PENEMPATAN *SERVER CENTER* PADA KABUPATEN JEMBER MENGGUNAKAN TEORI BILANGAN DOMINASI

[1)]Reza Fachruddin Azhar (1510651084),
[2)]Ilham Saifudin, S.Pd., M.Si,
[3)]Reni Umilasari, S.Pd., M.Si

Program Studi Teknik Informatika, Fakultas Teknik, Universitas Muhammadiyah Jember
Jl. Karimata No. 49 Jember Kode Pos 68121
Email: [1)]fachrudin.rf@gmail.com, [2)]ilham.saifudin@unmuhjember.ac.id,
[3)]reni.umilasari@unmuhjember.ac.id

ABSTRAK

Himpunan dominasi (*dominating set*) S pada graf $G = (V, E)$ adalah subset dari $V(G)$ sedemikian setiap simpul G yang bukan elemen S terhubung dan berjarak satu terhadap S. Kardinalitas minimum di antara himpunan dominasi pada graf roda dan oktahedral disebut bilangan dominasi dari graf tersebut dan dinotasikan $\gamma(G)$. Berikutnya ditentukan bilangan dominasi jarak satu pada graf hasil operasi *shackle* antara graf roda (W_n) dan oktahedral (P_{3^4}) yang terdiri dari graf $Shack(W_n, v, k)$, $Shack(W_n, e, k)$, $Shack(P_{3^4}, v, k)$ dan $Shack(P_{3^4}, e, k)$. Peta Kabupaten Jember direpresentasikan ke dalam *K-Graf*, *K-Graf* merupakan cara merepresentasikan graf dengan desa sebagai simpul dan desa yang berbatasan secara langsung direpresentasikan sebagai sisi. Dari representasi graf tersebut akan ditetapkan lokasi *server center* pada simpul-simpul tertentu menggunakan algoritma *greedy*. Hasil dari penelitian ini yaitu jumlah s*erver center* yang dibutuhkan sebanyak 48 s*erver center* dari 240 titik atau desa yang tersebar di Kabupaten Jember. Dari jumlah tersebut diimplementasikan ke dalam sistem informasi geografis pada peta wilayah Kabupaten Jember.

Kata Kunci : bilangan dominasi, penempatan s*erver center,* sistem informasi geografis, operasi *shackle*, graf roda, graf oktahedral.

ABSTRACT

Dominating set S in graph $G = (V, E)$ is a subset of $V(G)$ such that every vertex of G which is not element of S is connected and has distance one to S. Minimum cardinality among dominating set on wheel and ocathedral graphs is called the dominating number of the graph and denoted by $\gamma(G)$. We can find the dominating number of distance one of shackle product graph between the wheel graph (W_n) and the octahedral (P_{3^4}) consisting of graph $Shack(W_n, v, k)$, $Shack(W_n, e, k)$, $Shack(P_{3^4}, v, k)$ dan $Shack(P_{3^4}, e, k)$. The map of Jember Regency is represented in the K-Graph, K-Graph is a way to represent a graph with villages as vertex and villages that border directly are represented as edge. From the graph representation, the Server Center location will be determined at certain vertex using the greedy algorithm. The results of this observation are the number of server centers needed as many as 48 server centers from 240 points or villages spread across Jember Regency. Of this amount implemented into the geographic information system on the map of Jember Regency.

Keyword : domination number, server center placement, geographic information system, shackle product, wheel graph, octahedral graph.

1. PENDAHULUAN

Dalam kehidupan sehari-hari, graf digunakan untuk menggambarkan berbagai macam struktur yang ada. Teori graf dapat diaplikasikan dalam berbagai bidang, seperti bidang pertanian, perhutanan, keamanan dan lain-lain. Tujuannya adalah sebagai visualisasi objek-objek agar lebih mudah dimengerti. Salah satu topik yang terdapat dalam teori graf adalah bilangan dominasi. Bilangan dominasi dapat dikatakan sebagai banyaknya simpul pendominasi dalam suatu graf yang dapat mendominasi simpul-simpul terhubung di sekitarnya dengan simpul pendominasi berjumlah minimal (Umilasari & Darmaji, 2016).

Contoh penerapan bilangan dominasi yang telah diteliti sebelumnya oleh (Vikade, 2013) yaitu penempatan pos pantau polisi pada ruas jalan tertentu, penempatan mobil listrik pada lahan perkebunan, dan penempatan CCTV pada sudut-sudut tertentu agar dapat menjangkau area di sekitarnya pada jarak tertentu, dan penempatan ATM di suatu daerah agar wilayah tersebut dapat menjangkau keberadaan ATM tersebut juga telah diteliti oleh (Saifudin & Umilasari, 2017). Dengan menerapkan teori himpunan dominasi maka penempatan pos polisi, mobil listrik, CCTV, dan ATM akan lebih efisien dan dapat meminimalisir jumlahnya.

