apabila $\overrightarrow{EF}$ sebuah garis berarah, maka: $G_{\overrightarrow{EF}}(M) \parallel t$

Apabila $\overrightarrow{EF}$ tidak tegak lurus t, maka $G_{EF}M$ suatu refleksi geser

Jadi, hasil kali refleksi dengan translasi adalah refleksi geser

Kasus 2 Hasil kali refleksi dengan refleksi

Misalkan:

M adalah refleksi pada garis s dan R sebuah refleksi pada garis t

Maka: $M, R = M_s[G_{\overrightarrow{AB}} R_t] = M_s[R_t G_{\overrightarrow{AB}}] = [M_s R_t] G_{\overrightarrow{AB}}$

Apabila $s \parallel t$ (sejajar), maka $M_s M_t$ adalah sebuah translasi

Jadi, $(M_s R_t)\ G_{\overrightarrow{AB}}$ juga merupakan translasi

Sehingga, $M_s R_t$ juga merupakan translasi

Apabila $s \nparallel t$ (tidak sejajar), maka $M_s M_t$ adalah sebuah rotasi

Dari teorema refleksi,

Maka diperoleh juga $M_s R_t = R_t M_s$ merupakan rotasi

Jadi, hasil kali refleksi dengan refleksi adalah translasi atau rotasi

Berdasarkan kasus 1 dan 2 bahwa:

1) Hasil kali dua refleksi adalah translasi dan rotasi
2) Hasil kali translasi dengan refleksi atau hasil kali tiga refleksi adalah refleksi geser.
3) Setiap transformasi yang berupa isometri merupakan hasil kali dari beberapa refleksi

Teorema 6.5 Himpunan transformasi-transformasi yang terdiri atas translasi refleksi, rotasi dan refleksi geser adalah tertutup terhadap operasi komposisi (perkalian)

Bukti 1: Misalkan: operasi komposisi ($\circ$) dari $U = \{S, R, M, G\}$ dapat dinyatakan dalam bentuk tabel berikut:

$\circ$	S	R	M	G
S	S	R	G atau M	G atau M
R	R	R atau S	G atau M	G atau M
M	G atau M	G atau M	R atau S	R atau S
G	G atau M	G atau M	R atau S	R atau S

Himpunan $U = \{S, R, M, G\}$ memuat isometri dan menampilkan syarat ketunggalan bagi isometri.

Kemudian, apabila diberikan sepasang titik A dan B, maka dapat ditemukan adanya banyak isometri yang membawa A ke B.

Apabila diberikan dua pasang titik A, B, P, Q dengan $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{PQ}|$, maka masih ada lebih dari satu isometri yang membawa $\overrightarrow{AB}$ ke $\overrightarrow{PQ}$.

Bukti 2: Misalkan: beberapa hasil kali pasangan-pasangan yang mungkin dari kumpulan isometri yaitu: Geseran (S), Perputaran (R), Setengah Putaran (H), Refleksi Geser (G), Refleksi/Pencerminan (M). maka dapat ditunjukkan pada tabel berikut.

HASIL KALI ISOMETRI	HASIL TRANSFORMASI
S-S	S
S-R atau R-S	R
S-M atau M-S	G atau M
S-G atau G-S	G atau M
R-R	R atau S
R-M atau M-R	G atau M
M-M	R atau M
R-G atau G-R	G atau M
M-G atau G-M	R atau S
G-G	R atau S

Bukti 3: Akan ditunjukkan dengan beberapa hasil kali diantaranya adalah

1) Hasil kali $R - G$ $(G - R)$ adalah G atau M
2) Hasil kali $M - G$ adalah R atau S
3) Hasil kali $G - G$ adalah R atau S

1) Hasil kali $R - G$ $(G - R)$ adalah G atau M

Misalkan: $R = R_{p,\theta}$ dan $G = M_t S_{\overrightarrow{CD}}$

s garis yang melalui P dengan $s \parallel t$

r garis melalui P dengan $m\big(<(s,r)\big) = \frac{1}{2}\theta$

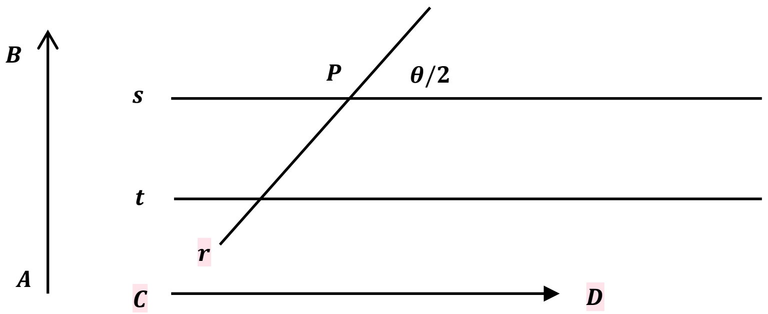
Maka: $R_{p,\theta}{}^\circ\, G = (M_r M_s)\big(M_t S_{\overrightarrow{CD}}\big)$

$\Leftrightarrow M_r(M_s M_t)S_{\overrightarrow{CD}} = M_r\big(S_{\overrightarrow{AB}}\big)S_{\overrightarrow{CD}}$

dengan $AB \perp t$ dan $|AB| = 2$ kali jarak (t, s)

$R_{p,\theta}{}^\circ\, G = M_r S_{\overrightarrow{PQ}}$, dengan $\left|\overleftrightarrow{PQ}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right| + \left|\overrightarrow{AB}\right|$

Maka terbukti bahwa: G atau M

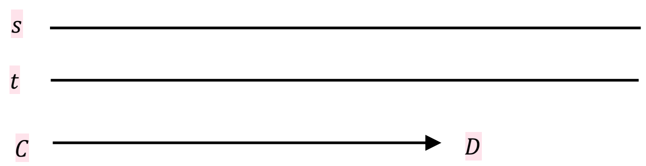


2) Hasil kali $M - G$ adalah R atau S.

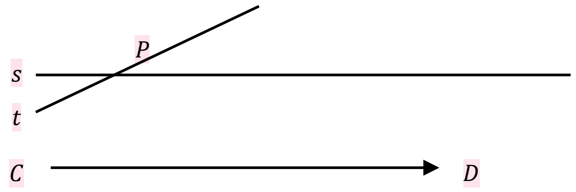
Misalkan: $M = M_t$ dan $G = M_s S_{\overrightarrow{CD}}$, Maka:

$M \circ G = M_t M_s S_{\overrightarrow{CD}}$

- $(S_{\overrightarrow{AB}})S_{\overrightarrow{CD}} = S$, untuk $t \parallel s$



- $R_{p,\theta}S_{CD} = R$, untuk $t \nparallel s$



3) Hasil kali $G - G$ adalah R atau S.

- Misalkan: t adalah sebarang garis tidak sejajar s $(t \nparallel s)$

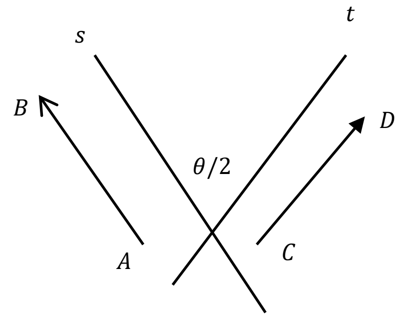
$$G_1 = S_{\overrightarrow{AB}} M_s \text{ dan } G_2 = S_{\overrightarrow{CD}} M_t$$

Maka:

$G_1 \circ G_2 = (S_{\overrightarrow{AB}} M_s)(S_{\overrightarrow{CD}} M_t) =$
$(S_{\overrightarrow{AB}} M_s)(M_t S_{\overrightarrow{CD}}) = S_{\overrightarrow{AB}}(M_s M_t) S_{\overrightarrow{CD}}$

$$\Leftrightarrow S_{\overrightarrow{AB}}(R_{p,\theta})S_{\overrightarrow{CD}} = S_{\overrightarrow{AB}} R_{Q,\theta} = R_{K,\theta}$$

Sehingga diperoleh: $G_1 \circ G_2 = R_{K,\theta}$

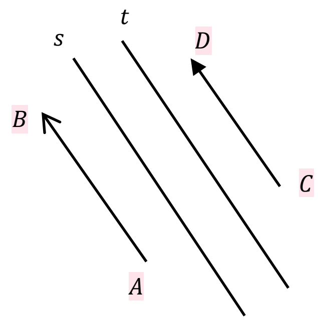


➢ Misalkan: t adalah sebarang garis sejajar s ($t \parallel s$)

$$G_1 = S_{\overrightarrow{AB}} M_s \text{ dan } G_2 = S_{\overrightarrow{CD}} M_t$$

Maka: $G_1 \circ G_2 = S_{\overrightarrow{AB}} S_{\overrightarrow{PQ}} S_{\overrightarrow{CD}}$

Sehingga: $G_1 \circ G_2 = S_{KL}$, dengan $|KL| = |CD| + |PQ| + |AB|$



Teorema 6.6-6.8 (Buktikan Sebagai Latihan)

Teorema 6.6. Ketunggalan Isometri

Diketahui tiga titik yang tak kolinier yaitu A, B, C. Jika ada tiga titik lain A', B', C', maka ada paling banyak satu isometri yang memetakan: A pada A', B pada B', C pada C'

Teorema 6.7 Jika s sebuah garis yang melalui titik asal sebuah sistem koordinat orthogonal dan jika M memetakan $A = (1, 0)$ pada $B = (h, k)$ dan $P = (x, y)$, maka $M_s(P) = (hx + ky, kx - hy)$

Teorema 6.8 Jika $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$, maka ada tepat satu isometri yang memetakan A pada A', B pada B', dan C pada C'.

