

# STRUKTUR STATIS TAK TENTU UNTUK TEKNIK SIPIL

*by* Muhtar Muhtar

---

**Submission date:** 31-Jan-2020 01:30AM (UTC+0700)

**Submission ID:** 1248854719

**File name:** BUKU\_AJAR.pdf (1.91M)

**Word count:** 7899

**Character count:** 30963

**BUKU AJAR**

**STRUKTUR STATIS TAK TENTU**  
*UNTUK*  
**TEKNIK SIPIL**

**Jilid 1**

**Dr. Muhtar, ST., MT.**

**STRUKTUR STATIS TAK TENTU**  
*UNTUK*  
**TEKNIK SIPIL**

**Jilid 1**

Penerbit :



**LPPM**

**UNIVERSITAS MUHAMMADIYAH JEMBER**

Jl. Karimata 49 Jember Telp. (0331) 336728 Fax. (0331) 337957  
email: lppm@unmuhjember.ac.id

**BUKU AJAR**

**STRUKTUR STATIS TAK TENTU**

**UNTUK**

**TEKNIK SIPIL**

**Jilid 1**

Penulis :  
**Dr. Muhtar, ST., MT.**

Editor :  
**Dr. Muhtar, ST., MT.**

Penyunting :  
**Dhimas**

Desain sampul dan tata letak :  
**Abdul Jalil, S.P**

Cetakan pertama, Pebruari 2020  
ISBN : **978-602-6988-79-9**

Penerbit :  
**LPPM Unmuh Jember**  
Redaksi: Jl. Karimata 49 Jember Telp. (0331) 336728 Fax. (0331) 337957  
email: lppm@unmuhjember.ac.id

Distributor Tunggal : LPPM Unmuh Jember  
Jl. Karimata 49 Jember Telp. (0331) 336728 Fax. (0331) 337957

**Hak cipta dilindungi undang-undang**  
Dilarang memperbanyak karya tulis ini dalam bentuk dan  
dengan cara apapun tanpa ijin tertulis dari penerbit.

## KATA PENGANTAR

**P**uji dan syukur hanya milik Allah SWT semata, yang telah memberikan barokah, rahmad, dan izin-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan **Buku Ajar** ini dengan baik, yang berjudul “**STRUKTUR STATIS TAK TENTU UNTUK TEKNIK SIPIL**”. Buku Ajar ini merupakan kumpulan dan rangkuman dari beberapa buku Mekanika Rekayasa dan hasil diskusi contoh-contoh soal mata kuliah Mekanika Rekayasa atau Struktur Statis Tak Tentu.

Buku ini membahas khusus pengertian struktur statis tak tentu, perhitungan gaya-gaya dalam struktur balok maupun portal, dan contoh-contoh soal penyelesaian perhitungan gaya-gaya dalam elemen struktur statis tak tentu. Metode penyelesaian perhitungan gaya-gaya dalam elemen struktur statis tak tentu menggunakan dua metode yaitu *Metode Consistent Deformation* dan *Metode Persamaan Tiga Momen (Clayperon)*.

Maksud dan tujuan diterbitkannya buku ini adalah agar dapat bermanfaat bagi mahasiswa Unmuh Jember, dosen, maupun mahasiswa diluar Unmuh Jember. Tentu saja buku ajar ini masih banyak kekurangannya, untuk itu demi perbaikan kami mengharap masukan dari semua pihak demi kesempurnaan buku ajar ini di masa yang akan datang.

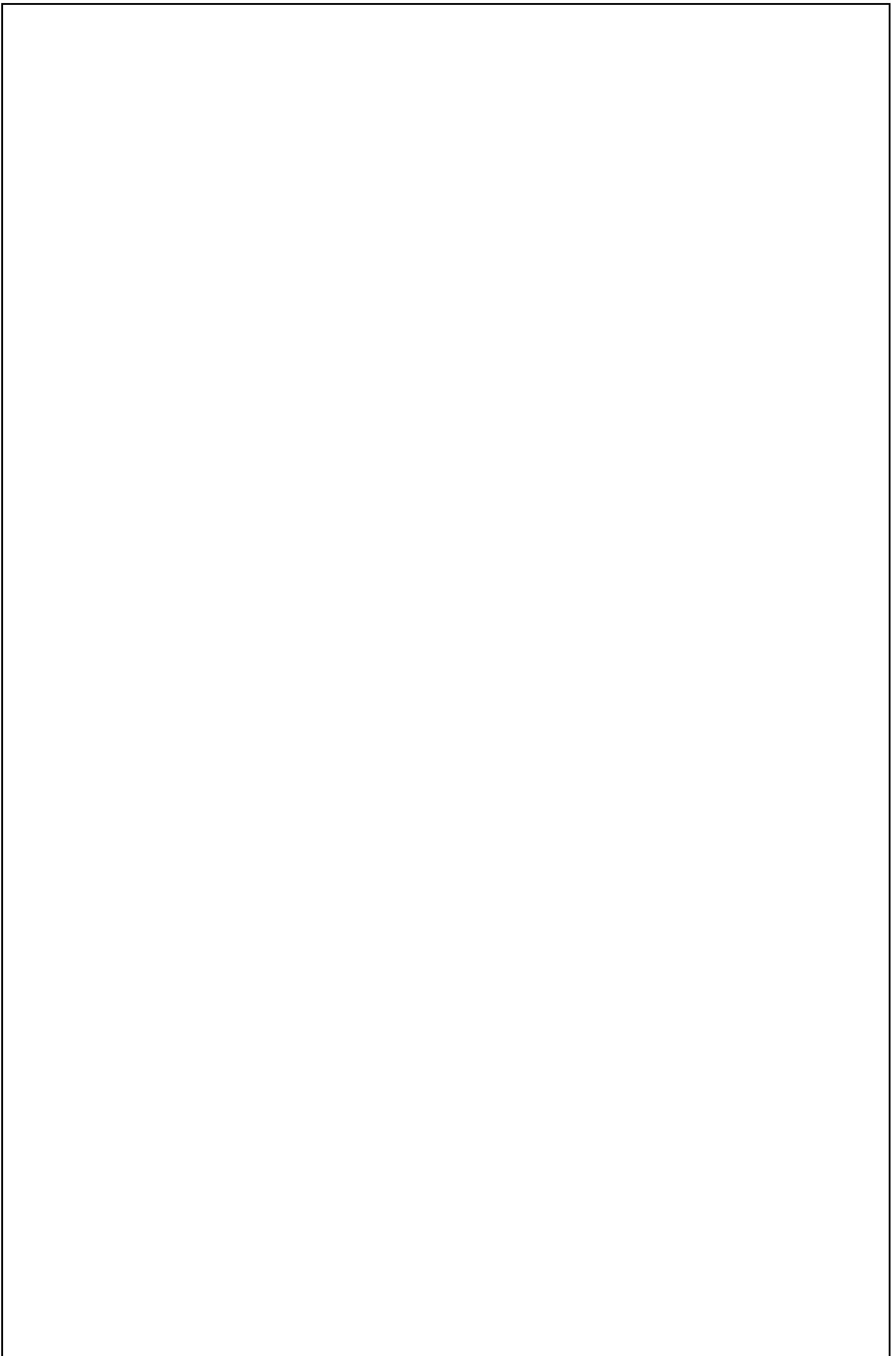
Terima kasih kami ucapan kepada Rektor, Wakil Rektor, Dekan, dan LPPM Universitas Muhammadiyah Jember, yang telah bersedia menerbitkan buku ini. Tidak lupa kami ucapan banyak terima kepada semua pihak yang telah membantu proses penerbitan buku ajar ini.

Jember, Pebruari 2020

**Muhtar**

## DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR .....	iv
DAFTAR ISI.....	v
BAB I	1
KONSTRUKSI STATIS TAK TENTU .....	1
1.1. Latar Belakang.....	1
1.2. Perbedaan Struktur Statis Tertentu dan struktur Statis Tak Tentu .....	1
1.3. Diskusi dan Latihan Soal .....	4
BAB II	6
METODE CONSISTENT DEFORMATION.....	6
2.1. Konsistensi Tumpuan.....	6
2.2. Metode Penyelesaian .....	7
2.3. Diskusi dan Latihan Soal .....	11
2.4. Soal-Soal Latihan.....	24
BAB III	25
METODE PERSAMAAN TIGA MOMEN.....	25
3.1. Pengertian dan Penurunan Persamaan .....	25
3.2. Diskusi dan Latihan Soal .....	27
3.3. Soal-Soal Latihan.....	48
BAB IV	50
METODE CLAPEYRON PADA KONSTRUKSI BERGOYANG.....	50
4.1. Penurunan rumus .....	50
4.2. Diskusi dan Latihan Soal .....	51
4.3. Soal-Soal Latihan.....	61
DAFTAR PUSTAKA .....	62



# BAB I

## KONSTRUKSI STATIS TAK TENTU

### 1.1. Latar Belakang

Konstruksi statis tak tentu banyak diaplikasikan pada bangunan atau konstruksi tidak sederhana seperti bangunan-bangunan gedung bertingkat. Sedangkan untuk konstruksi statis tertentu banyak diaplikasikan pada bangunan-bangunan sederhana seperti struktur rangka kuda-kuda, jembatan, balok kantilever, dan lain-lain. Elemen atau batang konstruksi statis tertentu biasanya terdapat pada struktur rangka atau balok sederhana dengan dua tumpuan, yaitu tumpuan sendi dan tumpuan rol. Sedangkan elemen-elemen konstruksi statis tak tentu biasanya terdapat pada struktur portal atau balok menerus dengan tumpuan lebih dari dua tumpuan. Penentuan struktur statis tak tentu banyak ditentukan oleh derajat ketidaktentuannya. Derajat ketidaktentuan elemen struktur statis tertentu dan struktur statis tak tentu dapat diketahui melalui sifat-sifat konsistensi tumpuan dengan reaksi-reaksi yang terjadi pada tumpuannya. Untuk menentukan apakah struktur statis tertentu atau bukan dapat digunakan persamaan statika.