Dalam penelitian ini penulis meneliti bilangan dominasi jarak satu pada graf hasil operasi *shackle* (penyambungan) titik dan sisi sebagai penghubung (*linkage*), di antaranya pada graf roda dan graf oktahedral dengan masing-masing notasi grafnya antara lain $Shack(W_n, v, k)$, $Shack(W_n, e, k)$, $Shack(P_{3^4}, v, k)$, $Shack(P_{3^4}, e, k)$. Selain itu, akan dibahas studi kasus bilangan dominasi jarak satu penempatan *Server Center* pada Kabupaten Jember, dikarenakan jika penempatan sembarang maka persebaran serta jumlah *server* tidak optimal. Tidak optimal artinya bisa saja menempatkan *server* dengan jumlah 3 yang tersebar di desa dalam satu kecamatan tanpa memperhatikan lokasi dari desa yang menjadi titik pusat *server* di daerah tersebut. Dampaknya desa yang berjauhan (berjarak minimal dua desa) dari titik pusat server kesulitan dalam mengakses *server* tersebut, padahal jika dihitung dengan bilangan dominasi dengan jumlah *server* yang sama desa-desa yang tersebar dapat saling mengakses titik pusat *server*, dikarenakan bilangan dominasi ini memetakkan letak desa dan menghitung jumlah desa kemudian menentukan simpul pendominasi berdasarkan letak desa yang berjarak maksimal satu desa terhadap desa yang menjadi titik pusat *server*.

Server Center merupakan komponen yang dibutuhkan untuk mempermudah mengolah dan menyimpan data. *Server Center* diharapkan mampu memberikan pelayanan yang optimal dalam segala situasi kondisi dan dapat diakses setiap saat. Pada penelitian ini *Server Center* yang dimaksud yaitu *server* yang dapat menyimpan data secara umum baik data yang bersangkutan dengan kependudukan, wilayah, dan sebagainnya.

Server Center akan ditempatkan di desa (lokasi yang memungkinkan untuk penempatan *Server Center*) direpresentasikan sebagai titik sedangkan sisi direpresentasikan desa yang berbatasan secara langsung (dalam hal ini jarak diabaikan). Implementasi dari titik dan simpul pendominasi nantinya akan diterapkan pada *GIS* (*Geographic Information System*) yang memuat koordinat sampul pendominasi dari desa di Kabupaten Jember. Graf-graf hasil operasi *shackle* antara graf roda dan oktahedral belum pernah diteliti sebelumnya dan akan dicari bilangan dominasinya.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Operasi *Shackle*

Graf *shackle* dinotasikan dengan *Shack* $(G1, G2, \cdots, Gk)$, suatu graf *shackle* yang dibentuk dari k salinan graf G dinotasikan dengan $Shack(G, k)$ dengan $k \geq 2$ dan k adalah bilangan bulat (Maryati, Salman, Baskoro, & Ryan, 2010). Operasi *shackle* titik di notasikan dengan $Shack(G, v, t)$ artinya graf dikonstruksi dari sebarang graf G sebanyak t salinan dan v sebagai linkage *vertex*. Sedangkan operasi *shackle* sisi dinotasikan dengan $Shack(G, e, t)$ artinya graf dikonstruksi dari sebarang graf G sebanyak t salinan dan e sebagai *linkage edge*.

2.2. Himpunan Dominasi dan Bilangan Dominasi

Himpunan dominasi (*dominating set*) S pada graf $G = (V, E)$ adalah subset dari $V(G)$ sedemikian setiap simpul G yang bukan elemen S terhubung dan berjarak satu terhadap S. Kardinalitas minimum di antara himpunan dominasi pada graf G disebut bilangan dominasi dari graf G dan dinotasikan $\gamma(G)$ (Umilasari, 2017).

2.3. Algoritma *Greedy*

Algoritma *greedy* adalah algoritma yang paling populer untuk memecahkan optimasi, persoalan dengan mencari solusi optimum. Algoritma *greedy* memecahkan masalah langkah per langkah :

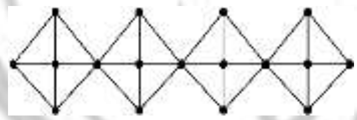
1. Mengambil pilihan terbaik yang dapat diperoleh pada saat itu tanpa memperhatikan konsekuensi ke depan, prinsip ini dinamakan "*take what you can get now!*".
2. Berharap bahwa dengan memilih optimum lokal pada setiap langkah akan berakhir dengan optimum global.

(Munir, 2004).