Contoh 6.5 Jika $g = \{(x, y) |\ y = x\}$ dan $h = \{(x, y) |\ y = 3 - 2x\}$. Tentukan persamaan garis $h = M_g(h)$!

Penyelesaian:

- Diketahui: $g = \big((x, y)\big|y = x\big)$, Pers (1)

  maka: $y = x$

  Jika: $x = 0 \rightarrow y = 0$ dan jika $x = 1 \rightarrow y = 1$
- Diketahui: $h = \big((x, y)\big|y = 3 - 2x\big)$, maka: $y = 3 - 2x$ Pers (2)

  Jika: $x = 0 \rightarrow y = 3$ dan $y = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2}$
- Garis h dan g memiliki titik potong, misal R yaitu (1,1)

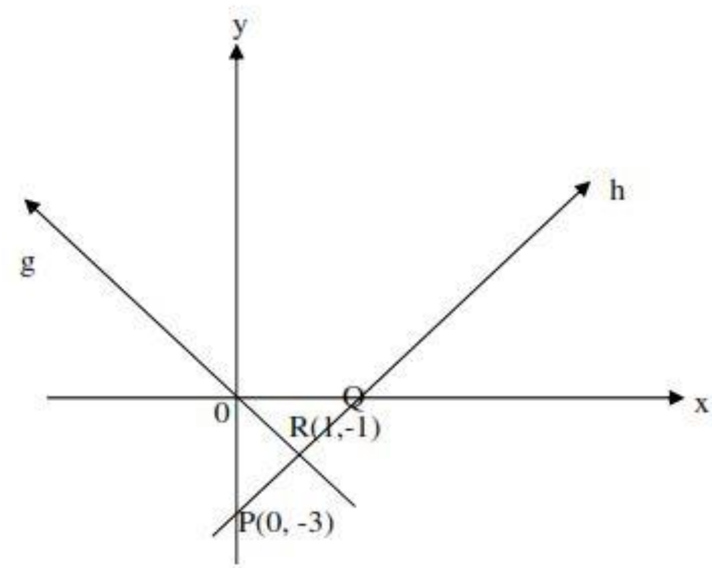
  Maka diperoleh persamaan h dari (1) dan (2):

  Karena: $y = x$ dan $y = 3 - 2x$

  Maka: $(x) = 3 - 2(y)$, $\Leftrightarrow x + 2y - 3 = 0$

Jadi, persamaan garis $h = M_g(h)$ adalah:

$$\{(x, y)|x + 2y - 3 = 0\}$$



D. Isometri sebagai Grup

Transformasi (dalam geometri) yang sering dijumpai adalah translasi, refleksi, rotasi, refleksi geser, dan transformasi identitas. Transformasi-transformasi tersebut dengan menggunakan hasil kali operasi fungsi akan membentuk suatu grup sehingga disebut **grup isometri.** Pada pembahasan sub-bab sebelumnya telah di bahas tentang komposisi pada isometri, yang mana berkaitan dengan sistem pada isometri yaitu grup isometri atau isometri sebagai grup.

Definisi 6.6 Suatu himpunan $S \neq \emptyset$ dan operasi komposisi dinotasikan $(S, \circ)$ disebut grup, jika memenuhi aksioma berikut:

1) S tertutup terhadap operasi komposisi, artinya: $\forall a, b \in S\,,\, a \circ b \in S$
2) Operasi komposisi asosiatif pada S, artinya: $\forall a, b, c \in S\,,\ (a \circ b) \circ c = a \circ b \circ c$
3) Ada unsur identitas, untuk setiap anggota S, artinya: $\exists\ \varepsilon \in S\,, \forall a \in S \rightarrow a \circ \varepsilon = \varepsilon \circ a = a$
4) Untuk setiap anggota S,memiliki balikan di S, artinya: $\forall a \in S\,, \exists b \in S \rightarrow a \circ b = b \circ a = \varepsilon$

Bukti:

1) Ambil T_1 dan T_2 di S.

   Menurut teorema komposisi bahwa $T_2 \circ T_1$ adalah transformasi

   Karena: $T_2 \circ T_1 \in S$

Jadi, aksioma ketertutupan terpenuhi.

2) Ambil T_1, T_2, T_3 di S

Menurut teorema komposisi transformasi bersifat asosiatif

Akibatnya: $(T_1 \circ T_2) \circ T_3 = T_1 \circ (T_2 \circ T_3)$

Jadi, aksioma bersifat asosiatif terpenuhi

3) Ada transformasi identitas, didefinisikan sebagai $I(P) = P, \ \forall P \epsilon v$.

Maka: untuk semua transformasi, $I \in S$

Menurut teorema berlaku: $T \circ I = I \circ T = T$

Jadi, eksistensi identitas pada operasi komposisi terpenuhi

4) Ambil $T \in S$

Menurut teorema bahwa setiap transformasi mempunyai balikan

2

Sehingga : $T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = 1$.

Atau : untuk $\forall T \in S, \ \exists T^{-1} \in S$

Sehingga: $T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = 1$

Jadi , eksistensi balikan terpenuhi

<u>Alternatif Bukti Lain:</u>

Misalkan: bentuk himpunan $= (M_t , I)$, $C \subset S$

Menurut teorema bahwa:

Pencerminan terhadap garis t atau (M_t) merupakan transformasi.

Pemetaan identitas di definisikan $I(P) = P$, merupakan transformasi.

Jadi $\mathrm{C} = (\mathrm{M_t} , \mathrm{I})$ merupakan himpunan bagian dari S

Akan dibuktikan: $C = (M_t, I)$ terhadap operasi komposisi merupakan suatu grup

1) Aksioma 1

Menurut teorema: $M_t \circ M^{-1}{}_t = I$ (karena pencerminan involusi)

$M_t \circ I = I \circ M_t = M_t$, untuk sebarang M_t , maka: $I \circ I = I$

Dengan demikian: unsur sembarang C ada juga di C^{-1}

Jadi, aksioma ketertutupan terpenuhi

2) Untuk $(M_t \circ I)M_t = I \circ M_t = I$ (sifat asosiatif)

Jadi, aksioma bersifat asosiatif terpenuhi

3) Diketahui: I merupakan netral (identitas) untuk operasi komposisi di C

Karena: untuk setiap $X \in C$

Maka berlaku: $X\,I = I\,X = X$.

4) Karena: M_t dan I merupakan transformasi

Maka: M_t dan I mempunyai balikan (menurut teorema)

Diketahui: $M_t \circ M_t{}^{-1} = I$ (karena pencerminan involusi).

Jadi: $M_t = M_t{}^{-1}$

Karena: I transformasi identitas, maka balikannya dirinya sendiri. Dengan demikian: $\forall X \in S, \exists\, X \in S$, sehingga $XY = YX = I$

E. Latihan Soal

Selesaikan soal-soal berikut menggunakan definisi, teorema, atau aksioma dengan tepat dan benar.