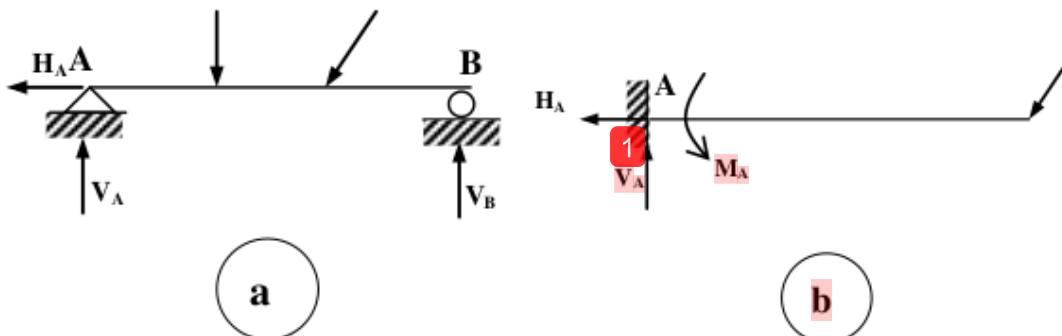
2

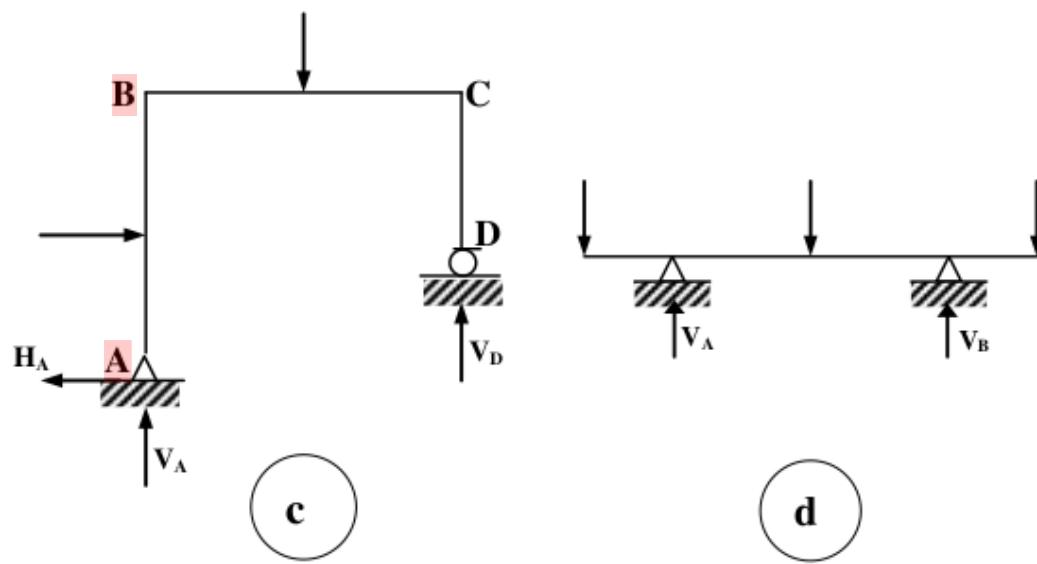
### 1.2. Perbedaan Struktur Statis Tertentu dan struktur Statis Tak Tentu

2

Perbedaan konstruksi statis tertentu dan konstruksi statis tak tentu adalah :

- A. Konstruksi Statis Tertentu adalah suatu konstruksi yang gaya-gaya dalamnya dapat diselesaikan dengan persamaan statika (seperti  $\Sigma V=0$  ;  $\Sigma M=0$  ;  $\Sigma H=0$ ). Contoh balok dan portal statis tertentu dapat dilihat pada Gambar 1.1(a) sampai dengan Gambar 1.1(d).

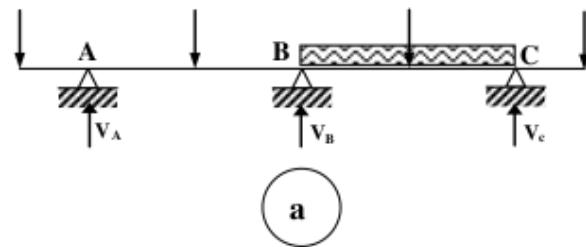


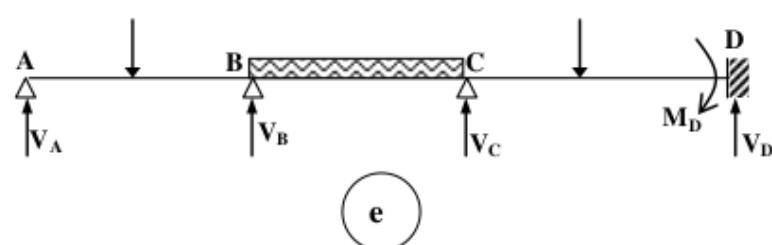
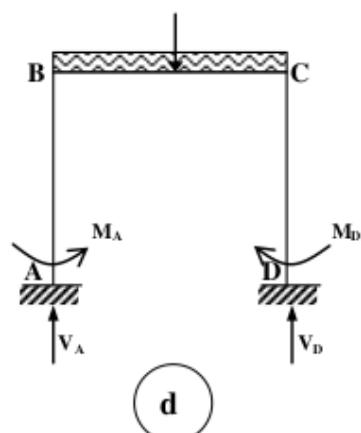
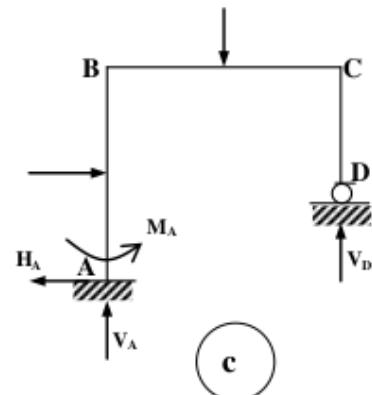
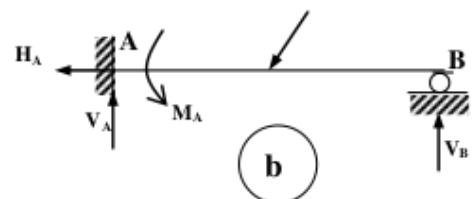


Gambar 1.1. Contoh portal dan balok struktur statis tertentu

Catatan untuk kasus Gambar 1.1(d), tumpuan A dan tumpuan B merupakan tumpuan sendi-sendi, dalam kasus ini masih dikategorikan sebagai struktur statis tertentu, karena  $H_A$  dan  $H_B$  sebenarnya tidak ada, sehingga persamaan statikanya cukup  $\Sigma V=0$  dan  $\Sigma M=0$ .

- B. Konstruksi Statis Tak Tentu adalah suatu konstruksi yang gaya-gaya dalamnya dan reaksi-reaksi perletakannya tidak dapat diselesaikan hanya dengan persamaan-persamaan statika (seperti  $\Sigma V=0$  ;  $\Sigma M=0$  ;  $\Sigma H=0$ ). Hal ini disebabkan adanya kelebihan reaksi-reaksi perletakan (*Redundant Reaction*) satu atau lebih. Derajat ketidaktentuannya ditentukan dari jumlah *redundant* tersebut. Contoh balok dan portal statis tak tentu dapat dilihat pada Gambar 1.2(a) sampai dengan Gambar 1.2(e).





Gambar 1.2. Contoh portal dan balok struktur statis tak tentu

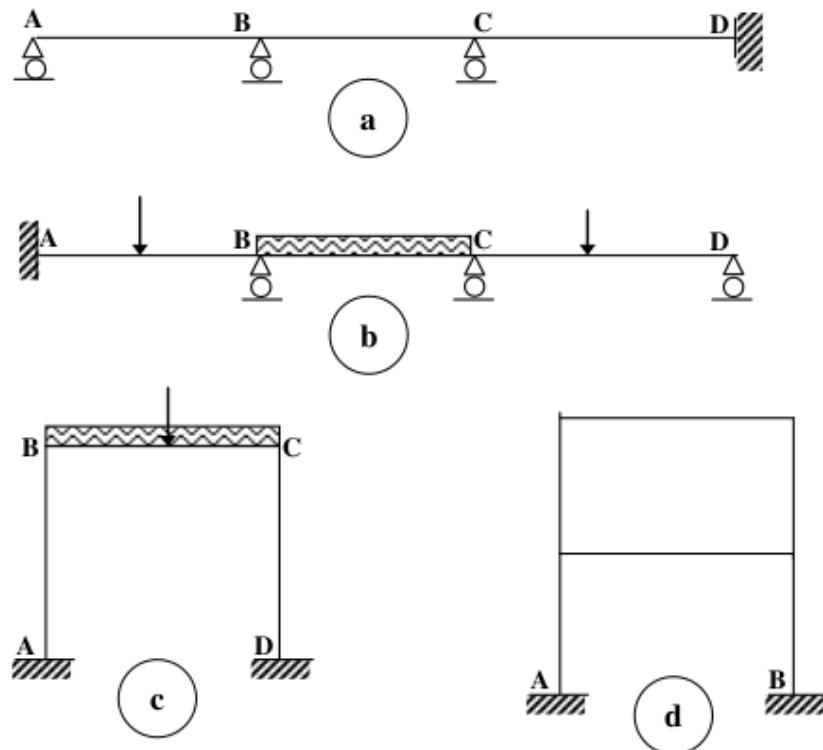
Keterangan Gambar 1.2(a) sampai Gambar 1.2(e)

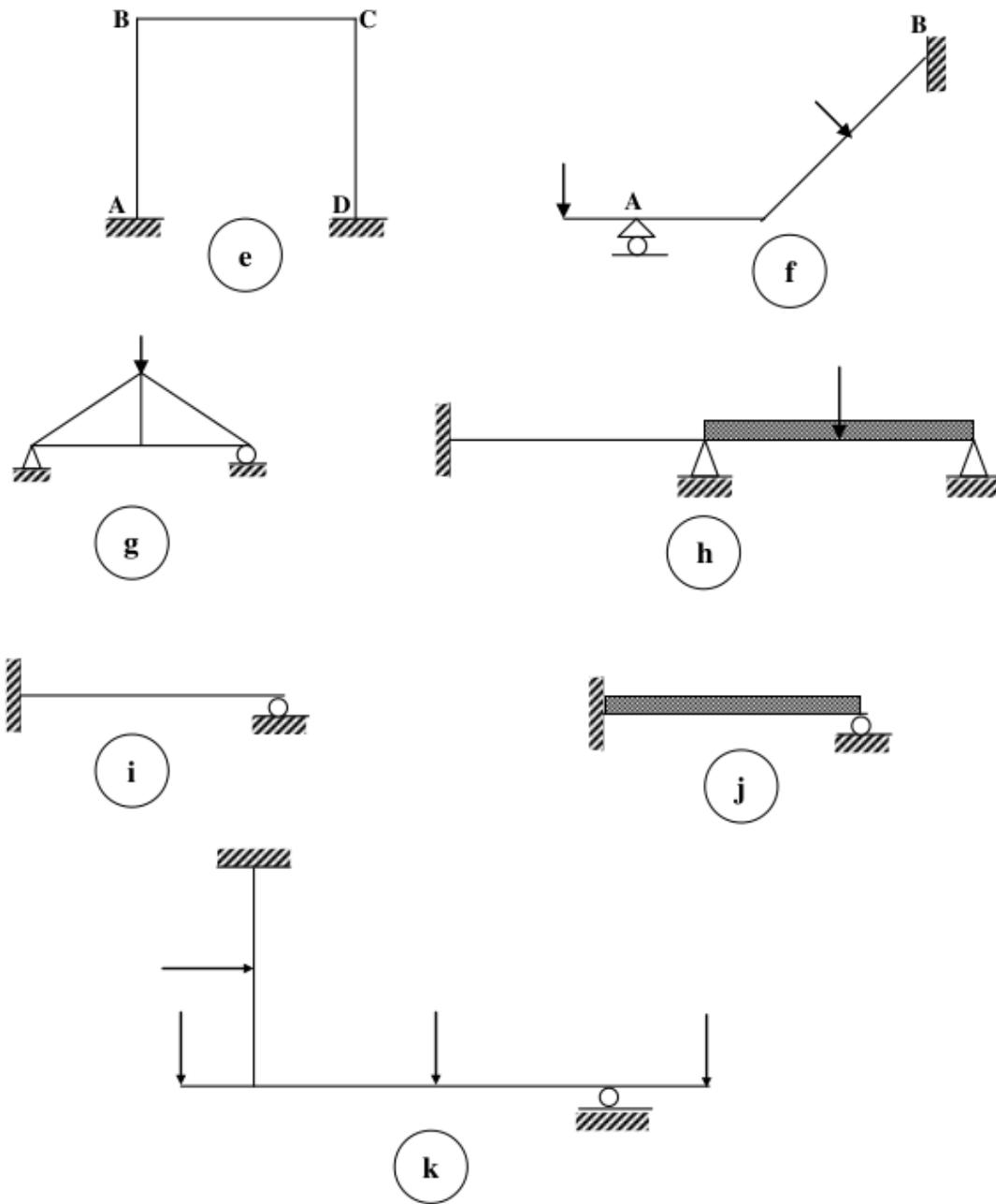
- Gambar 1.2(a) merupakan struktur statis tak tentu tingkat 1 (STT TK 1) dimana reaksi-reaksi ada tiga ( $V_A$ ,  $V_B$ ,  $V_C$ ), sedangkan persamaan statika yang digunakan ada dua ( $\Sigma V=0$  dan  $\Sigma M=0$ ), sehingga sisa 1 reaksi (*redundant Reaction*).