3. METODOLOGI PENELITIAN

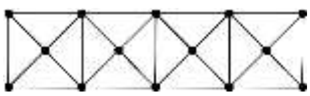
Penelitian ini dimulai dengan mengumpulkan, mempelajari kemudian meneliti berdasarkan studi literatur yang ada, baik dari jurnal, buku, dan situs internet yang berkaitan dengan judul penelitian. Terdapat definisi operasional yang bertujuan menghindari terjadinya perbedaan makna sehingga di harapkan dapat memberikan gambaran secara sistematis. Beberapa definisi operasional yang digunakan yaitu:

1. $Shack(W_n, v, k)$ merupakan graf hasil operasi *shackle* pada graf roda (W_n) dengan subgraf pada titik (v) sebagai penghubung sebanyak k $-$salinan. Untuk lebih jelasnya diilustrasikan seperti Gambar 3.2.



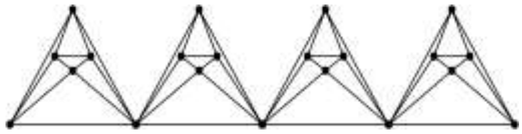
Gambar 3.1 Graf Roda $Shack$ $(W_4, v, 4)$

2. $Shack(W_n, e, k)$ merupakan graf hasil operasi *shackle* pada graf roda (W_n) dengan subgraf pada sisi (e) sebagai penghubung sebanyak k $-$salinan. Untuk lebih jelasnya diilustrasikan seperti Gambar 3.3.



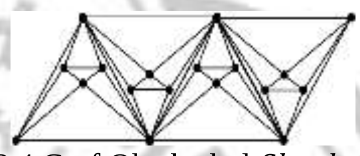
Gambar 3.2 Graf Roda $Shack$ $(W_4, e, 4)$

3. $Shack(P_{3^4}, v, k)$ merupakan graf hasil operasi *shackle* pada graf oktahedral (P_n) dengan subgraf pada titik (v) sebagai penghubung sebanyak k $-$salinan. Untuk lebih jelasnya diilustrasikan seperti Gambar 3.4.



Gambar 3.3 Graf Oktahedral $Shack$ $(P_{3^4}, v, 4)$

4. $Shack(P_{3^4}, e, k)$ merupakan graf hasil operasi *shackle* pada graf oktahedral (P_n) dengan subgraf pada sisi (e) sebagai penghubung sebanyak k $-$salinan. Untuk lebih jelasnya diilustrasikan seperti Gambar 3.5.



Gambar 3.4 Graf Oktahedral $Shack$ $(P_{3^4}, e, 4)$

5. Aplikasi bilangan dominasi jarak satu pada Kabupaten Jember ini adalah penentuan suatu simpul sebagai simpul pendominasi atau posisi *Server Center* yang dapat mendominasi simpul di sekitarnya dengan jarak maksimal satu dan jumlah *Server* yang digunakan seminimal mungkin. Peta Kabupaten Jember akan direpresentasikan sebagai graf dengan memetakkan desa sebagai titik, desa yang berbatasan secara langsung direpresentasikan sebagai sisi. Kemudian diimplementasikan ke dalam Sistem Informasi Geografis yang memuat nama desa di Kabupaten Jember, titik koordinat kantor desa dan foto dari kantor desa yang menjadi titik pendominasi

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1. Hasil Penelitian

4.1.1. Bilangan Dominasi Graf Roda dengan *Shackle* Titik

Teorema 4.1. *Bilangan dominasi pada graf roda* (W_n) *sebanyak* k *salinan dengan operasi shackle titik adalah*

$$\gamma(Shack(W_n, v, k)) = \begin{cases} \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil; & n = 3 \\ k; & n \geq 4 \end{cases}$$

Bukti:

i. **Untuk $n = 3$;**

Graf roda yang dioperasikan *Shackle* titik yang dimaksud dalam teorema ini yaitu dengan melekatkan 1 titik luar dari masing-masing graf seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.1. Misal $V(W_n) = \{w, v_i; 1 \leq i \leq n\}$ adalah himpunan simpul dari graf roda, maka $|V(W_n)| = 1 + n$. Graf roda dengan $n = 3$ berlaku $d(v_i, v_{i+j}) = 1; j \geq 2$ dan $d(v_i, w) = 1$ maka $diam(W_n) = 1$. Untuk graf roda dengan operasi *shackle* titik maka $|V(Shack(W_n, v, k))| = kn + 1$.

Untuk $n = 3$ terdapat 2 kasus himpunan titik pendominasi (S), $S \in w$ atau $S \in v_i$:

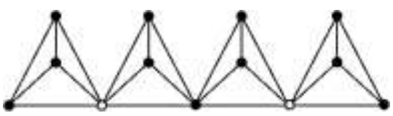
Kasus I : Jika $S \in v_i$

Maka untuk setiap graf roda terdapat minimal 1 titik pendominasi karena $diam(W_n) = 1$. Maka jika graf W_n dioperasikan *shackle* titik maka sebuah simpul pendominasi (S) dapat mendominasi maksimal 2 salinan graf roda W_n. Sehingga untuk k salinan graf roda simpul pendominasi yang dibutuhkan adalah $\gamma(Shack(W_n, v, k)) = \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$.