1. Jika transformasi T adalah sebuah isometri, Apakah S juga isometri?
2. Diketahui bahwa: $\Delta ABC \cong \Delta XYZ$, jika isometri T memetakkan ΔABC pada ΔXYZ , lukislah $P = T(P)$?
3. Diketahui: ΔABC dengan $A = (-2, 1)$, $B = (-2, -1)$, dan $C = (-3, 1)$; ΔDEF dengan $D = (1, 0)$, $E = (3, 0)$ dan $F = (3, 1)$. T sebuah isometri yang memetakkan ΔABC pada ΔDEF. Jika $P = (x, y)$, maka tentukan koordinat-koordinat $T(P)$.
4. Diketahui: ΔABC dengan $A = (0, 0)$, $B = (2, 0)$, dan $C = (2, 1)$; ΔXYZ dengan $X = (-3, 0)$, $Y = (-3, -2)$ dan $Z = (-2, -2)$. T sebuah isometri yang memetakkan ΔABC pada ΔXYZ. Jika $P = (x, y)$, maka tentukan koordinat-koordinat $T(P)$.
5. Tentukan penyelesaian berikut, Apabila:
   a. Suatu padanan T yang ditentukan oleh persamaan:
      $T[(x, y)] = (2x + y , -x + 2y)$
      Maka: apakah T sebuah refleksi ?
   b. Putaran: $R_{0,\varphi}$ memetakkan titik $P = (x, y)$ pada titik:
      $$hx - ky , kx + hy$$
6. Jika $P = (x, y)$, sedangkan s sebuah garis melalui $M = (0, 0)$, dan θ besarnya sudut dari sumbu x ke garis s . Tentukan $M_s(P)$ apabila:
   a. $\theta = 22{,}5°$
   b. $\theta = 135°$
   c. $\theta = -15°$
7. Diketahui garis g dengan persamaan $y = 2x - 5$. Oleh refleksi M_g, tentukan peta-peta dari titik-titik $(0,0), (1, -3), (-2,1), (2,4)$.

8. Jika T sebuah transformasi yang ditentukan dengan $T(P) = (6x + 1, y - 5)$ untuk semua titik $P(x, y) \in V$. Tunjukkan apakah T juga Isometri?
9. Sebuah transformasi T didefinikan untuk semua titik $P(x, y)$ sebagai $T(P) = (2x, y - 1)$. Tentukan apakah T suatu Isometri ?
10. Diketahui titik-titik $A = (1, -1)$, $B = (4, 0)$, $C = (-4, 1)$, $D = (-2, k)$. Apabila T suatu Isometri, sehingga $T(A) = C$ dan $T(B) = D$. Tentukan nilai k!
11. Selidiki apakah T suatu Isometri yang di definisikan untuk $M(x, y)$ oleh $T(A) = (6x, 3y - 2)$
12. Diketahui R adalah suatu transformasi yang didefinisikan untuk semua titik $P(x, y)$ sebagai $R(P) = (-y, x)$, maka:
    a. Selidiki apakah R suatu isometri?
    b. Jika R sebuah isometri, apakah R isometri langsung atau lawan?
13. Diketahui T dan S adalah padanan-padanan sehingga untuk semua titik P berlaku $T(P) = P'$ dan $S(P') = P"$. W adalah sebuah fungsi yang didefnisikan untuk semua P sebagai $W(P) = P"$. Apakah W suatu transformasi?
14. Jika $g = \{(x, y) | y = -x\}$ dan $h = \{(x, y) | 3y = x + 3\}$. Selidikilah apakah $A(-2, -4)$ terletak pada garis $h' = M_g(h)$.
15. Suatu transformasi T ditentukan oleh $T(P) = (x + 1, 2y)$ untuk semua $P(x, y)$.
    a. Tentukan $A' = T(A)$, $B' = T(B)$, dan persamaan $\overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{A'B'}$, jika $A(0, 3)$, $B(1, -1)$
    b. Jika $C(c, d) \in \overrightarrow{AB}$, selidiki apakah $C' = T(C) \in \overrightarrow{AB}$
    c. Jika $D'(e, f) \in \overrightarrow{AB}$, selidiki apakah $D \in \overrightarrow{AB}$ dengan $D' \in T(D)$

BAB 7

SIMILARITAS

A. Kesebangunan dan Kekongruenan pada Bangun Datar

Dalam geometri, sebangun merupakan dua bangun datar yang mempunyai sudut-sudut yang sama besar, artinya tidak perlu ukurannya yang sama, tetapi sisi-sisi yang bersesuaian sebanding *(proportional)* dan sudut-sudut yang bersesuaian sama besar. Perubahan bangun tersebut melibatkan perbesaran atau pengecilan (Dilatasi).

Definisi 7.1 Dua bangun dikatakan sebangun, apabila memenuhi syarat berikut:

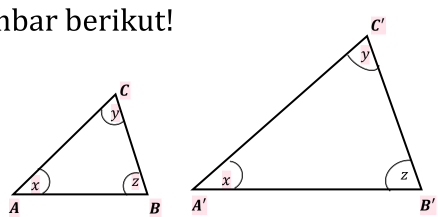
1) Perbandingan sisi-sisi yang bersesuaian senilai,

   Misalnya: $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} = a$

2) Besar sudut-sudut yang bersesuaian sama,

   Misalnya: $m\angle A = m\angle E$, $m\angle B = m\angle F$, $m\angle C = m\angle G$

Contoh 7.1 Tentukan kesebangunan dua segitiga pada gambar berikut!



Gambar 7.1. Kesebangunan Dua Segitiga

Penyelesaian: a) Perbandingan sisi bersesuaian senilai yaitu:

$AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CA = C'A'$

b) Besarnya sudut yang bersesuaian sama yaitu:

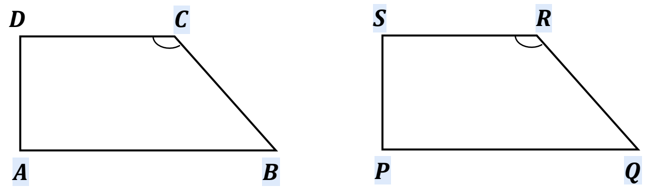
$\angle A = \angle A' = x$; $\angle B = \angle B' = y$; $\angle C = \angle C' = z$

Dua bangun dikatakan kongruen, jika bangun tersebut memiliki bentuk dan ukuran yang sama.

Definisi 7.2 Dua bangun segi banyak (*polygon*) dikatakan kongruen, apabila memenuhi syarat berikut:

1) Sisi-sisi yang bersesuaian sama panjang,
2) Sudut-sudut yang bersesuaian sama besar

Contoh 7.2 Tentukan kekongruenan pada gambar bangun berikut



Gambar 7.2. Kekongruenan Bangun Datar Segi empat

Penyelesaian: a) Sisi-sisi yang bersesuaian sama panjang yaitu:

AB dan $JK \rightarrow AB = JK$

BC dan $KL \rightarrow BC = KL$

CD dan $LM \rightarrow CD = LM$

DA dan $MJ \rightarrow DA = MJ$

b) Sudut-sudut yang bersesuaian sama besar yaitu:

$\angle A\ dan\ \angle P \rightarrow m\angle A = m\angle P$

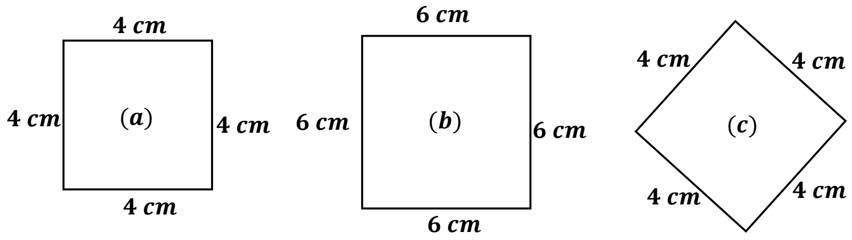
$\angle B\ dan\ \angle Q \rightarrow m\angle B = m\angle Q$

$\angle C\ dan\ \angle R \rightarrow m\angle C = m\angle R$

$\angle D\ dan\ \angle S \rightarrow m\angle D = m\angle S$

Jika bangun $ABCD$ dan $PQRS$ memenuhi kedua syarat tersebut, maka bangun tersebut kongruen, dinotasikan $ABCD \cong PQRS$.

Contoh 7.3 Tentukan gambar bangun persegi berikut yang kongruen



Gbr (*a*) **Gbr (*b*)** **Gbr (*c*)**

Penyelesaian: a) Sisi-sisi yang bersesuaian sama panjang yaitu:
Untuk membuktikan sisi yang sama panjang pada ketiga persegi (a), (b), dan (c), maka dapat ditunjukkan berikut.