- Gambar 1.2(b) merupakan struktur statis tak tentu tingkat 1 (STT TK 1) dimana reaksi-reaksi ada empat ( $V_A, H_A, M_A, V_B$ ), sedangkan persamaan statika yang digunakan ada tiga ( $\Sigma V=0$ ,  $\Sigma H=0$  dan  $\Sigma M=0$ ), sehingga sisa 1 reaksi (*redundant Reaction*).
- Gambar 1.2(c) merupakan struktur statis tak tentu tingkat 1 (STT TK 1) dimana reaksi-reaksi ada empat ( $V_A, H_A, M_A, V_D$ ), sedangkan persamaan statika yang digunakan ada tiga ( $\Sigma V=0$ ,  $\Sigma H=0$  dan  $\Sigma M=0$ ), sehingga sisa 1 reaksi (*redundant Reaction*).
- Gambar 2.d merupakan struktur statis tak tentu tingkat 2 (STT TK 2) dimana reaksi-reaksi ada empat ( $V_A, M_A, M_D, V_D$ ), sedangkan persamaan statika yang digunakan ada tiga ( $\Sigma V=0$ , dan  $\Sigma M=0$ ), sehingga sisa 2 reaksi (*redundant Reaction*).
- Gambar 2.e merupakan struktur statis tak tentu tingkat 3 (STT TK 3) dimana reaksi-reaksi ada empat ( $V_A, V_B, V_C, M_D, V_D$ ), sedangkan persamaan statika yang digunakan ada tiga ( $\Sigma V=0$ , dan  $\Sigma M=0$ ), sehingga sisa 3 reaksi (*redundant Reaction*).

### 1.3. Diskusi dan Latihan Soal

Tentukan struktur statis tak tentu tingkat berapa (STT TK) struktur balok dan portal berikut ini:



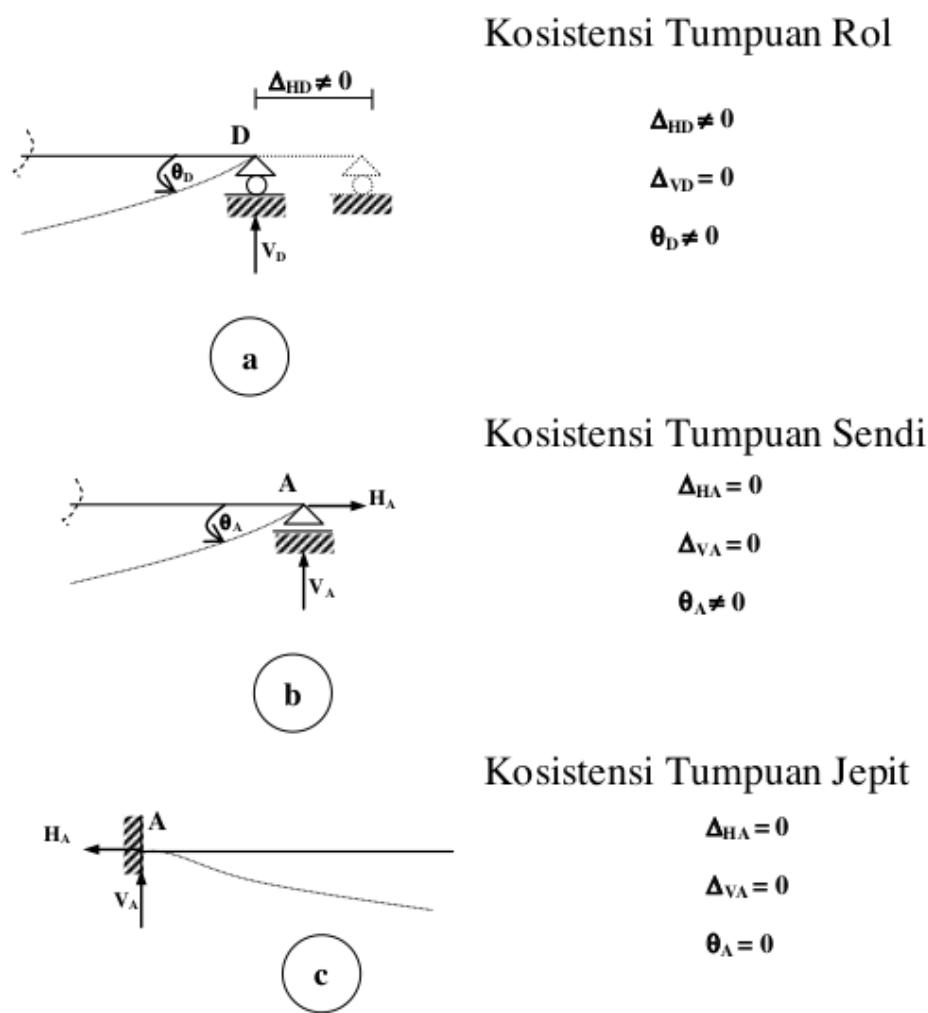


## BAB II

### METODE CONSISTENT DEFORMATION

#### 2.1. Konsistensi Tumpuan

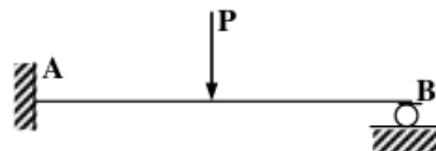
Metode *Consistent Deformation* adalah suatu metode yang menggunakan atau memanfaatkan perubahan bentuk suatu perletakan dengan berdasarkan konsistensi perletakan atau tumpuan yang menjadi atau dijadikan *Redundant Reaction* (reaksi kelebihan). Deformasi (perubahan bentuk) dari perletakan-perletakan atau tumpuan yang ada *redundant*-nya (kelebihan reaksi) harus ada konsistennya seperti yang diperlihatkan pada Gambar 2.1(a) sampai dengan Gambar 2.1(c).



Gambar 2.1. Sifat konsistensi tumpuan

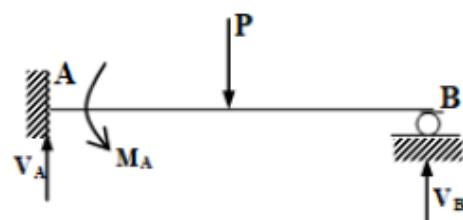
## 2.2. Metode Penyelesaian

Contoh Kasus sebuah balok dengan beban dan struktur statis tak tentu tingkat 1 (STT Tk 1) seperti dibawah ini.



Langkah-langkah penyelesaian:

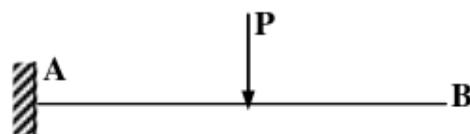
1. Tentukan STT Tk berapa.



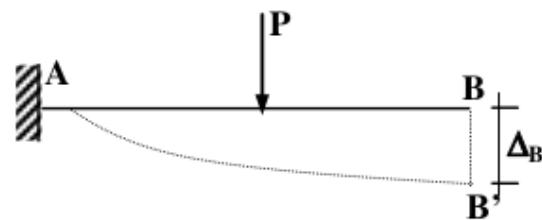
Reaksi 3 ( $V_A, M_A, V_B$ )  
Persamaan 2 ( $\sum V = 0$ , dan  $\sum M$ )  
Sehingga 3-2 = 1 (STT TK 1)  
kelebihan 1 reaksi

Kita ambil sebagai redundant =  $V_B$

2. Ubahlah struktur tersebut menjadi struktur statis tertentu dengan menghilangkan  $V_B$  yang dijadikan redundant.



3. Hitung defleksi di B ( $\Delta_B$ ) akibat beban luar P dengan metode *Momen Area* atau metode *Unit Load*.



$$\Delta_B = \int_0^L \frac{M_x m_x}{EI} dx$$

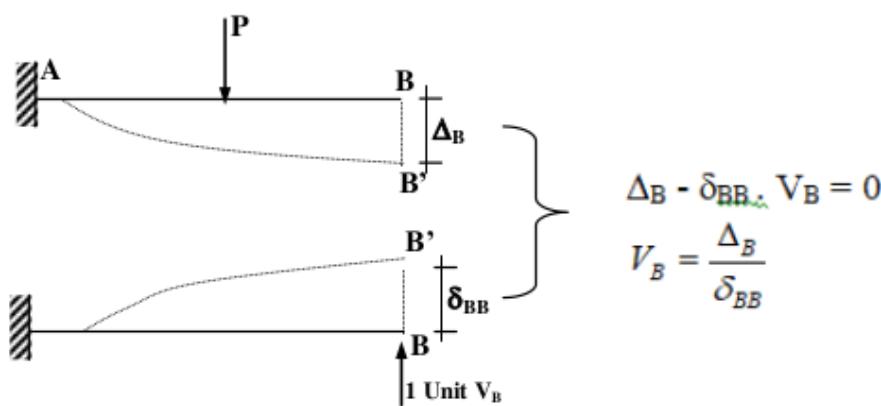
4. Beri beban satu satuan pada tempat redundant (di B) atau tumpuan yang dihilangkan dengan arah berlawanan.



5. Hitung defleksi akibat beban satu satuan  $V_B$  ( $\delta_{BB}$ ) dengan metode *Momen Area* atau metode *Unit Load*.

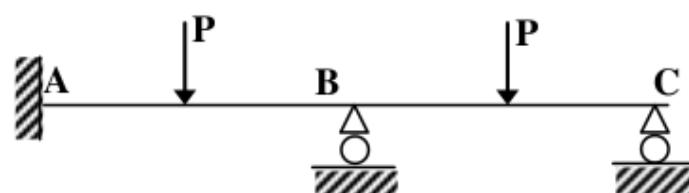
$$\delta_{BB} = \int_0^L \frac{m_x^2}{EI} dx$$

6. Defleksi arah vertikal maupun horisontal di titik B sebenarnya = 0 (sifat konsistensi tumpuan Rol  $\Sigma V=0$ ) sehingga :



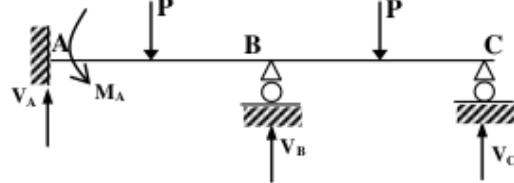
7. Gaya-gaya dalam selanjutnya dihitung dengan *Free Body Diagram* dan *persamaan statika*.

Contoh Kasus jika balok dengan beban dan struktur statis tak tentu tingkat 2 (STT Tk 2) seperti dibawah ini.