Kasus II : Jika $S \in w$

Sedangkan jika S diambil dari simpul tengah dari graf roda (w), maka untuk setiap simpul pendominasi maksimal hanya dapat mendominasi satu salinan graf roda. Hal ini dikarenakan jarak simpul pendominasi ke salinan simpul-simpul graf roda yang berikutnya bisa mencapai 2 $d(S, V(W_{n+1})) \leq 2$.

Berdasarkan kasus I dan II maka $|S|$ akan minimal jika $S \in v_i$, maka $\gamma(Shack(W_n, v, k)) \leq \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$. Berikutnya akan ditunjukkan bahwa $\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$ adalah titik pendominasi yang minimal, misalkan $\gamma(Shack(W_n, v, k)) = \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil - 1$ didapatkan banyaknya titik yang dapat didominasi adalah $(\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil - 1)(n) = \left\lceil \frac{kn}{2n} \right\rceil - n$, sehingga tidak semua titik dapat didominasi karena $|V(Shack(W_n, v, k))| = kn + 1$ maka $\gamma(Shack(W_n, v, k)) \geq \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$, dan terbukti bahwa $\gamma(Shack(W_n, v, k)) = \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$. □



Gambar 4.1 Graf roda shackle titik $\gamma(Shack(W_3, v, 4)) = 2$

***i.* Untuk $n \geq 4$;**

Graf roda dengan $n \geq 4$ berlaku $d(v_i, v_{i+j}) = 2; j \geq 2$ dan $d(v_i, w) = 1$ maka $diam(W_n) = 2$. Terdapat juga 2 kasus seperti pembuktian diatas, yaitu:

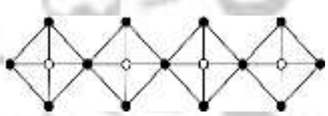
Kasus I : Jika $S \in v_i$

Maka untuk setiap graf roda terdapat minimal 2 titik pendominasi karena $diam(W_n) = 2$. Sehingga batas maksimal S untuk $Shack(W_n, v, k)$ sebanyak $2k$.

Kasus II : Jika $S \in w$

Maka untuk setiap graf roda terdapat 1 titik pendominasi karena $d(w, v_i) = 1$. Sehingga batas maksimal S untuk $Shack(W_n, v, k)$ sebanyak k.

Berdasarkan kasus I dan II maka $|S|$ akan minimal jika $S \in w$, maka $\gamma(Shack(W_n, v, k)) \leq k$. Berikutnya akan ditunjukkan bahwa k adalah titik pendominasi yang minimal, misalkan $\gamma(Shack(W_n, v, k)) = k - 1$ didapatkan banyaknya titik yang dapat didominasi adalah $(k-1)(n) = kn - n$, sehingga tidak semua titik dapat didominasi karena $|V(Shack(W_n, v, k))| = kn + 1$ maka $\gamma(Shack(W_n, v, k)) \geq k$, dan terbukti bahwa $\gamma(Shack(W_n, v, k)) = k$. □



Gambar 4.2 Graf roda shackle titik $\gamma(Shack(W_4, v, 4)) = 4$

4.1.2. Bilangan Dominasi Graf Roda dengan *Shackle* Sisi

Teorema 4.2 *Bilangan dominasi pada graf roda (W_n) sebanyak k salinan dengan operasi shackle sisi adalah*

$$\gamma(Shack(W_n, e, k)) = \begin{cases} \left\lceil \frac{k}{3} \right\rceil; & n = 3 \\ k; & n \geq 4 \end{cases}$$

Bukti:

***i.* Untuk $n = 3$;**

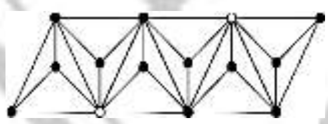
Graf roda yang dioperasikan *Shackle* sisi yaitu dengan melekatkan sisi luar dari masing-masing graf seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.3. Pembuktian dari teorema ini tidak jauh berbeda dari teorema sebelumnya.

Misal $V(W_n) = \{w, v_i; 1 \leq i \leq n\}$ adalah himpunan simpul dari graf roda, maka $|V(W_n)| = 1 + n$. Graf roda dengan $n = 3$ berlaku

$d(v_i, v_{i+j}) = 1; j \geq 2$ dan $d(v_i, w) = 1$ maka $diam(W_n) = 1$. Dan diketahui jumlah titik dari graf roda *shackle* sisi $|V(Shack(W_n, e, k))| = kn - k + 2$. Jika satu salinan graf di ambil titik simpul pendominasi w yang merupakan titik tengah dari graf roda. Maka simpul pendominasi hanya dapat mendominasi simpul-simpul pada satu salinan graf roda tersebut karena $d(S, V(W_{n+1})) \leq 1$.