- Persegi (a) dan persegi (b)
  Perhatikan gambar persegi (a) dan (b)
  Panjang setiap sisi persegi (a) 4 cm, persegi (b) 6 cm
  Jadi, persegi (a) dan (b) tidak kongruen.
- Persegi (b) dan persegi (c)
  Perhatikan gambar persegi (b) dan (c)
  Panjang setiap sisi persegi (b) 6 cm, persegi (b) 4 cm
  Jadi, persegi (b) dan (c) tidak kongruen
- Persegi (a) dan persegi (b)
  Perhatikan gambar persegi (a) dan (c)
  Panjang setiap sisi persegi (a) dan persegi (c) adalah 4 cm
  Jadi, persegi (a) dan (c) kongruen

b) Sudut-sudut yang bersesuaian sama besar yaitu:

   Masing-masing persegi memiliki empat sudut siku-siku, sehingga sudut-sudut yang bersesuaian pada persegi (a), (b), dan (c)

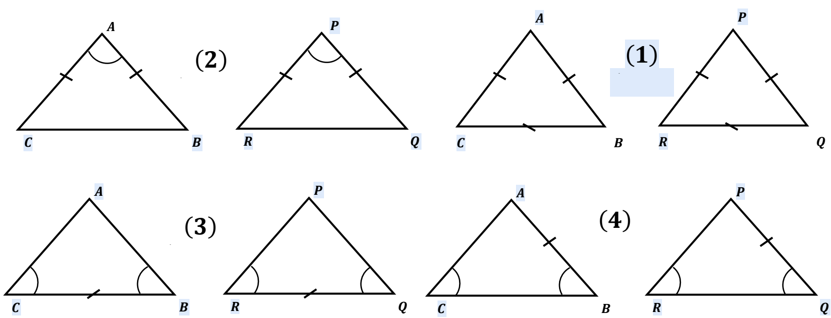
Jadi, persegi yang kongruen adalah persegi (a) dan (c)

Definisi 7.3 Dua atau lebih bangun segitiga dikatakan kongruen, apabila:

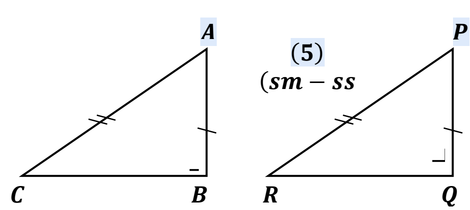
1) Ketiga pasangan sisi (s-s-s) yang bersesuaian sama panjang
2) Dua pasang sisi yang bersesuaian sama panjang dan sudut yang diapitnya sama besar (ss-sd-s)

3) Dua pasang sudut yang bersesuaian sama besar dan sisi yang menghubungkan kedua sudut tersebut sama panjang (sd-s-sd)
4) Dua pasang sudut yang bersesuaian sama besar dan sepasang sisi yang bersesuaian sama panjang (sd-sd-s)
5) Sisi miring dan satu sisi siku yang bersesuaian sama panjang (segitiga siku-siku)

Contoh 7.4 Perhatikan gambar berikut



Gambar 7.3. Kekongruenan Bangun Datar Segitiga



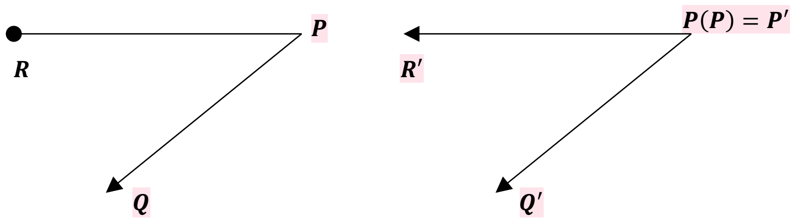
B. Kesebangunan (Similaritas) pada Transformasi

Pada sub-bab sebelumnya telah membicarakan mengenai transformasi-transformasi antara jarak dua titik pada isometri. Salah satu sifat-sifat penting pada isometri adalah hubungan tentang kekongruenan segitiga. Misalnya: jika $\Delta ABC \cong PQR$, maka ada tepat sebuah isometri yang memetakkan A ke P, B ke Q, dan C ke R. Akibatnya adalah dua himpunan disebut kongruen apabila ada sebuah isometri yang memetakkan anggota-anggota himpunan yang satu ke anggota-anggota yang lain.

Sifat penting lainya adalah hubungan tentang kesebangunan. Misalnya: dua buah poligon disebut sebangun jika perbandingan sisi yang bersesuaian dan sudut-sudut yang bersesuaian kongruen. Kekongruenan merupakan **isometri**, sedangkan kesebangunan merupakan **transformasi**, tetapi belum tentu isometri.

Definisi 7.4 Suatu transformasi L disebut suatu similaritas, jika terdapat bilangan positif k sedemikian hingga untuk sebarang titik P, Q maka $\left|\overrightarrow{P'Q'}\right| = k\left|\overrightarrow{PQ}\right|$, dengan $P' = L(P)$ dan $Q' = L(Q)$

Contoh 7.5 Perhatikan gambar berikut



Penyelesaian: Pada gambar di atas bahwa:
Suatu pemetaan kesebangunan dengan $k = 2$,
Maka: $P' = T(P), Q' = T(Q)$ dan $R' = T(R)$.

Sehingga $\overrightarrow{P'Q'} = 2(\overrightarrow{PQ})$ dan $\overrightarrow{P'R'} = 2(\overrightarrow{PR})$

Suatu pemetaan kesebangunan dengan $k = 1$,

Maka: berupa isometri, karena $\overrightarrow{P'Q'} = \overrightarrow{PQ}$

Dengan demikian bahwa isometri bagian dari kesebangunan, karena sifat-sifat yang berlaku pada isometri berlaku juga pada kesebangunan.

Berdasarkan definisi 7.4 bahwa sifat yang tidak dimiliki oleh kesebangunan adalah mempertahankan jarak. Akibatnya dapat diperoleh beberapa teorema berikut.

Teorema 7.1 Similaritas merupakan suatu kolineasi

Bukti: Ambil sebarang garis t dan dua titik A, B di t yang berbeda

6 Maka: $A' = T(A)$, $B' = T(B)$

Misalkan:

h garis yang melalui A' dan B'

T suatu transformasi kesebangunan

Akan dibuktikan: $T(t) = h$, maka ada $T(t) \subseteq$

6 h dan $h \subseteq T(t)$

➢ $T(t) \subseteq h$

Ambil sebarang titik P di t dan P berbeda dengan A dan B.

Misalkan: P terletak antara A dan B, Maka:

1 $|\overrightarrow{AP}| + |\overrightarrow{PB}| = |\overleftrightarrow{AB}|$

Misalkan: $P' = T(P)$ dan faktor kesebangunan T adalah k

Maka diperoleh:

3 $\left|\overrightarrow{A'P'}\right| + \left|\overrightarrow{P'B'}\right| = k\left|\overrightarrow{AP}\right| k\left|\overrightarrow{PB}\right| = k\left|\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB}\right|$

$= k\left|\overleftrightarrow{AB}\right|$

Karena: $\left|\overleftrightarrow{A'B'}\right| = k\left|\overleftrightarrow{AB}\right|$, maka $\left|\overrightarrow{A'P'}\right| + \left|\overrightarrow{P'B'}\right| = \left|\overleftrightarrow{A'B'}\right|$

Jadi, P' terletak antara A' dan B', artinya A', P', B' segaris

Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan: A antara P dan B antara P 6

➢ $h \subseteq T(t)$

Ambil sebarang titik Q' di h

Karena T suatu transformasi, jadi surjektif

Karena surjektif, maka ada Q pada bidang V

Sedemikian sehingga $Q' = T(Q)$.

4 Misalkan: Q' terletak antara A' dan B'

Sehingga berlaku: $\left|\overrightarrow{A'Q'}\right| + \left|\overrightarrow{Q'B'}\right| = \left|\overleftrightarrow{A'B'}\right|$

8 Misalkan: Q tidak berada di t, maka: $\left|\overrightarrow{AQ}\right| + \left|\overrightarrow{QB}\right| > \left|\overleftrightarrow{AB}\right|$

Akibatnya: $k\left|\overrightarrow{AQ}\right| + k\left|\overrightarrow{QB}\right| > k\left|\overleftrightarrow{AB}\right|$

Sehingga: $\left|\overrightarrow{A'Q'}\right| + \left|\overrightarrow{Q'B'}\right| > \left|\overleftrightarrow{A'B'}\right|$

5 Hal ini bertentengan dengan $\left|\overrightarrow{A'Q'}\right| + \left|\overrightarrow{Q'B'}\right| = \left|\overleftrightarrow{A'B'}\right|$

Karena: $\left|\overleftrightarrow{A'B'}\right| = k\left|\overleftrightarrow{AB}\right|$, maka $\left|\overrightarrow{A'P'}\right| + \left|\overrightarrow{P'B'}\right| = \left|\overleftrightarrow{A'B'}\right|$