Langkah-langkah penyelesaian:

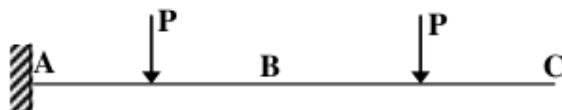
1. Tentukan STT Tk berapa.



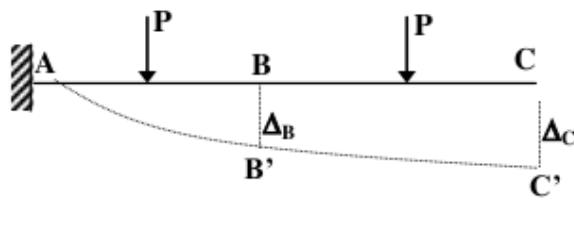
Reaksi 4 ( $V_A, M_A, V_B, V_C$ )  
Persamaan 2 ( $\Sigma V = 0$ , dan  $\Sigma M = 0$ )  
Sehingga 4-2 = 2 (STT TK 2)  
kelebihan 2 reaksi

Kita ambil sebagai redundant =  $V_B$  dan  $V_C$

2. Ubahlah struktur tersebut menjadi struktur statis tertentu dengan menghilangkan  $V_B$  dan  $V_C$  dijadikan redundant.



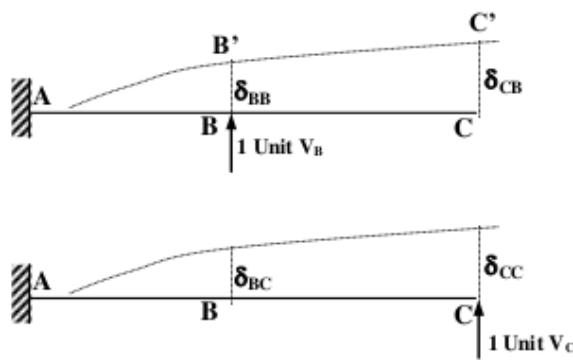
3. Hitung defleksi di B ( $\Delta_B$ ) dan di C ( $\Delta_C$ ) akibat beban luar P dengan metode *Momen Area* atau metode *Unit Load*.



$$\Delta_B = \int_0^L \frac{M_x m_{XB}}{EI} dx$$

$$\Delta_C = \int_0^L \frac{M_x m_{XC}}{EI} dx$$

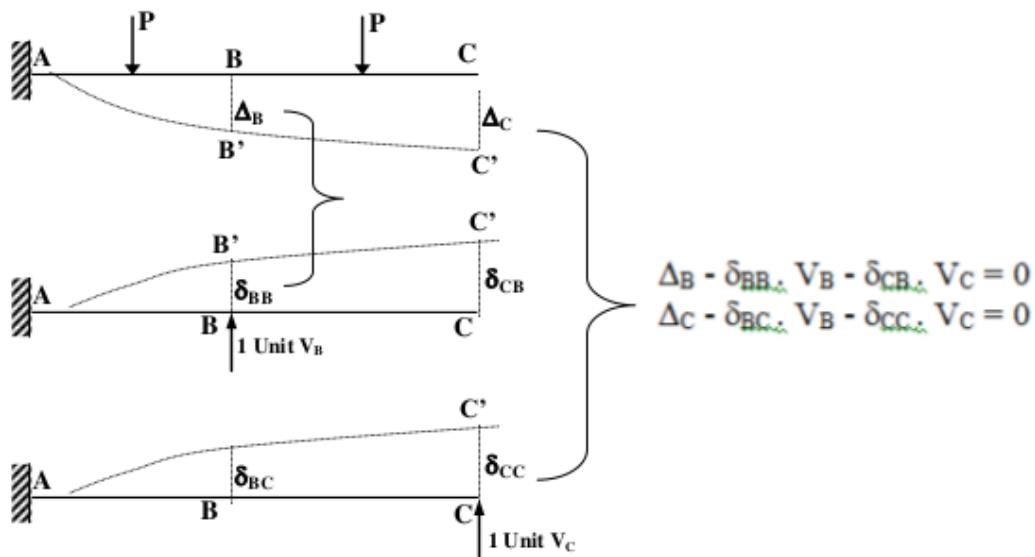
4. Beri beban satu satuan (*1 Unit*) pada tempat redundant (di B dan C) atau tumpuan yang dihilangkan dengan arah berlawanan dengan deformasi balok.



5. Hitung defleksi akibat beban satu satuan VB ( $\Delta_{BB}$ ) dengan metode *Momen Area* atau metode *Unit Load*.

$$\delta_{BB} = \int_0^L \frac{m_{XB}^2}{EI} dx \quad \delta_{CC} = \int_0^L \frac{m_{XC}^2}{EI} dx \quad \delta_{BC} = \delta_{CB} = \int_0^L \frac{m_{XB} m_{XC}}{EI} dx$$

6. Defleksi arah vertikal di titik B dan C sebenarnya = 0 (sifat konsistensi tumpuan Rol  $\Sigma V=0$ ) sehingga :

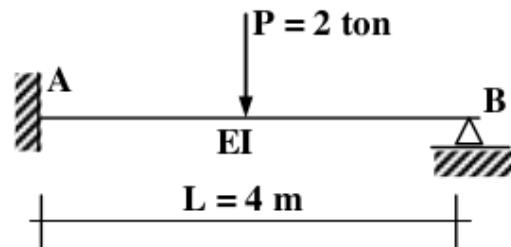


7. Gaya-gaya dalam selanjutnya dihitung dengan *Free Body Diagram* dan persamaan statika.

## 2.3. Diskusi dan Latihan Soal

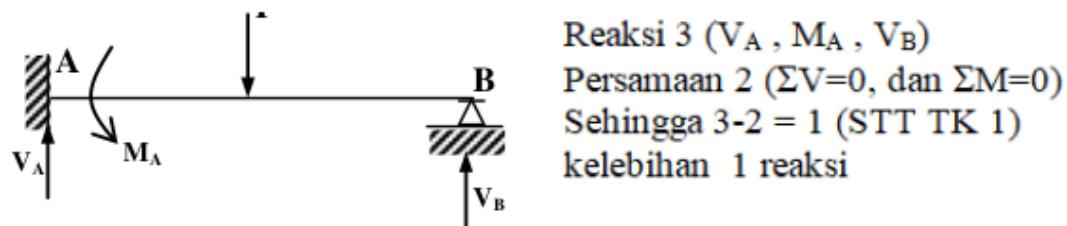
### Contoh 1.

Diketahui sebuah balok sederhana dengan beban dan ukuran seperti gambar dibawah ini. Hitung dan gambar gaya-gaya dalam balok tersebut dengan metode *Consistent Deformation*.



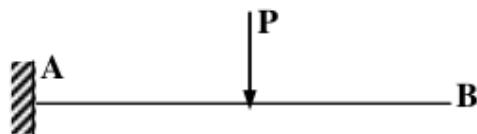
Penyelesaian :

1. Tentukan STT Tk berapa

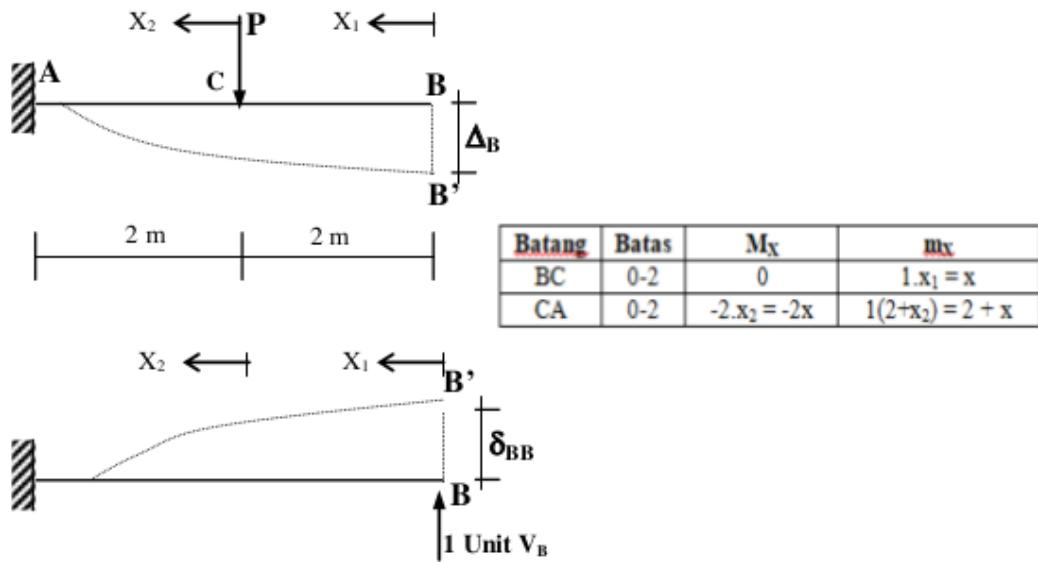


Kita ambil sebagai redundant =  $V_B$

2. Ubahlah struktur tersebut menjadi struktur statis tertentu dengan menghilangkan  $V_B$  yang dijadikan redundant.



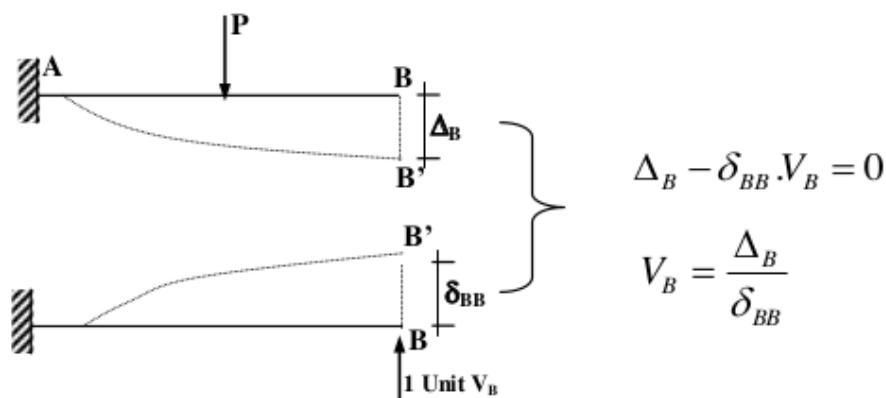
3. Hitung defleksi di B ( $\Delta_B$ ) akibat beban luar P dan hitung defleksi di B ( $\delta_{BB}$ ) akibat beban satu unit  $V_B$  dengan metode *Unit Load*.



$$\Delta_B = \int_0^L \frac{M_x m_x}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^2 -2x(2+x) dx = \frac{40}{3EI}$$

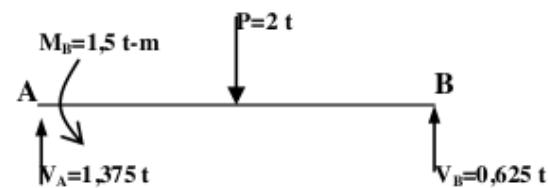
$$\delta_{BB} = \int_0^L \frac{m_x^2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^2 x^2 dx + \frac{1}{EI} \int_0^2 (2+x)^2 dx = \frac{64}{3EI}$$