Sebaliknya jika v_i diambil sebagai simpul pendominasi, maka satu simpul v_i dapat menjangkau maksimal 3 salinan graf roda $Shack(W_n, e, 3)$. Oleh karena itu, jika terdapat k salinan graf roda W_n yang dioperasikan dengan shackle sisi (e) maka di butuhkan sebanyak $\left\lceil \frac{k}{3} \right\rceil$ simpul untuk mendominasi semua simpul dan dapat dituliskan $\gamma(Shack(W_n, e, k)) \leq \left\lceil \frac{k}{3} \right\rceil$.

Berikutnya akan ditunjukkan bahwa $\left\lceil \frac{k}{3} \right\rceil$ adalah titik pendominasi yang minimal, misalkan $\gamma(Shack(W_n, e, k)) = \left\lceil \frac{k}{3} \right\rceil - 1$ didapatkan banyaknya titik yang dapat didominasi adalah $\left(\left\lceil \frac{k}{3} \right\rceil - 1\right)(n) = \left\lceil \frac{kn}{3n} \right\rceil - n = \frac{kn - 3n^2}{3n} \ldots\ldots\ kn$, karena $kn - 3n^2 < kn(3n)$ dan $kn = |VShack((W_n, e, k))|$.Sehingga $\left\lceil \frac{k}{3} \right\rceil - 1$ bukanlah simpul pendominasi minimal karena tidak semua titik dapat didominasi, karena $|V(Shack(W_n, e, k))| = kn - k + 2$. Maka $\gamma(Shack(W_n, e, k)) \geq \left\lceil \frac{k}{3} \right\rceil$. Dan terbukti bahwa $\gamma(Shack(W_n, e, k)) = \left\lceil \frac{k}{3} \right\rceil$. $\square$



Gambar 4.3 Graf roda shackle sisi $\gamma(Shack(W_3, e, 6)) = 2$

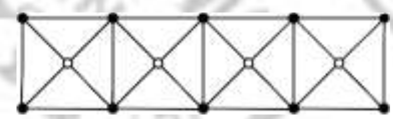
i. **Untuk $n \geq 4$;**

Graf roda dengan $n \geq 4$ berlaku $d(v_i, v_{i+j}) = 2; j \geq 2$ dan $d(v_i, w) = 1$ maka $diam(W_n) = 2$. Dengan demikian dapat dikatakan bahwa $\gamma(W_n) = 1$ dengan $S \notin v_i, v_{i+j}$ karena jika $S \in v_i, v_{i+j}$ maka $\gamma(W_n) > 1$ karena $d(v_i, v_{i+j}) = 2$;

Jika satu salinan graf roda W_n memiliki bilangan dominasi jarak satu sama dengan satu, maka untuk $\gamma(Shack(W_n, e_i, 2)) = 2$, $\gamma(Shack(W_n, e_i, 3)) = 3$ begitu juga untuk k salinan graf W_n membutuhkan minimal k bilangan dominasi jarak satu, $\gamma(Shack(W_n, e_i, k)) \leq k$ dan setiap simpul pendominasi minimal dapat mendominasi n simpul.

Selanjutnya, akan ditunjukkan apakah k adalah titik pendominasi minimal. Andai, $\gamma(Shack(W_n, e_i, k)) = k - 1$, banyak simpul yang dapat didominasi adalah $(k - 1)n = kn - n < kn = |V((W_n, e, k))|$

Sehingga $k - 1$ bukanlah simpul pendominasi minimal karena simpul-simpul yang didominasi kurang dari *order* atau banyaknya simpul pada graf W_n dengan k salinan operasi *shackle* sisi. Maka k adalah jumlah simpul pendominasi yang minimal, atau dengan kata lain $\gamma(Shack(W_n, e, k)) \geq k$, terbukti bahwa $\gamma(Shack(W_n, e, k)) = k$. $\square$



Gambar 4.4 Graf roda shackle sisi $\gamma(Shack(W_4, e, 4)) = 4$

4.1.3. Bilangan Dominasi Graf Oktahedral dengan *Shackle* Titik

Teorema 4.3. *Bilangan dominasi pada graf oktahedral* (P_{3^4}) *sebanyak* k *salinan dengan operasi shackle titik adalah*

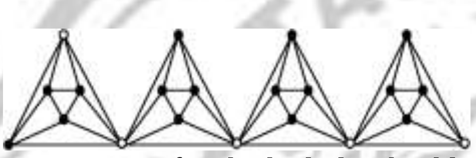
$$\gamma(Shack(P_{3^4}, v, k)) = k + 1$$

Bukti: Graf oktahedral yang dioperasikan *Shackle* titik yang dimaksud dalam teorema ini yaitu dengan melekatkan satu titik luar dari masing-masing graf seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.5. Jumlah himpunan titik pada graf oktahedral $|V(P_{3^4})| = 6$. Sedangkan berdasarkan dari definisi graf oktahedral $d(v_i, u_{i,+1}) = 2$ dan $d(u_i, v_{i+1}) = 2$ maka $diam(P_{3^4}) = 2$. Untuk graf oktahedral dengan operasi *shackle* titik maka $|V(Shack(P_{3^4}, v, k))| = 5k + 1$.