Jadi, haruslah Q terletak di t

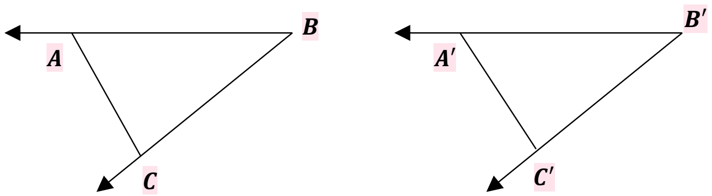
Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan: A' antara Q' dan B' antara Q'

Berdasarkan bukti: $T(t) \subseteq h$ dan $h \subseteq T(t)$, bahwa $T(t) = h$

Jadi, similaritas bersifat kolineasi

Teorema 7.2 Similaritas mempertahankan atau mengawetkan besar sudut

Bukti: Perhatikan gambar berikut



Misalkan:

Diberikan sebarang sudut $\angle ABC$ dan $T\angle ABC = \angle A'B'C'$

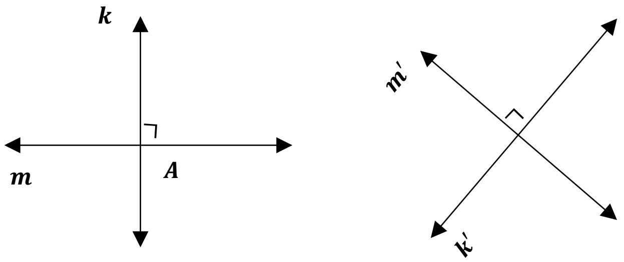
Maka diperoleh:

$\left|\overrightarrow{A'B'}\right| = k\left|\overrightarrow{AB}\right|$, $\left|\overrightarrow{B'C'}\right| = k\left|\overrightarrow{BC}\right|$, dan $\left|\overrightarrow{A'C'}\right| = k\left|\overrightarrow{AC}\right|$

Sehingga, $\Delta A'B'C'$ sebangun dengan ΔABC dan besarnya sudut juga sama

Teorema 7.3 Similaritas mempertahankan atau mengawetkan ketegaklurusan

Bukti: Perhatikan gambar berikut



Ambil garis k dan m,
Menurut teorema 7.2 maka: antara sudut k dan m ke A adalah 90°

6 Karena: $T(k) = k'$ dan $T(m) = m'$, dan sudut antara k dan m adalah 90°

Maka: sudut antara k' dan m' adalah 90° atau $k' \perp m'$

Jadi, terbukti similaritas mempertahankan atau mengawetkan ketegaklurusan antara dua buah garis

Teorema 7.4 Similaritas mempertahankan atau mengawetkan kesejajaran

Bukti: Misalkan diberikan dua garis l dan m dengan $l \parallel m$

Andaikan $T(l)$ memotong $T(m)$ di sebuah titik A'

Maka: ada A di l,

Sedemikian sehingga:

3 $T(A)$ terletak di $T(l)$ dan $T(A)$ terletak di $T(m)$

Mengakibatkan: A terletak di l dan di m

Dengan demikian: l dan m berpotongan

Jadi, pengandaian salah, karena kontradiksi dengan asumsi bahwa: l dan m sejajar.

Dengan demikian bahwa: $T(l)$ dan $T(m)$ sejajar

Teorema 7.5 Hasil kali similaritas L_k dan L_m adalah Similaritas L_{km} yaitu suatu similaritas dengan faktor km

Bukti: (**Sebagai Latihan**)

C. Dilatasi (Tarikan) pada transformasi

Definisi 7.5 Misalkan P suatu titik tertentu dan $k \neq 0$. transformasi $D_{P,k}$ disebut suatu Dilatasi terhadap P dengan faktor k jika:

1) $D_{P,k}(P) = P$
2) Untuk sebarang titik $Q \neq P$, maka $D_{P,k}(Q) = Q'$ dengan $\left|\overrightarrow{PQ'}\right| = k\left|\overrightarrow{PQ}\right|$ dan Q' pada $\overrightarrow{PQ}$ untuk $k > 0$, Q' pada P/Q untuk $k < 0$.

Keterangan: P/Q adalah sinar garis berarah yang berlawanan dengan arah $\overrightarrow{PQ}$ atau sinar dari P menjauhi Q. bilangan k adalah faktor dilatasi dan P disebut pusat dilatasi.

Teorema 7.6 Untuk sebarang garis g dan g' adalah $D_{P,k}(g)$, maka berlaku:

1) $g' = g$, jika P terletak pada g
2) $g' \parallel g$, jika P terletak pada g

Teorema 7.7 Hasil kali suatu dilatasi dan suatu isometri adalah similaritas. Sebaliknya, suatu similaritas selalu dapat dinyatakan sebagai hasil kali suatu dilatasi dan isometri

Teorema 7.8 Untuk sepasang ΔABC dan $\Delta A'B'C'$ yang sebangun terdapat tepat satu similaritas L yang membawa A ke A', B ke B', dan C ke C'.

Bukti: Teorema 7.6 – 7.8 (**Sebagai Latihan**)

Contoh 7.6 Misalkan:

Titik $P(x, y)$suatu titik tertentu.

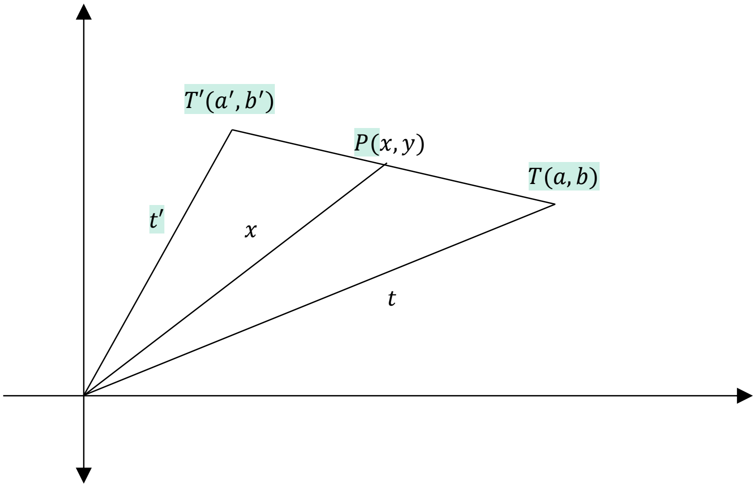
$T(a, b)$ sebarang titik dengan $T(a', b')$,

Sedemikian sehingga: $T' = D_{P,k}(T)$

P adalah vektor posisi dari $P(x, y)$

t vektor posisi dari $T(a, b)$, dan t' vektor posisi dari $T'(a', b')$

Di ilustrasikan pada gambar berikut.



Penyelesaian: Dengan menggunakan vektor dan matriks, maka:

$$PT' = k(PT)$$
$$T' - x = k(t - x)$$
$$\begin{bmatrix} a' - x \\ b' - y \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} a - x \\ b - y \end{bmatrix}$$

Sehingga dapat diperoleh rumus Dilatasi:

$$\begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + (1 - k) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Untuk similaritas diperoleh dengan,

Misalkan:

Ambil sebarang titik koordinat (x, y) dipetakkan ke (x', y')

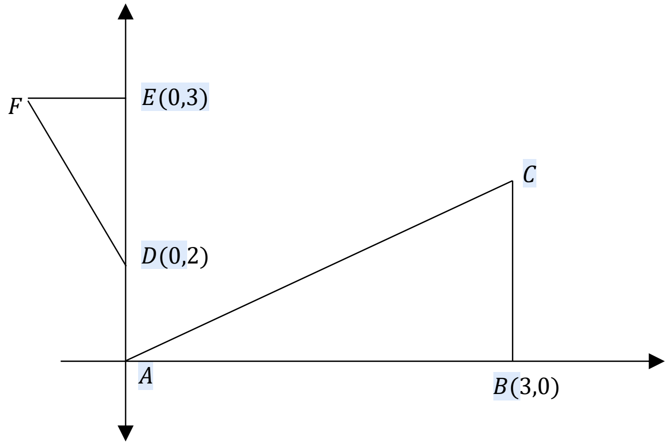
Maka: $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q \\ \pm p & \pm q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$, dengan: $p^2 + q^2 = 1$

Sehingga diperoleh:

$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q \\ \pm p & \pm q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$, dengan: $p^2 + q^2 = k^2 \neq 0$

Contoh 7.7 Tentukan titik koordinat $T(P)$, jika T suatu kesebangunan yang memetakkan ΔABC ke ΔDEF dengan $P(2, -2)$ yang terlihat pada gambar berikut:

2



3

Penyelesaian: Diketahui bahwa: $\Delta ABC = \Delta DEF$

Artinya: $(A) = D\ , T(B) = E\ , T(C) = F$

Maka:

$AB = \sqrt{(3-0)^2 + (0-0)^2} = 3$ dan $DE = \sqrt{(0-0)^2 + (3-2)^2} = 1$

Karena: T kesebangunan,

Maka: $DE = k(AB)$ atau $k = 1/3$

Misalkan: $T(P) = P'$ dengan $P'(x', y')$

Akan ditunjukkan bahwa: titik koordinat P'

3 Karena: $T(A) = D$ dan $T(P) = P$, maka: $DP' = k(AP)$

Untuk $DP' = k(AP)$, diperoleh:

$\Leftrightarrow (x-0, y-2) = \frac{1}{3}(2-0, -2-0),$

$\Leftrightarrow (x, y-2) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

Sehingga dapat diperoleh: $x = \frac{2}{3}$ dan $y = \frac{4}{3}$

Jadi, titik koordinat $T(P) = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$

D. Latihan Soal

Kerjakan latihan soal berikut dengan tepat dan cermat!