4. Defleksi arah vertikal dan horisontal di titik B sebenarnya = 0 (sifat konsistensi tumpuan sendi  $\Sigma V=0$ ,  $\Sigma H=0$ ) sehingga :



$$V_B = \frac{\Delta_B}{\delta_{BB}} = \frac{40/3EI}{64/3EI} = 0.625t$$

5. Gaya-gaya dalam selanjutnya dihitung dengan *Free Body Diagram* dan persamaan statika.



Free Body Diagram

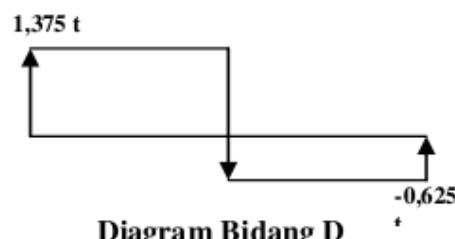


Diagram Bidang D

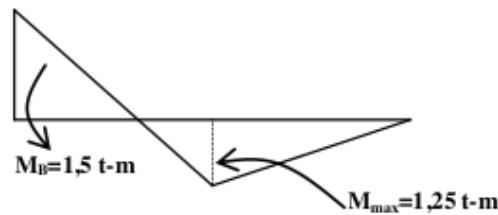
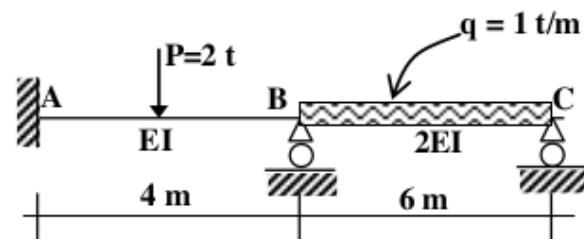


Diagram Bidang M

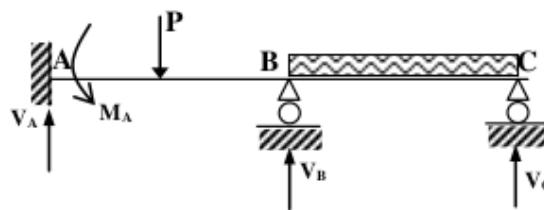
## Contoh 2.

Diketahui sebuah balok dengan beban dan struktur statis tak tentu tingkat 2 (STT Tk 2) seperti dibawah ini. Hitung dan gambar gaya-gaya dalam balok tersebut dengan metode *Consistant Deformation*.



Langkah-langkah penyelesaian :

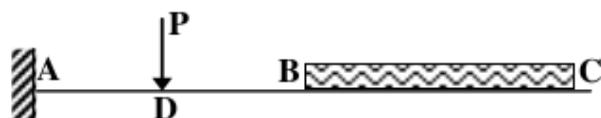
1. Tentukan STT Tk berapa



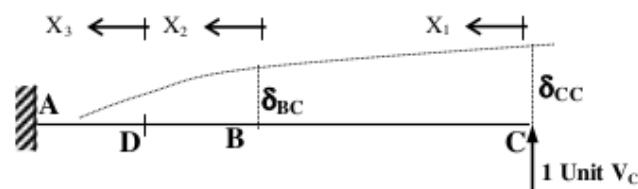
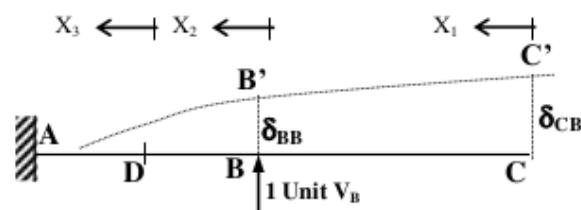
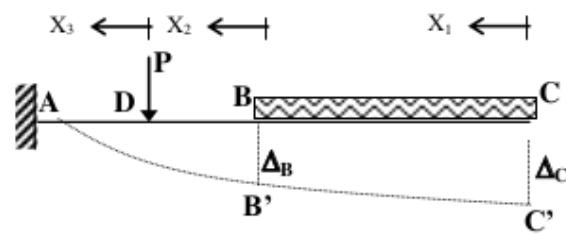
Reaksi 4 ( $V_A, M_A, V_B, V_C$ )  
 Persamaan 2 ( $\sum V = 0$ , dan  $\sum M = 0$ )  
 Sehingga  $4 - 2 = 2$  (STT TK 2)  
 kelebihan 2 reaksi

Kita ambil sebagai redundant =  $V_B$  dan  $V_C$

2. Ubahlah struktur tersebut menjadi struktur statis tertentu dengan menghilangkan  $V_B$  dan  $V_C$  dijadikan *redundant*.



3. a. Hitung defleksi di B ( $\Delta_B$ ) dan di C ( $\Delta_C$ ) akibat beban luar P dengan metode *Momen Area* atau metode *Unit Load*.  
 b. Beri beban satu satuan (1 Unit) pada tempat *redundant* (di B dan C) atau tumpuan yang dihilangkan dengan arah berlawanan dengan deformasi balok. Lalu hitung defleksi akibat beban satu satuan  $V_B$  ( $\delta_{BB}$ ) dengan metode *Momen Area* atau metode *Unit Load*.



$$\Delta_B = \int_0^L \frac{M_x m_{XB}}{EI} dx \quad \Delta_C = \int_0^L \frac{M_x m_{XC}}{EI} dx \quad \delta_{BB} = \int_0^L \frac{m_{XB}^2}{EI} dx$$

$$\delta_{CC} = \int_0^L \frac{m_{XC}^2}{EI} dx \quad \delta_{BC} = \delta_{CB} = \int_0^L \frac{m_{XB} m_{XC}}{EI} dx$$

Batang	Batas	$M_x$	$m_{XB}$	$m_{XC}$
CB	$0 < x < x_1$	$-\frac{1}{2}q x_1^2 = -\frac{1}{2}x^2$	0	$x_1 = x$
BD	$0 < x < x_2$	$-6(3+x_2) = -18-6x$	$x_2 = x$	$1(6+x_2) = 6+x$
DA	$0 < x < x_3$	$-6(5+x_3) = -30-6x$	$1(2+x_3) = 2+x$	$1(8+x_3) = 8+x$

$$\Delta_B = \int_0^L \frac{M_x m_{XB}}{EI} dx$$

$$\Delta_B = \frac{1}{2EI} \int_0^6 (-\frac{1}{2}x^2)(0)dx + \frac{1}{EI} \int_0^2 (-18-6x)(x)dx + \frac{1}{EI} \int_0^2 (-30-6x)(2+x)dx = -\frac{272}{EI}$$

$$\Delta_C = \int_0^L \frac{M_x m_{XC}}{EI} dx$$

$$\Delta_C = \frac{1}{2EI} \int_0^6 (-\frac{1}{2}x^2)(x)dx + \frac{1}{EI} \int_0^2 (-18-6x)(6+x)dx + \frac{1}{EI} \int_0^2 (-30-6x)(8+x)dx = -\frac{1073}{EI}$$

$$\delta_{BB} = \int_0^L \frac{m_{XB}^2}{EI} dx$$

$$\delta_{BB} = \frac{1}{2EI} \int_0^6 (0)^2 dx + \frac{1}{EI} \int_0^2 (x)^2 dx + \frac{1}{EI} \int_0^2 (2+x)^2 dx = \frac{64}{3EI}$$

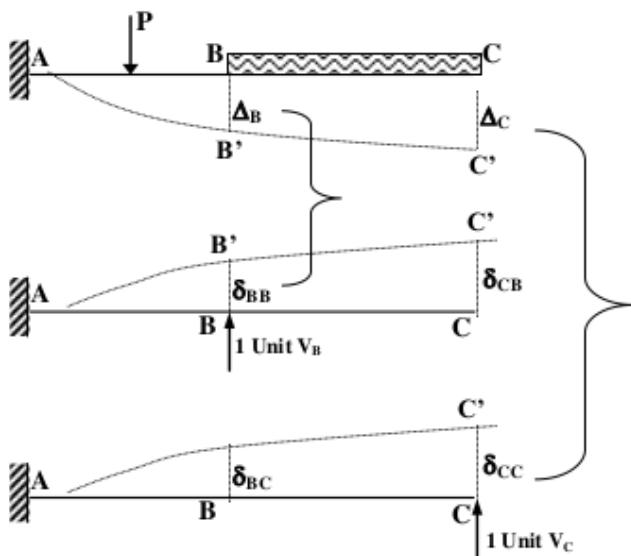
$$\delta_{CC} = \int_0^L \frac{m_{XC}^2}{EI} dx$$

$$\delta_{CC} = \frac{1}{2EI} \int_0^6 (x)^2 dx + \frac{1}{EI} \int_0^2 (6+x)^2 dx + \frac{1}{EI} \int_0^2 (8+x)^2 dx = \frac{892}{3EI}$$

$$\delta_{BC} = \delta_{CB} = \int_0^L \frac{m_{XB} m_{XC}}{EI} dx$$

$$\delta_{BC} \delta_{CB} = \frac{1}{2EI} \int_0^6 (0).(x)dx + \frac{1}{EI} \int_0^2 (x).(6+x)dx + \frac{1}{EI} \int_0^2 (2+x).(8+x)dx = \frac{208}{3EI}$$

4. Defleksi arah vertikal di titik B dan C sebenarnya = 0 (sifat konsistensi tumpuan Rol $\Sigma V=0$ ) sehingga :



$$\Delta_B - \delta_{BB} \cdot V_B - \delta_{CB} \cdot V_C = 0$$

$$\Delta_C - \delta_{BC} \cdot V_B - \delta_{CC} \cdot V_C = 0$$

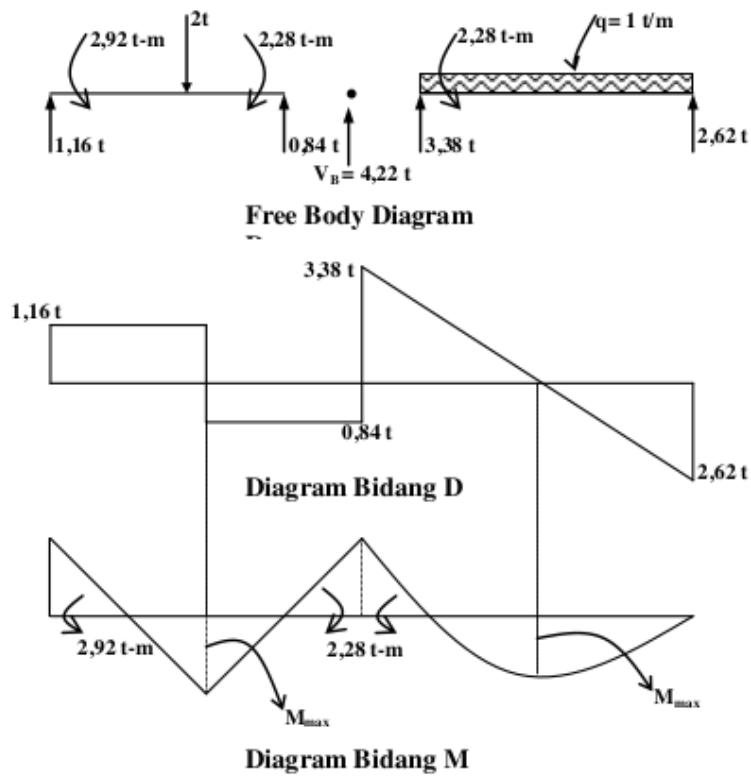
$$-\frac{272}{RI} - \frac{64}{3EI} V_B - \frac{208}{3EI} V_C = 0 \quad \dots \text{Persamaan I}$$

$$-\frac{1073}{RI} - \frac{208}{3EI} V_B - \frac{892}{3EI} V_C = 0 \quad \dots \text{Persamaan II}$$