Dengan demikian dapat dikatakan bahwa $\gamma(P_{3^4}, e, 2) = 3$ dengan $\forall S \in v_{i+1}, u_{i+1}$ atau $\forall S \in u_{i+1}$ atau $\forall S \in v_{i+1}$; $u_i, v_{i+1}, v_i, u_{i,+1}$ simpul-simpul dari graf oktahedral P_{3^4}.

Jika dua salinan graf oktahedral P_{3^4} memiliki bilangan dominasi jarak satu sama dengan tiga,

maka untuk $\gamma(Shack(P_{3^4}, e, 2)) = 3$, $\gamma(Shack(P_{3^4}, e, 3)) = 4$, $\gamma(Shack(P_{3^4}, e, 4)) = 5$. Jika terdapat dua salinan, $|S|$ akan minimal kalau sama dengan 3, karena $|V(Shack(P_{3^4}, e, 2))| = 11$. Begitu juga untuk k salinan graf P_{3^4} membutuhkan minimal $k + 1$ bilangan dominasi jarak satu, $\gamma\big(Shack(P_{3^4}, e, k)\big) \le k + 1$.
Berikutnya akan ditunjukkan bahwa $k + 1$ adalah titik pendominasi yang minimal, misalkan $\gamma\big(Shack(P_{3^4}, v, k)\big) = k + 1 - 1$, didapatkan banyaknya titik yang dapat didominasi adalah $(k)6 = 6k$, maka tidak semua titik dapat didominasi karena $|V(Shack(P_{3^4}, v, k))| = 5k + 1$, sehingga $\gamma\big(Shack(P_{3^4}, v, k)\big) \ge k + 1$, dan terbukti $\gamma\big(Shack(P_{3^4}, v, k)\big) = k + 1$. □



Gambar 4.5 Graf oktahedral shackle titik $\gamma\big(Shack(P_{3^4}, v, 4)\big) = 5$

4.1.4. Bilangan Dominasi Graf Oktahedral dengan *Shackle* Sisi

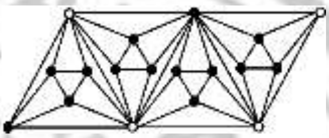
Teorema 4.4. *Bilangan dominasi pada graf oktahedral (P_{3^4}) sebanyak k salinan dengan operasi shackle sisi adalah*

$$\gamma(Shack(P_{3^4}, e, k)) = k$$

Bukti: Graf oktahedral yang dioperasikan *shackle* sisi yang dimaksud dalam teorema ini yaitu dengan melekatkan sisi luar dari masing-masing graf. Maka diperoleh jumlah himpunan titik pada graf oktahedral $|V(Shack(P_{3^4}, e, k))| = 4k + 2$. Sedangkan berdasarkan dari definisi graf oktahedral $d\big(v_i, u_{i,+1}\big) = 2$ dan $d(u_i, v_{i+1}) = 2$ maka $diam(P_{3^4}) = 2$. Dengan demikian dapat dikatakan bahwa $\gamma(P_{3^4}, e, 2) = 2$ dengan $\forall S \in v_{i+1}$ atau $\forall S \in u_{i+1}$, karena jika $\forall S, S \in v_{i+1}$ dan $S \in u_{i+1}$ maka maksimal hanya dapat mendominasi satu salinan saja $u_i, v_{i+1}, v_i, u_{i,+1}$ simpul-simpul dari graf oktahedral P_{3^4}.

Jika dua salinan graf oktahedral P_{3^4} memiliki bilangan dominasi jarak satu sama dengan dua, maka untuk $\gamma(Shack(P_{3^4}, e, 2)) = 2$, $\gamma(Shack(P_{3^4}, e, 3)) = 3$, $\gamma(Shack(P_{3^4}, e, 4)) = 4$. Jika terdapat dua salinan, $|S|$ akan minimal kalau sama dengan 2, karena $|V(Shack(P_{3^4}, e, 2))| = 10$. Begitu juga untuk k salinan graf P_{3^4} membutuhkan minimal k bilangan dominasi jarak satu, $\gamma\big(Shack(P_{3^4}, e, k)\big) \le k$.