1. Diketahui bahwa: ΔABC dengan $A = (0,2)$, $B = (6,0)$, $C = (8,10)$. Jika G titik berat ΔABC, maka tentukan koordinat-koordinat titik-titik sudut $S_G\ D_{G,\frac{1}{2}}(\Delta ABC)$?
2. Diketahui: $A = (1,2)$ dan $B = (4,10)$. Gunakan dilatasi yang tepat untuk menentukan :
   a. Koordinat-koordinat E dengan $E \in \overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$
   b. Koordinat-koordinat F pada AB dan $BF = 3\ AB$
3. Diketahui $A = (1,3)$ dan $P = (x,y)$, maka:
   a. Tentukan $D_{A,\frac{3}{4}}(P)$
   b. Jika $g = \{(x,y)|2x + y = 8\}$, tentukan persamaan himpunan $D_{A,\frac{3}{4}}(g)$
4. Diketahui: ΔABC, jika K di luar ΔABC dan I di dalam ΔABC. Lukislah:
   a. $D_{A,\frac{4}{3}}(\Delta ABC)$
   b. $D_{K,\frac{2}{3}}(\Delta ABC)$
5. Diketahui ΔABC dan sebuah titik F di luar ΔABC.
   a. Lukislah $\Delta A'B'C' = D_{F,r}(\Delta ABC)$ sehingga $C \in \overleftrightarrow{A'B'}$
   b. Lukislah $\Delta A''B''C'' = D_{F,r}(\Delta ABC)$ sehingga luas $\Delta A''B''C'' = 3$ x luas ΔABC
6. Diketahui titik-titik A, P, Q tidak segaris. Maka lukislah $D_{A,r}(P)$, $D_{A,r}(Q)$
7. Diketahui titik-titik A, P, Q segaris pada g dan $R \notin g$. Maka lukislah $D_{A,k}(R)$, jika $D_{A,k}(Q) = P$ dan $D_{A,k}(P) = Q$
8. Diketahui sebuah transformasi T. Jika $P = (x,y)$ dan $T(P) = \{(x',y')|x' = 3x + 7, y' = 3y - 9\}$. Tentukan jenis transformasi ?

9. Diketahui $A = (1, 2)$ dan $B = (4, 10)$. Gunakan dilasi yang tepat untuk menentukan:
   c. Koordinat-koordinat E dengan $E \in \overline{AB}$ dan $AE = \frac{2}{5} AB$
   d. Koordinat-koordinat F pada $\overline{AB}$ dan $BF = 3\ AB$
10. Peta dari dilatasi garis $3x - 5y + 15 = 0$ terhadap pusat $O(0, 0)$ dengan faktor skala 5
11. Diketahui $ABCD$ adalah suatu persegi dengan koordinat titik-titik sudut $A(1, 1)$, $B(2, 1)$, $C(2, 2)$, $D(1, 2)$. Tentukan peta atau bayangan dari titik-titik sudut persegi oleh dilatasi $[0, 2]$
12. Sebuah lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$. Jika ditransformasikan dengan dilatasi $[0, 4]$, maka persamaan bayangannya adalah
13. Diketahui bayangan titik $P(-2, 3)$ oleh dilatasi $[0, m]$ adalah $P'(4, -6)$ sehingga bayangan titik $Q(3, -2)$ oleh $[0, 4m]$ adalah
14. Diketahui titik $P(12, -5)$ dan $A(-2, 1)$. Bayangan titik P oleh dilatasi $[A, \frac{1}{2}]$ adalah
15. Tentukan koordinat titik A. Jika bayangan titik A adalah $A'(-16, 24)$ yang didilatasikan dengan pusat $O(0, 0)$ dan factor skala -4.

BAB 8

AFFINITAS

A. Definisi Afinitas

Dalam suatu geometri diberlakukan aksioma-aksioma kesejajaran, sehingga diperoleh suatu geometri *Affine*, di mana aksioma kesejajaran dapat ditarik tepat satu buah garis melalui sebuah titik di luar suatu garis. Pada Geometri *Affine*, terdapat pula transformasi yang disebut Afinitas Perspektif. Afinitas perspektif pada transformasi *Affine* memiliki peran yang mirip dengan refleksi pada isometri geometri *Euclides*. Afinitas perspektif pertama kali diperkenalkan oleh Leonard Euler pada tahun 1748. Untuk lebih mengenal Afinitas perspektif pada geometri *Affine,* maka akan dibahas Affinitas perspektif pada bidang *Euclides*.

Definisi 8.1 Dipilih sebarang garis s dalam bidang V dan sebuah arah yang ditunjukkan oleh sudut α yang diapit dengan s. Dipilih juga suatu bilangan real $\Re$ positif atau negatif dan tidak nol

Transformasi pada Afinitas Perspektif dinyatakan dengan simbol $\emptyset\ (s, \alpha, \mu)$. Dimana s disebut sumbu afinitas, α disebut sudut afinitas, μ disebut faktor skala dari afinitas. Sehingga Afinitas perspektif didefinisikan menggunakan suatu fungsi dengan hukum komposisi.

Definisi 8.2 Afinitas perspektif merupakan suatu fungsi dengan hukum komposisi berikut:

1) Garis-garis yang menghubungkan pasangan dua titik P dan P' sejajar dengan arah yang diketahui
2) Dua titik P dan P' dituliskan: $\frac{P'P''}{PP''} = \mu$, dengan P'' titik potong dengan s.

Teorema 8.1. Kesejajaran Misalkan garis $a \parallel b$, jika garis c memotong garis a, maka c memotong garis b

Akibat 1: Jika garis a, b, c berlainan, $a \parallel b$ dan $c \parallel a$, maka $c \parallel b$

Akibat 2: Apabila garis $a \parallel b$ dan $b \parallel c$, maka $a = c$ atau $a \parallel c$

Definisi 8.3 Jika garis $a \parallel b$, maka a searah b

Definisi 8.4 Jika untuk setiap partisi dari semua titik pada suatu garis dalam dua himpunan yang tidak kosong, sedemikian hingga tidak ada titik dari masing-masing himpunan yang terletak antara dua titik dari himpunan lainnya, maka ada satu titik dari satu himpunan yang terletak antara setiap titik dari himpunan itu dan setiap titik himpunan lainnya

Definisi 8.5 Untuk sebarang titik A dan sebarang garis r yang tidak melalui A, terdapat tepat satu garis melalui A dalam bidang A_r yang tidak memotong r.

4

Definisi 8.6 Jika A, A', B, B', C, C', O adalah tujuh buah titik berlainan, sedemikian sehingga AA', BB', CC' adalah 3 buah garis berlainan melalui O dan jika $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$, maka $CA \parallel C'A'$

4

Definisi 8.7 Kesejajaran dalam Geometri *Affine* adalah suatu relasi ekuivalensi yang memenuhi sifat-sifat berikut:

1) Refleksi, yaitu setiap garis a sejajar dengan garis a sendiri.
2) Simetris, yaitu jika garis a sejajar dengan garis b, maka garis b sejajar dengan garis a.
3) Transitif, yaitu jika garis a sejajar dengan garis b dan garis b sejajar dengan garis c, maka garis a sejajar dengan garis c.