Dengan menyelesaikan persamaan dengan dua variabel  $V_B$  dan  $V_C$  diatas didapat :

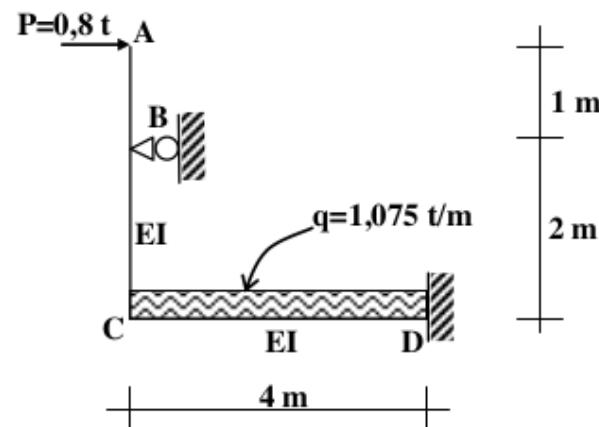
$$V_C = -2,6243 \text{ ton} \text{ dan } V_B = -4,222 \text{ ton}$$

5. Gaya-gaya dalam selanjutnya dihitung dengan *Free Body Diagram* dan persamaan statika.



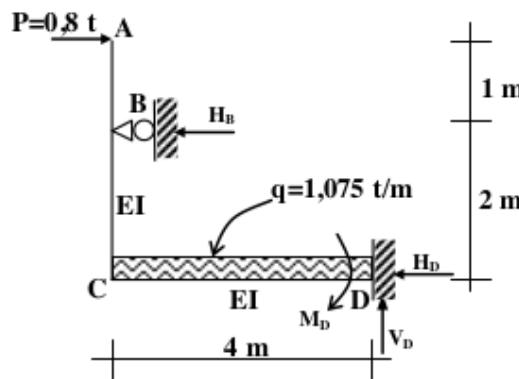
### Contoh 3.

Diketahui sebuah portal dengan beban dan ukuran seperti gambar dibawah ini. Hitung dan gambar gaya-gaya dalam portal tersebut dengan metode *Consistant Deformation*.



Langkah-langkah penyelesaian:

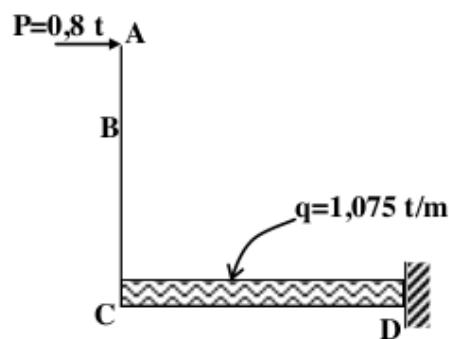
1. Tentukan STT Tk berapa



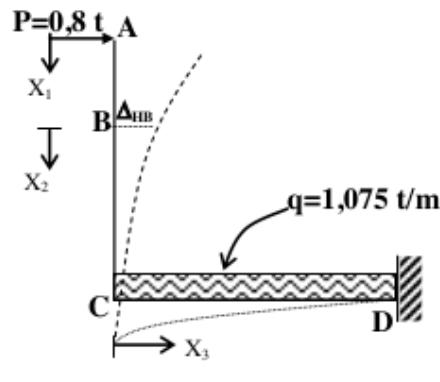
Reaksi 4 ( $V_D$ ,  $M_D$ ,  $H_D$ ,  $H_B$ )  
 Persamaan 3 ( $\sum V = 0$ ,  $\sum H = 0$  dan  $\sum M = 0$ )  
 Sehingga  $4-3 = 1$  (STT TK 1)  
 kelebihan 1 reaksi

Kita ambil sebagai redundant =  $H_B$

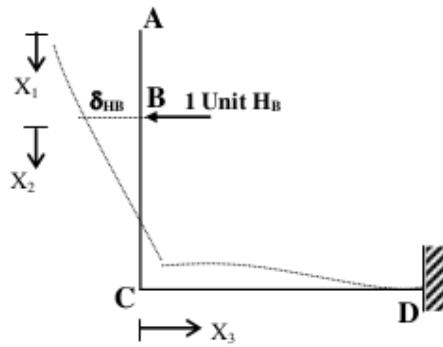
2. Ubahlah struktur tersebut menjadi struktur statis tertentu dengan menghilangkan  $H_B$  dijadikan redundant.



3. a. Hitung defleksi di B ( $\Delta_{HB}$ ) akibat beban luar P dan q dengan metode *Momen Area* atau metode *Unit Load*.
- b. Beri beban satu satuan (1 Unit  $H_B$ ) pada tempat redundant (di B) atau tumpuan yang dihilangkan dengan arah berlawanan dengan deformasi balok. Lalu hitung defleksi akibat beban satu satuan  $H_B$  ( $\delta_{HB}$ ) dengan metode *Momen Area* atau metode *Unit Load*.



$$\Delta_{HB} = \int_0^L \frac{M_x m_{XB}}{EI} dx$$



$$\delta_{BB} = \int_0^L \frac{m_{XB}^2}{EI} dx$$

Batang	Batas	$M_x$	$m_{XB}$
AB	$0 < l < x_1$	$-0.8x_1 = -0.8x$	0
BC	$0 < 2 < x_2$	$-0.8(1+x_2) = -0.8-0.8x$	$1 \cdot x_2 = x$
CD	$0 < 4 < x_3$	$-0.8 \cdot 3 + \frac{1}{2}q \cdot x_3^2 = -2.4 + 0.5375x^2$	$1(2) = 2$

$$\Delta_{HB} = \int_0^L \frac{M_x m_{XB}}{EI} dx$$

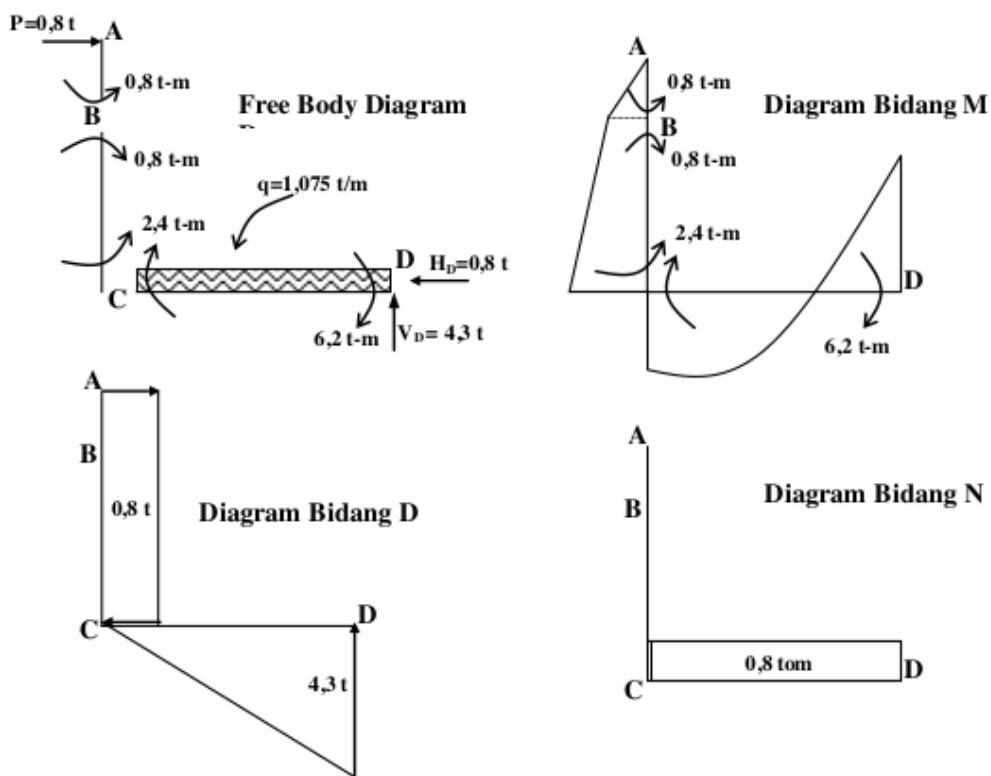
$$\Delta_{HB} = \frac{1}{EI} \int_0^1 (-0.8x)(0)dx + \frac{1}{EI} \int_0^2 (-0.8 - 0.8x)(x)dx + \frac{1}{EI} \int_0^4 (-2.4 + 0.5375x^2)(2)dx = -\frac{0}{EI}$$

$$\delta_{BB} = \int_0^L \frac{m_{XB}^2}{EI} dx \dots\dots \text{tidak usah dihitung karena } \Delta_{HB} = 0$$

4. Defleksi arah Horisontal di titik B sebenarnya = 0 (sifat konsistensi tumpuan Rol  $\sum H_B = 0$ ) dan  $\Delta_{HB} = 0$  (pada no.5) sehingga :

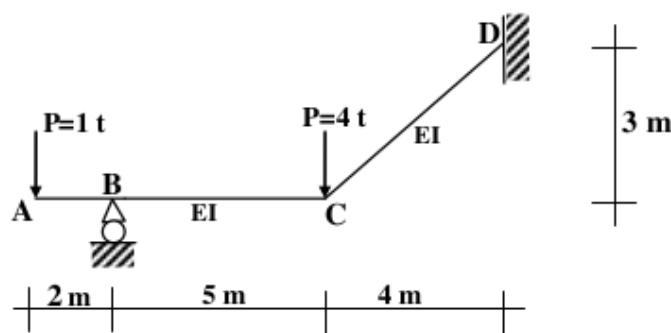
$$\Delta_{HB} - \delta_{BB} \cdot H_B = 0 \dots\dots H_B = 0$$

5. Gaya-gaya dalam selanjutnya dihitung dengan *Free Body Diagram* dan persamaan statika.



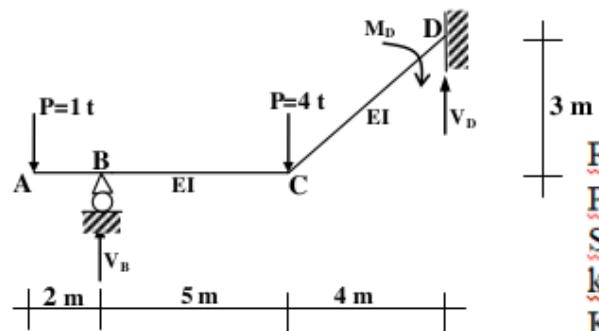
#### Contoh 4.

Diketahui sebuah portal dengan beban dan ukuran seperti gambar dibawah ini. Hitung dan gambar gaya-gaya dalam portal tersebut dengan metode *Consistant Deformation*.