Sehingga $\gamma(Shack(P_{3^4}, e, k)) = k$. Berikutnya akan ditunjukkan bahwa k adalah titik pendominasi yang minimal, misalkan $\gamma\big(Shack(P_{3^4}, e, k)\big) = k - 1$, maka banyak simpul yang dapat didominasi adalah $(k - 1)6 = 6k - 6 < 6k = \big|V\big((P_{3^4}, e, k)\big)\big|$. Sehingga $k - 1$ bukanlah simpul pendominasi minimal karena $\big|V\big(Shack(P_{3^4}, e, k)\big)\big| = 4k + 2$. Maka $\gamma\big(Shack(P_{3^4}, e, k)\big) \ge k$, dan terbukti bahwa $\big(Shack(P_{3^4}, e, k)\big) = k$. □



Gambar 4.6 Graf oktahedral shackle sisi $\gamma\big(Shack(P_{3^4}, e, 4)\big) = 4$

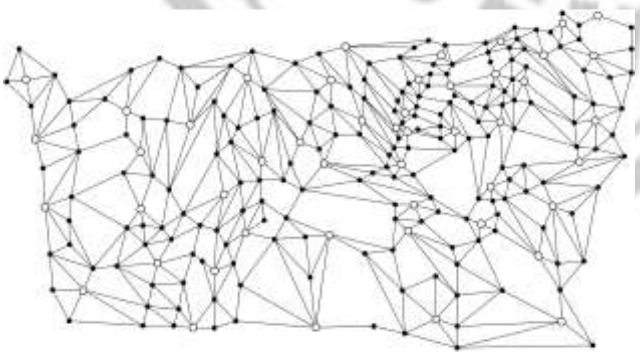
4.1.5. Studi Kasus Bilangan Dominasi pada Peta Kabupaten Jember

Pada sub-bab ini akan dibahas mengenai representasi titik dan sisi pada peta Kabupaten Jember. Peta Kabupaten Jember dapat dilihat pada Gambar 4.7. Langkah awal adalah menentukan peta ke dalam graf, kemudian gambar tersebut direpresentasikan menjadi K-Graf, dimana K-Graf merupakan cara merepresentasikan graf dengan desa sebagai simpul dan desa yang berbatasan secara langsung direpresentasikan sebagai sisi. Representasi K-Graf dari peta Kabupaten Jember dapat dilihat pada Gambar 4.8. Dari representasi graf tersebut akan ditetapkan lokasi *Server Center* pada simpul-simpul tertentu, sehingga dengan menggunakan Teori Bilangan Dominasi akan didapat jumlah *Server Center* seminimal mungkin tanpa mengurangi efisiensinya.

Gambar 4.7 Peta Kabupaten Jember

Gambar 4.8 Graf Peta Kabupaten Jember

Berdasarkan anlisis terhadap Gambar 4.8 diperoleh bilangan dominasi sebanyak 48. Analisis dilakukan terhadap simpul-simpul pendominasi yang dapat mendominasi simpul terhubung berjarak maksimal satu. Simpul-simpul pendominasi tersebut dapat dilihat pada Gambar 4.9. Sehingga penempatan *Server Center* dapat diletakkan pada simpul-simpul pendominasi dan dibutuhkan 48 *Server Center* pada Kabupaten Jember.



Gambar 4.9 K-Graf Kabupaten Jember dengan simpul putih sebagai simpul pendominasi

4.2. Pembahasan

Dari hasil penelitian mengenai bilangan dominasi pada sub bab sebelumnya dapat diketahui bahwa rumus yang dihasilkan dari masing-masing operasi graf oktahedral dan roda berbeda. Perbedaan tersebut terletak pada titik(simpul) dari masing-masing graf. Jika pada graf roda titik dapat di *expand* (diperluas) artinya titik yang digunakan dalam graf roda dimulai dari 3 titik hingga n titik. Sedangkan pada graf oktahedral titik tidak dapat di *expand* (diperluas), berdasarkan pengertian graf oktahedral yang memiliki 6 simpul dan 12 sisi.

Implementasi hasil penelitian mengenai bilangan dominasi selanjutnya akan dibangun Sistem Informasi Geografis penempatan *server center* pada Kabupaten Jember. Peta per-wilayah (Kabupaten Jember) didapat dari website penyedia peta gratis (http://tanahair.indonesia.go.id/portal-web/download/perwilayah, 2017), yang mana dalam Sistem tersebut memuat nama desa di Kabupaten Jember, titik koordinat kantor desa dan foto dari kantor desa yang menjadi titik pendominasi. Sistem Informasi Geografis penempatan *Server Center* dapat dijalankan pada platform Windows dan Android.