3

Teorema 8.2 Jika ΔABC dan $\Delta A'B'C'$ adalah dua segitiga dengan titik sudut yang berlainan, sedemikian sehingga $BC \parallel B'C'$, $CA \parallel C'A'$, dan $AB \parallel A'B'$ maka ketiga garis $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$, dan $\overleftrightarrow{CC'}$ adalah berpotongan pada satu titik (kongkruen) atau sejajar

4 **Teorema 8.3** Jika A, A', B, B', C, C' adalah enam titik berlainan pada tiga garis sejajar berlainan AA', BB', CC', sedemikian sehingga
8 garis $\overleftrightarrow{AB}$ sejajar $\overleftrightarrow{A'B'}$, $\overleftrightarrow{BC}$ sejajar dengan $\overleftrightarrow{B'C'}$, maka $\overleftrightarrow{CA}$ juga sejajar $\overleftrightarrow{C'A'}$

(Buktikan Teorema 8.2 dan 8.3 sebagai Latihan)

B. Sifat-sifat Afinitas Perspektif

Transformasi *Affine* merupakan transformasi yang tidak memperhatikan kesebangunan, dikarenakan faktor pengali pada x tidak sama dengan pengali pada y. Selain itu, transformasi *Affine* memiliki hubungan dengan geometri yang mempertahankan bentuk dasar dan integritas bangun geometri, berupa rotasi, translasi, dan dilatasi. Transformasi *Affine* juga bersifat linier, artinya perubahan yang kecil pada transformasi akan berakibat perubahan yang kecil juga pada objek yang ditransformasikan. Misalnya: pada bentuk matriks, yang mana memiliki operasi yang berbeda untuk masing-masing transformasinya dalam bentuk perkalian atau penjumlahan. Oleh karena itu, disarankan setiap matriks transformasi *affine* untuk dapat menggunakan satu operasi yaitu perkalian.

Misalkan: jika matriks P adalah sebuah titik (x, y), M matriks transformasinya, P' adalah proyeksi dari (x, y) yaitu (x', y'), maka $P' = M(P)$. Untuk memenuhi persamaan tersebut, perlu dilakukan perubahan bentuknya menyesuaikan jenis transformasinya. Masing-masing matriks akan direpresentasikan dalam bentuk 3×3 dan sebuah titik pada bidang koordinat 2 dimensi sebagai (x, y, I).

Teorema 8.4 Garis yang menghubungkan titik-titik tengah dua sisi suatu segitiga adalah sejajar dengan sisi yang ketiga dan suatu garis yang melalui titik tengah suatu sisi dan sejajar dengan sisi yang lain akan melalui titik sisi yang ketiga

(Buktikan Teorema 8.4 sebagai Latihan)

Berdasarkan beberapa teorema dan definisi, maka transformasi *affine* menyebabkan adanya afinitas perspektif yang memiliki peran seperti refleksi pada isometri *Euclides*. Berikut beberapa sifat-sifat yang dimiliki affinitas perspektif.

Sifat 1: Afinitas perspektif memetakan suatu titik onto titik

Sifat 2: Afinitas perspektif adalah suatu kolineasi;, artinya memetakan garis onto garis atau bayangan garis adalah berupa garis

Sifat 3: Afinitas Perspektif memetakan garis sejajar onto garis sejajar

Sifat 4: Perbandingan luas suatu bangun dengan bayangannya oleh afinitas perspektif adalah $1 : \mu$

Sifat 5: Afinitas Perspektif tidak mengubah perbandingan dalam pembagian

Bukti Sifat 1: Melukis bayangan suatu titik oleh afinitas perspektif tertentu yaitu:

$\emptyset\,(s, \alpha, 2)(A) = A'$ dan $\emptyset\,(s, \alpha, -2)(B) = B'$.

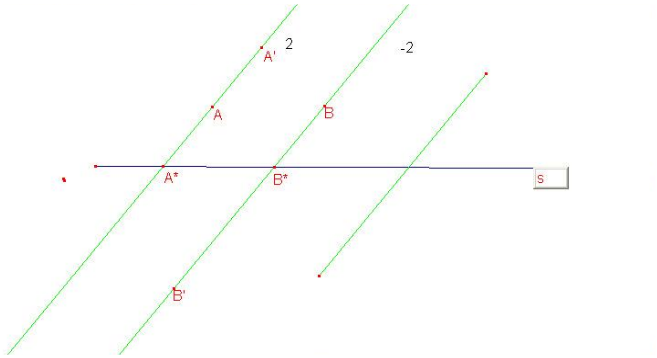
Dapat dilakukan menggunakan program CABRI.

Adapun langkah-langkahnya sebagai berikut:

1) Buat sumbu afinitas s yang berupa ruas garis atau garis.

2) Buat garis g yang memotong s dan membuat sudut α dengan sumbu s disebut sudut arah afinitas.
3) Ambil sebarang titik A untuk mencari bayangan titik A oleh $\emptyset\,(s, \alpha, 2)$. Mula-mula di buat garis a melalui A sejajar g.
   - Menentukan titik potong garis a dengan sumbu afinitas s berikan nama A^*
   - Ketik angka 2 dari *icon numerical,* Klik *icon dilasi*-Klik titik A, Klik titik A^* dan klik angka 2, maka akan muncul titik yaitu A', bayangan A oleh $\emptyset\,(s, \alpha, 2)$
4) Ambil titik B, bayangan titik B oleh $\emptyset\,(s, \alpha, -2)$ dilakukan seperti melukis bayangan titik A di atas, tetapi bilangannya yang digunakan adalah -2.

Tampak bahwa jika faktor skalanya positif, maka titik dan bayangannya sepihak terhadap sumbu afinitas s. Sedangkan jika faktor skalanya negatif, maka titik dan bayangannya berlainan pihak terhadap sumbu afinitas. Terlihat pada gambar berikut.



Gambar 8.1. (a) Afinitas Perspektif Sifat 1

Bukti Sifat 2: Langkah-langkah yang dilakukan untuk membuktikan sifat ini adalah:

1) Ambil dua buah titik pada suatu garis g.
2) Cari bayangan A dan B tersebut oleh suatu affinitas perspektif. Misalkan A' dan B'
3) Ambil lagi titik C pada gari g. Cari bayangan C oleh afinitas perspektif tersebut. Misalkan bayangan C adalah C', Apabila ternyata C' segaris (kolinear) dengan A' dan B', Ini berarti terbukti bahwa bayangan suatu garis g adalah berupa garis yaitu garis A'B'.

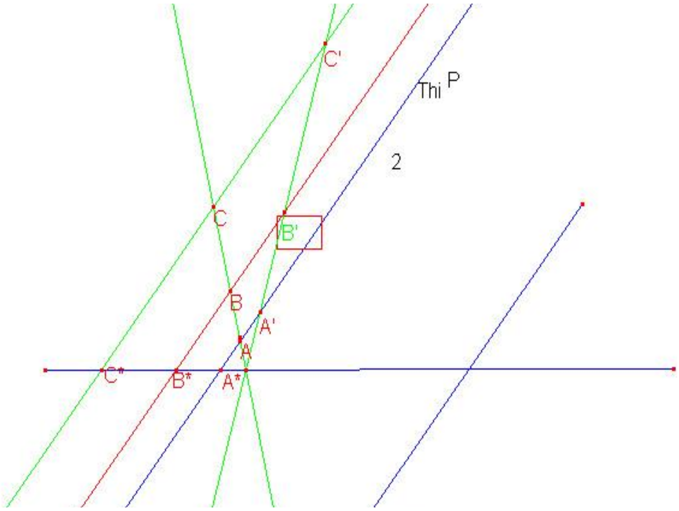
Langkah-langkah menggunakan program CABRI sebagai berikut:

1) Buat garis g yang memotong sumbu affinitas s
2) Ambil dua titik A dan B pada garis g.
3) Cari bayangan titik A dan B tersebut oleh affinitas perspektif.