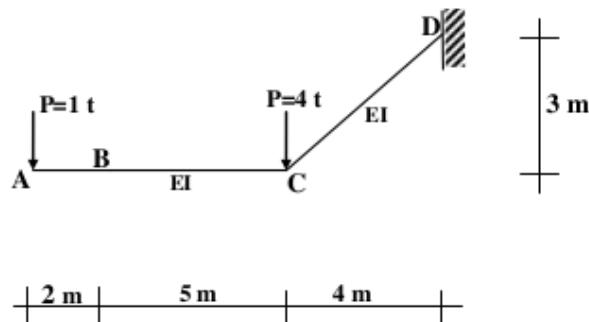
Langkah-langkah penyelesaian :

1. Tentukan STT Tk berapa



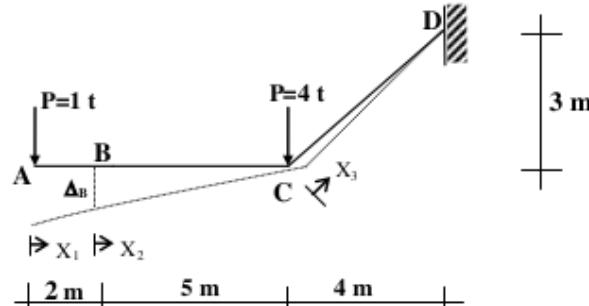
Reaksi 3 ( $V_B$ ,  $V_D$ ,  $M_D$ )  
 Persamaan 2 ( $\sum V = 0$ , dan  $\sum M = 0$ )  
 Sehingga  $3-2 = 1$  (STT TK 1)  
 kelebihan 1 reaksi  
 Kita ambil sebagai redundant =  $V_B$

2. Ubahlah struktur tersebut menjadi struktur statis tertentu dengan menghilangkan  $V_B$  dijadikan *redundant*.



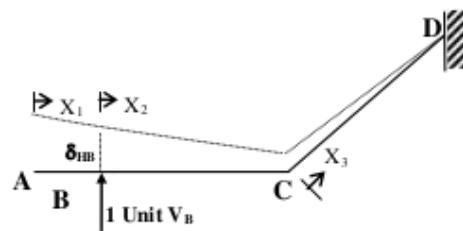
3. a. Hitung defleksi di B ( $\Delta_B$ ) akibat beban luar P dan q dengan metode *Momen Area* atau metode *Unit Load*.

- b. Beri beban satu satuan (1 Unit  $V_B$ ) pada tempat redundant (di B) atau tumpuan yang dihilangkan dengan arah berlawanan dengan deformasi balok. Lalu hitung defleksi akibat beban satu satuan  $V_B$  ( $\delta_{BB}$ ) dengan metode *Momen Area* atau metode *Unit Load*.



$$\cos \alpha = \frac{4}{5} = 0,8$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{5} = 0,6$$



$$\Delta_B = \int_0^L \frac{M_x m_{XB}}{EI} dx \quad \delta_{BB} = \int_0^L \frac{m_{XB}^2}{EI} dx$$

Batang	Batas	$M_x$	$m_{XB}$
AB	$0 < x_1 < 2$	$-1x_1 = -x$	0
BC	$0 < x_2 < 5$	$-1(2+x_2) = -2-x$	$1.x_2 = x$
CD	$0 < x_3 < 4$	$-1(7+0,8x_3) - 4(0,8x) = -7 - 4x$	$1(5+0,8x) = 5 + 0,8x$

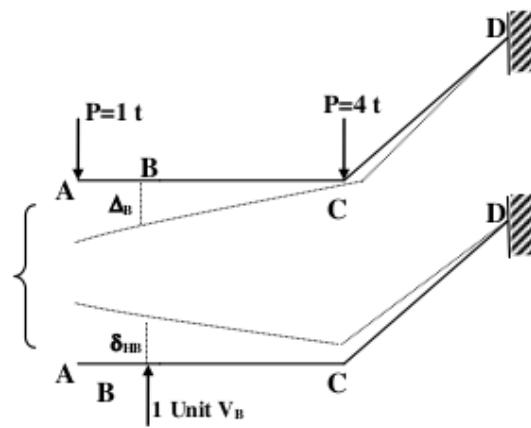
$$\Delta_B = \int_0^L \frac{M_x m_{XB}}{EI} dx$$

$$\Delta_B = \frac{1}{EI} \int_0^2 (-x)(0)dx + \frac{1}{EI} \int_0^5 (-2-x)(x)dx + \frac{1}{EI} \int_0^5 (-7-4x)(5+0,8x)dx = -\frac{695}{EI}$$

$$\delta_{BB} = \int_0^L \frac{m_{XB}^2}{EI} dx$$

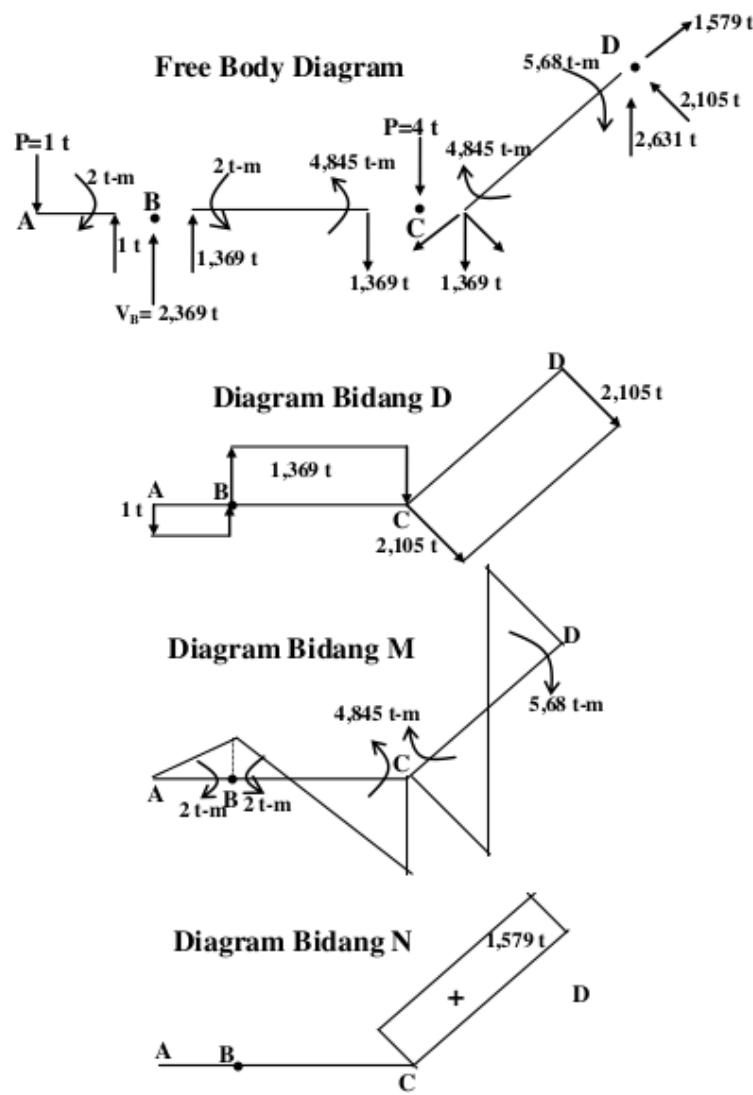
$$\delta_{BB} = \frac{1}{EI} \int_0^2 (0)^2 dx + \frac{1}{EI} \int_0^5 (x)^2 dx + \frac{1}{EI} \int_0^5 (5+0,8x)^2 dx = \frac{293,33}{EI}$$

4. Defleksi arah Vertikal di titik B sebenarnya = 0 (sifat konsistensi tumpuan Rol  $\Sigma V_B = 0$ ) sehingga:



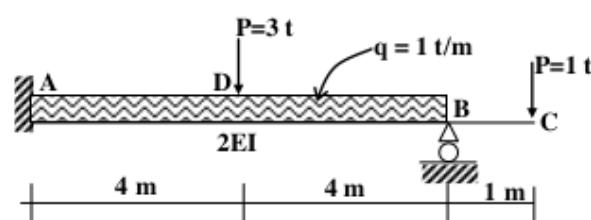
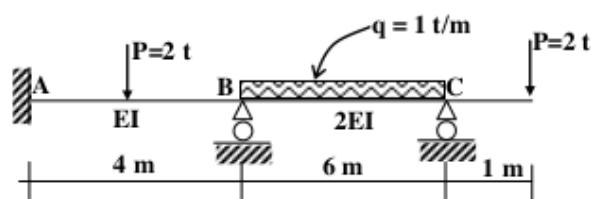
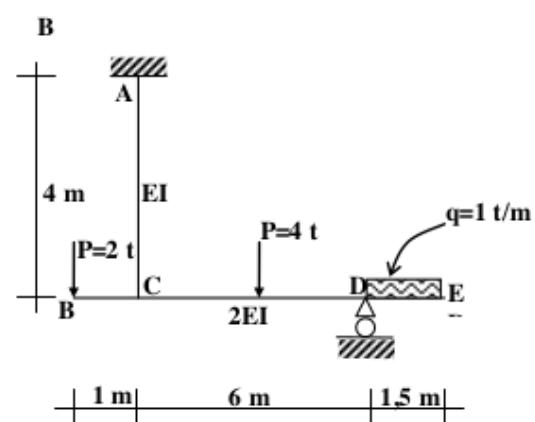
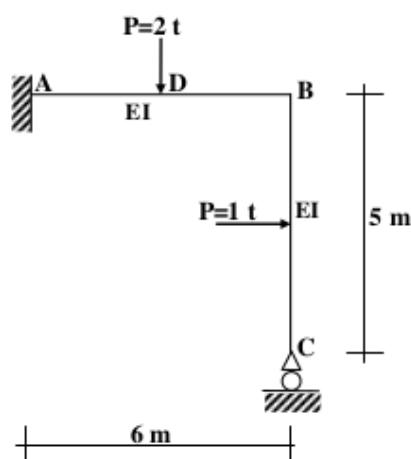
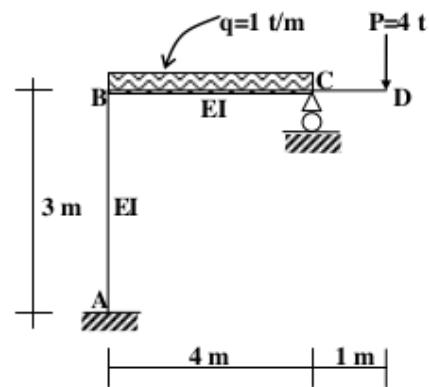
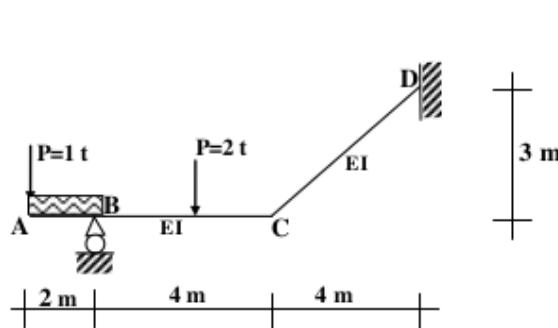
$$\Delta_B + \delta_{BB} \cdot V_B = 0 \quad V_B = \frac{\Delta_B}{\delta_{BB}} = \frac{695/EI}{293,33/EI} = 2,369t$$

5. Gaya-gaya dalam selanjutnya dihitung dengan *Free Body Diagram* dan persamaan statika.



## 2.4. Soal-Soal Latihan

Hitung dan gambar gaya-gaya dalam balok dan portal berikut dengan metode *Consistant Deformation*.