Agustina M, Ika Hesti A, (2014) telah membahas batas bawah dan batas atas pada bilangan dominasi jarak satu yaitu $\left\lceil \frac{p}{1+\Delta(G)} \right\rceil \leq \gamma(G) \leq p - \Delta(G)$. Batas bawah artinya jumlah minimum titik pendominasi dalam sebarang graf (G). Sedangkan batas atas yaitu jumlah maksimum titik penominasi dalam sebarang graf (G). Jadi jumlah titik pendominasi $\gamma(G)$ harus lebih atau sama dengan batas bawah ($\left\lceil \frac{p}{1+\Delta(G)} \right\rceil$), atau kurang sama dengan batas atas $(p - \Delta(G))$. Pada K-Graf Kabupaten Jember memiliki jumlah simpul sebanyak 240 dan derajat maksimal $\Delta(K - Graf)$ adalah 6. Dengan demikian dihasilkan batas bawah ($\left\lceil \frac{p}{1+\Delta(G)} \right\rceil$) $\left\lceil \frac{240}{1+6} \right\rceil = 35$. Dan batas atas $\left(p - \Delta(G)\right) = 240 - 6 = 234$. Sehingga diperoleh $35 \leq \gamma(K - Graf) \leq 234$. Kesimpulannya yaitu simpul pendominasi memenuhi akan tetapi bukan "*sharp lower bound*" artinya masih ada selisih antara nilai dari hasil penelitian dengan batas bawah secara teori.

Gambar 4.10 Peta Kabupaten Jember dengan titik pendominasi

Gambar 4.11 Peta Kabupaten Jember dengan titik pendominasi per-Kecamatan

5. KESIMPULAN DAN SARAN

Kesimpulan yang didapat berdasarkan analisis dan pembahasan adalah sebagai berikut:

1. Bilangan dominasi pada graf roda hasil operasi *shackle* titik $Shack(W_n, v, k)$ dan *shackle* sisi $Shack(W_n, e, k)$ adalah
$$\gamma(Shack(W_n, v, k)) = \begin{cases} \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil; & n = 3 \\ k; & n \geq 4 \end{cases}$$
$$\gamma(Shack(W_n, e, k)) = \begin{cases} \left\lceil \frac{k}{3} \right\rceil; & n = 3 \\ k; & n \geq 4 \end{cases}$$
2. Bilangan dominasi pada graf oktahedral hasil operasi *shackle* titik dan *shackle* sisi adalah $\gamma(Shack(P_{3^4}, v, k)) = k + 1$ dan $\gamma(Shack(P_{3^4}, e, k)) = k$.
3. *K-Graph* peta penempatan *Server Center* pada Kabupaten Jember menggunakan Teori Bilangan Dominasi dibutuhkan sebanyak 48 *Server Center*.

Berdasarkan hasil penelitian mengenai bilangan dominasi, maka penulis memberikan masalah terbuka kepada pembaca yang berminat meneliti di bidang yang sama, yaitu menentukan bilangan dominasi pada *family* graf yang lain dan mengembangkan simpul sebagai desa yang hanya menjangkau satu server saja sesuai persebaran pada peta Kabupaten Jember serta menemukan definisi yang baru terkait bilangan dominasi, misalnya bilangan dominasi graf berarah, menentukan *power* dominasi, *face* dominasi, dan sebagainya. Selain itu, implementasi ke dalam penyelesaian permasalahan sehari-hari juga perlu dikaji lebih mendalam guna menghasilkan penelitian yang baru.

DAFTAR PUSTAKA

Agustina M, Ika Hesti A, D. (2014). Graf-Graf Khusus dan Bilangan Dominasinya Pendahuluan Teorema yang Digunakan Hasil Penelitian dan Pembahasan, 4–9.

Ajie, M. D. (1996). Sistem Informasi, *6*(2), 103.

http://majalah1000guru.net/2013/08/jembatan-konigsberg. (n.d.).

http://tanahair.indonesia.go.id/portal-web/download/perwilayah. (2017). Badan Informasi Geospasial.

Husein, R. (2006). GEOGRAPHICS INFORMATION SYSTEM, 1–9.

Maryati, T. K., Salman, A. N. M., Baskoro, E. T., & Ryan, J. (2010). On H-supermagic labelings for certain shackles and amalgamations of a connected graph On H - supermagic labelings for certain shackles and amalgamations of a connected graph, (October 2016).

Munir, R. (2004). Algoritma Greedy Pendahuluan.

Prihatmaja, P. A., Teknik, S., & Graf, A. (2017). Penerapan Teori Graf Dalam Jaringan GSM.

Reni, U. (2017). Perbandingan Bilangan Dominasi Jarak Satu dan Dua pada Graf Hasil Operasi Comb. *Justindo*, 41–50.

Saifudin, I., & Umilasari, R. (2017). Penempatan Anjungan Tunai Mandiri (ATM) pada Kecamatan Sumbersari Kabupaten Jember Menggunakan Teori Bilangan Dominasi. *Justindo*, 112–120.

Umilasari, R. (2017). Bilangan Dominasi Jarak Dua Pada Graf Hasil Operasi Shackle. *Justindo*, 121–127.

Umilasari, R., & Darmaji. (2016). Dominating number of distance two of corona products of graphs. *Indonesian Journal of Combinatorics*, *1*(1), 41. https://doi.org/10.19184/ijc.2016.1.1.5

Vikade, W. D. (2013). Bilangan Dominasi Jarak Dua Pada Graf Hasil Operasi.