4) Ambil titik C pada garis , kemudian cari bayangan titik C oleh affinitas perspektif tersebut. Misalkan bayangan titik C adalah C'

5) Tunjukkan A', B', C' kolinear atau tunjukkan bahwa C' terletak pada garis $A'B'$ atau garis g' dengan cara berikut: Buka ikon .?. kemudian klik ***member*** lalu klik C' dan klik g' , maka akan muncul kotak dengan tulisan: "***this point lies on the object***" (terbukti)

Ditunjukkan pada gambar berikut



Gambar 8.1. (b) Affinitas Perspektif Sifat 2

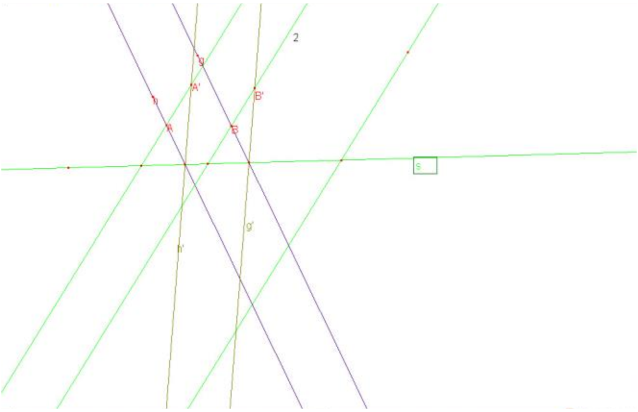
Bukti Sifat 3: Sifat ke-3 bahwa Afinitas perspektif mempertahankan kesejajaran garis. Dengan menggunakan CABRI, dapat dilakukan langkah-langkah berikut:

1) Buat ruas garis atau garis sebagai sumbu afinitas.
2) Buat garis yang memotong sumbu afinitas dan membuat sudut α dengan sumbu afinitas s sebagai arah afinitas.
3) Buat dua garis yang sejajar, yaitu buat garis sebarang g kemudian buat titik A di luar garis g. Klik icon "***parallel line***" kemudian klik titik A dan klik garis g.
4) Cari bayangan kedua garis ini, dengan cara mengambil dua titik pada garis tersebut dan cari bayangan titik titik tersebut oleh afinitas perspektif kemudian hubungkan bayangan kedua titik tersebut. Itulah bayangan garisnya.

   Catatan : Untuk menggambar bayangan suatu garis g, dapat dilakukan dengan hanya mengambil satu titik saja pada garis tersebut, kemudian cari bayangannya . Bayangan garis itu dapat diperoleh dengan membuat garis melalui bayangan titik yang diambil tersebut dengan titik potong garis g dengan sumbu affinitas (sebab titik pada sumbu afinitas adalah titik invarian).
5) Jika bayangan –bayangan garis ini sudah tergambar, kemudian *check* apakah kedua garis bayangan tersebut sejajar apa tidak (klik ikon .**?**. sub ikon "***parallel***". Klik kedua garis tersebut.

Maka akan muncul tulisan "***objects are parallel***" (terbukti).

Ditunjukkan pada gambar berikut

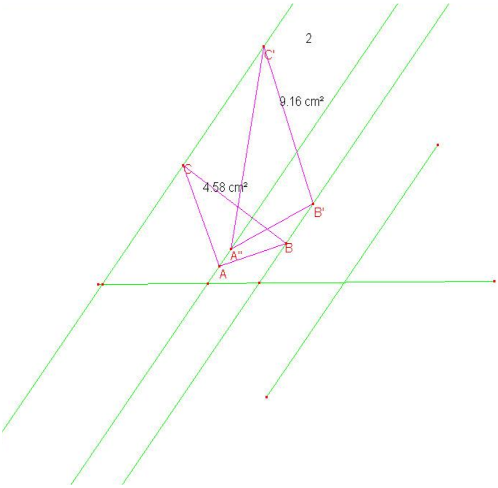


Gambar 8.1. (c) Afinitas Perspektif sifat 3

Bukti Sifat 4: Langkah-langkah menggunakan CABRI sebagai berikut:

1) Buat sumbu afinitas dan garis arahnya.
2) Buat segitiga dan cari bayangannya dengan cara: cari bayangan masing-masing titik sudut segitiga, kemudian hubungkan titik-titik bayangan yang diperoleh. Bayangan segitiga tersebut adalah bayangan titik-titik sudut segitiga.
3) Untuk menunjukkan kebenaran sifat, maka dapat di *check* dengan Klik sub ikon "**area**", Klik kedua daerah segitiga tersebut, maka akan muncul luas daerah-daerah segitiga tersebut. Bandingkan segitiga satu dengan lainnya, maka akan terlihat perbandingannya

Ditunjukkan pada gambar berikut

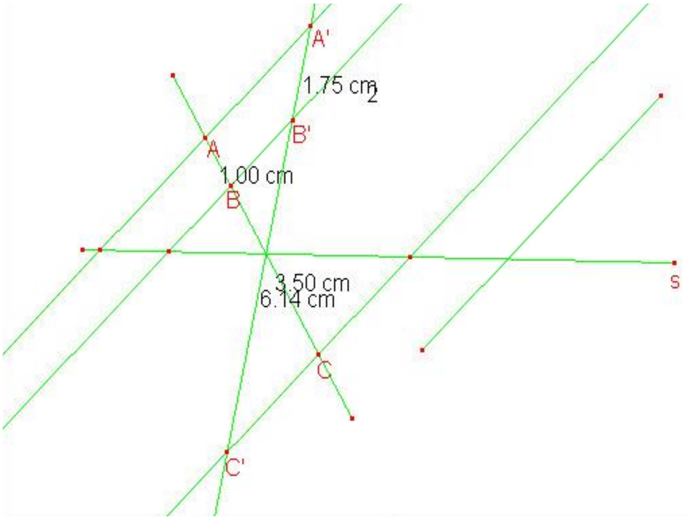


Gambar 8.1. (d) Afinitas Perspektif Sifat 4

Bukti Sifat 5: Perbandingan jarak-jarak 3 buah titik pada suatu garis g sama dengan perbandingan jarak titik-titik bayangan pada garis g'. Dengan menggunakan program CABRI, dapat dilakukan dengan langkah-langkah berikut

1) Buat sumbu afinitas dan arah afinitas.
2) Buat garis g dan buat 3 titik A, B, C pada garis g.
3) Cari bayangan titik-titik tersebut, sebut A', B', C'.
4) Cari jarak AB dan BC dengan mengklik icon "**distance**" , klik titik-titik yang akan dicari jaraknya.
5) Cari jarak $A'B'$ dan $B'C'$
6) Bandingkan jarak-jarak $AB : BC$ dengan $A'B' : B'C'$

Ditunjukkan pada gambar berikut



Gambar 8.1. (e) Afinitas Perspektif Sifat 5

C. Latihan Soal

Kerjakan soal berikut dengan tepat dan benar

1. Buktikan jika pada sebuah bidang, $l = m$, setiap garis transversal dengan l adalah transversal juga dengan m, maka $l \parallel m$.
2. Buktikan jika setiap dua garis yang berpotongan adalah sejajar pada garis ketiga, maka ketiga garis adalah sebidang
3. Buktikan bahwa jika sebuah bidang memuat dua garis yang berbeda, setiap sejajar pada garis yang sama tidak termuat dalam bidang, maka dua garis dalam bidang adalah sejajar
4. Misal L_1, L_2, L_3 adalah tiga garis, dimana $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$, dan misalkan M berpotongan pada L_1, L_2, L_3. Buktikan keempat garis tersebut sebidang.
5. Misal $L_1, L_2, \ldots .. L_n$ garis yang sama dalam a, dan misalkan garis M berpotongan pada $L_1, L_2, \ldots \ldots\ L_n$dan tidak memuat a. Buktikan $L_1, L_2, \ldots \ldots\ L_n, M$ adalah sebidang

DAFTAR PUSTAKA

Darhim., & Rasmedi, A. 2012. *Geometri Transformasi*. Jakarta: Universitas Terbuka

Febriana, R., Haryono, Y., & Yusri, R. 2017. Modul Geometri Transformasi. Padang: Erka

Gerard, A. V. 2012. *The Foundation Of Geometry (2nd Ed)*. Boston: Pearson Education

Kurniasih, M. D., & Handayani, I. 2017. *Tangkas Geometri Transformasi*. Jakarta: UHAMKA

Rawuh. 1993. *Geometri Transformasi.* Jakarta: Proyek Pembinaan Kependidikan Pendidikan Tinggi.

Sharipov, R. A. 1998. *Foundations Of Geometry For University Students And High School Students, (The Textbook)*. Rusia: Ufa State University

Sudrajat. 2003. *Pengantar Geometri Transformasi*. Bandung: Pustaka Setia

PROFIL PENULIS

Dr. Fatqurhohman, M.Pd lahir di Banyuwangi-Jawa Timur pada tanggal 11 Februari 1986. Pendidikan S1 di Universitas Jember pada Program Studi Pendidikan Matematika, Pendidikan S2 dan S3 di Universitas Negeri Malang pada Program Pendidikan Matematika. Aktivitas yang dilakukan selama ini menjadi salah satu dosen PTS di Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Muhammadiyah Jember sejak 2019 sampai sekarang. Mata kuliah yang diampu diantaranya Geometri Dasar, Analitik dan transformasi, Trigonometri, Strategi Pembelajaran Matematika, dan Perkembangan Peserta Didik. Karya buku yang pernah dipublikasikan berjudul Buku Ajar Teori Himpunan dan Geometri Transformasi: teori dan implementasi ini sebagai karya buku yang kedua.