### BAB III

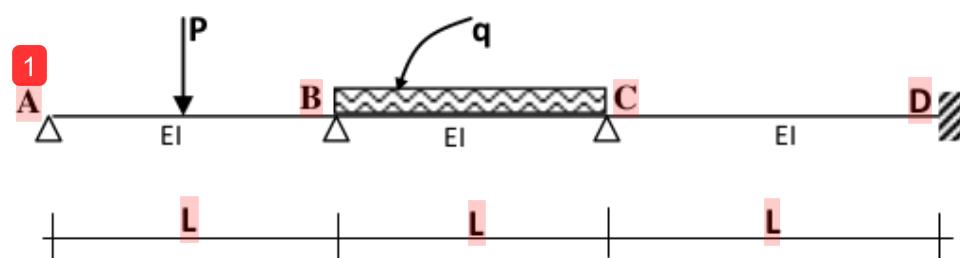
## METODE PERSAMAAN TIGA MOMEN

### 3.1. Pengertian dan Penurunan Persamaan

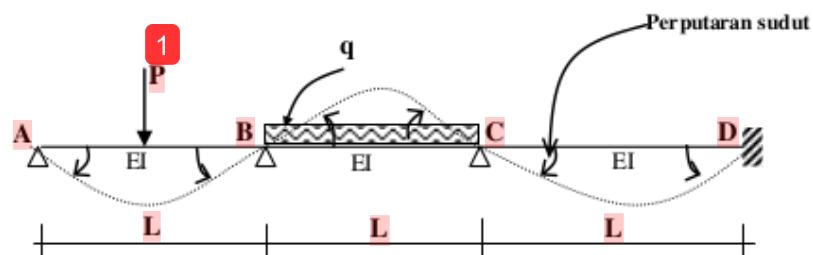
Metode Clayperon atau Metode Persamaan Tiga momen adalah metode yang mengekspresikan hubungan antara momen-momen lentur di tiga tumpuan atau lebih yang berurutan pada suatu balok atau portal kontinu yang ditujukan untuk memikul beban-beban yang bekerja pada kedua bentangan yang bersebelahan, dengan atau tanpa penurunan-penurunan tumpuan yang tidak sama. Dimana kemiringan kurva elastis atau perputaran sudut (rotasi) diujung kanan elemen sebelah kiri harus sama dengan kemiringan kurva elastis atau perputaran sudut (rotasi) diujung kiri elemen sebelah kanan.

Langkah-langkah penyelesaian Metode Clayperon

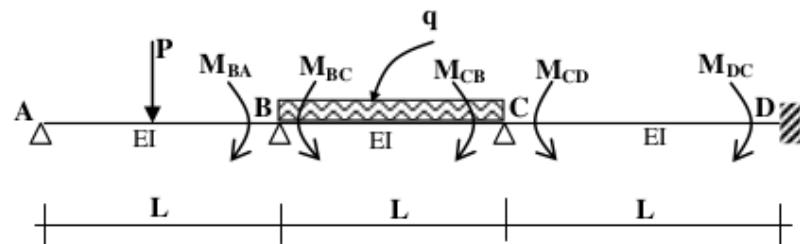
1. Tinjau konstruksi statis tak tentu dengan beban sembarang, misal:



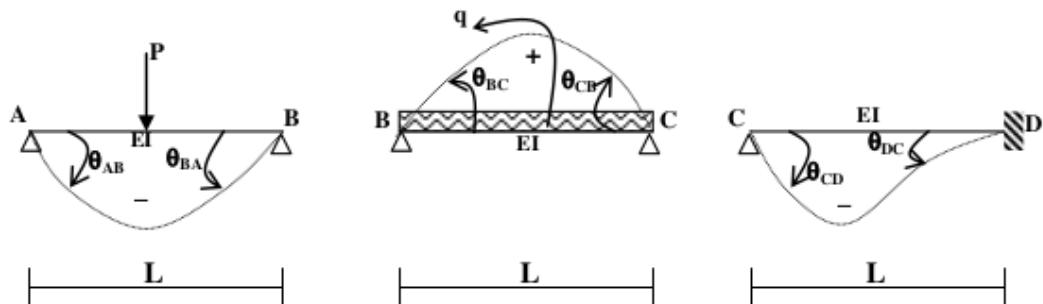
2. Anggap bahwa perputaran sudut pada satu titik simpul arahnya sama untuk semua batang yang bertemu pada titik simpul tersebut.



3. Adamaya momen-momen batang yang bekerja pada tiap batang disetiap titik simpul dalam keadaan seimbang ( $\sum M_i = 0$ )



4. Ubahlah konstruksi tersebut menjadi bagian-bagian yang dibatasi dua perletakan (titik simpul) dan hitung masing-masing rotasi titik simpul tersebut.



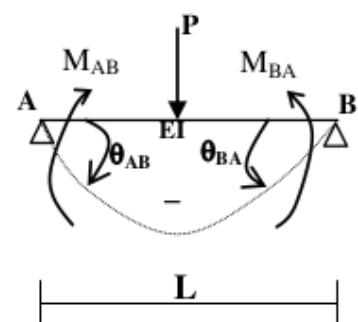
5. Tentukan bilangan atau variabel yang belum diketahui atau variabel momen pada langkah 3 seperti  $M_{BA}$ ,  $M_{BC}$ ,  $M_{CB}$ ,  $M_{CD}$ , dan  $M_{DC}$ , ada 5 variabel.

6. Tentukan persamaan yang diperlukan. Bila ada 5 variabel berarti membutuhkan 5 buah persamaan, yaitu :  $\sum M_B = 0$  ;  $\sum M_C = 0$  ;  $\theta_{BA} = \theta_{BC}$  ;  $\theta_{CB} = \theta_{CD}$  ;  $\theta_{DC} = 0$  (jepit).

RUMUS UMUM

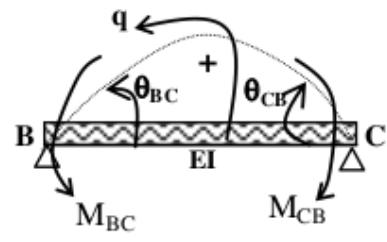
$$\theta_{AB} = -\frac{M_{AB}L}{3EI} - \frac{M_{BA}L}{6EI} + \frac{PL^2}{16EI}$$

$$\theta_{BA} = -\frac{M_{BA}L}{3EI} - \frac{M_{AB}L}{6EI} + \frac{PL^2}{16EI}$$



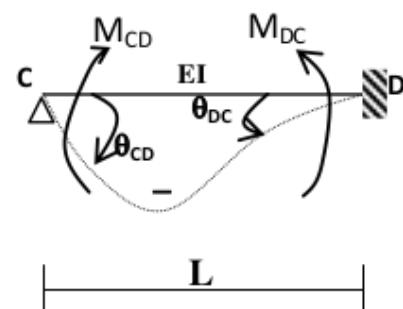
$$\theta_{BC} = \frac{M_{BC}L}{3EI} + \frac{M_{CB}L}{6EI} - \frac{qL^3}{24EI}$$

$$\theta_{CB} = \frac{M_{CB}L}{3EI} + \frac{M_{BC}L}{6EI} - \frac{qL^3}{24EI}$$



$$\theta_{CD} = -\frac{M_{CD}L}{3EI} - \frac{M_{DC}L}{6EI}$$

$$\theta_{DC} = -\frac{M_{DC}L}{3EI} - \frac{M_{CD}L}{6EI}$$



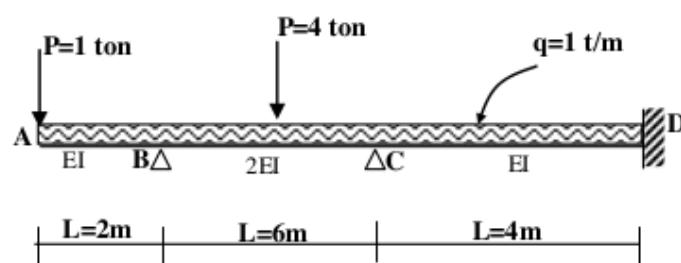
Catatan :

- Tanda positip dan negatip tergantung pada pemisalan lendutan.
- Jika pemisalan arah lendutan kebawah bertanda negatip, maka arah lendutan keatas bertanda positip.
- Jika rotasi akibat momen posistip (+) pada rumus umum, maka rotasi akibat beban luar negatip (-) pada rumus umumnya.

### 3.2. Diskusi dan Latihan Soal

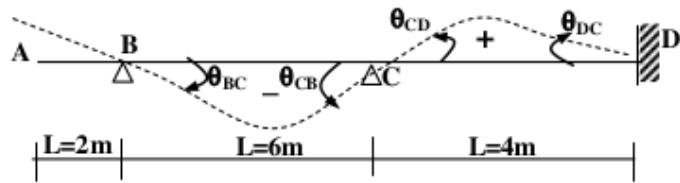
#### Contoh soal 1.

Sebuah balok menerus dengan beban merata dan beban terpusat seperti gambar dibawah. Tentukan gaya-gaya dalam balok tersebut dengan metode *Persamaan 3 Momen*.

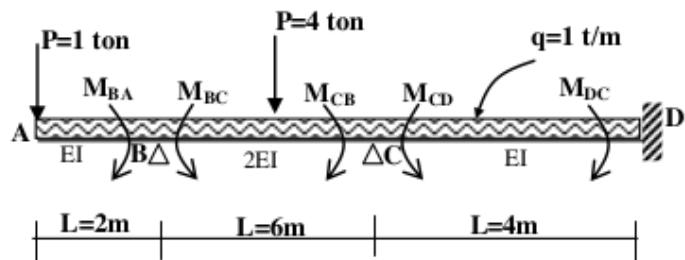


Penyelesaian:

1. Tentukan perputaran sudut rotasi.



2. Tentukan variabel momen yang akan dicari.



$$M_{BA} = M_{BC} = \frac{1}{2} \cdot q \cdot L^2 + P \cdot L = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 = 4 \text{ t-m}$$

Variabel momen yang belum diketahui / dicari adalah  $M_{CB}$ ,  $M_{CD}$ ,  $M_{DC}$

3. Tentukan persamaan yang diperlukan.

$$\Sigma MC = 0 \rightarrow M_{CB} + M_{CD} = 0 \quad \dots \dots \dots \text{Pers. I}$$

$$\theta_{DC} = 0 \quad (\text{jepit})$$

$$\theta_{CB} = \theta_{CD}$$

4. Penyelesaian persamaan yang diperlukan.

$$\theta_{DC} = 0 \rightarrow \frac{M_{DC} \cdot L}{3EI} + \frac{M_{CD} \cdot L}{6EI} - \frac{qL^3}{24EI} = 0$$

$$\frac{M_{DC} \cdot 4}{3EI} + \frac{M_{CD} \cdot 4}{6EI} - \frac{1 \cdot 4^3}{24EI} = 0$$

$$\frac{4}{3EI} M_{DC} + \frac{2}{3EI} M_{CD} - \frac{8}{3EI} = 0$$

$$4M_D + 2M_C = 8 \dots \text{ Pers. II}$$

$$\theta_{CB} = \theta_{CD} \quad \longrightarrow$$

$$-\frac{M_{CB} \cdot L}{3(2EI)} - \frac{M_{BC} \cdot L}{6(2EI)} + \frac{PL^2}{16(2EI)} + \frac{qL^3}{24(2EI)} = \frac{M_{CD} \cdot L}{3EI} + \frac{M_{DC} \cdot L}{6EI} - \frac{qL^3}{24EI}$$

$$-\frac{M_{CB}.6}{6EI} - \frac{M_{BC}.6}{12EI} + \frac{4.6^2}{32EI} + \frac{1.6^3}{48EI} = \frac{M_{CD}.4}{3EI} + \frac{M_{DC}.4}{6EI} - \frac{1.4^3}{24EI}$$

$$-\frac{M_{CB}.6}{6EI} - \frac{M_{BC}.6}{12EI} + \frac{9}{2EI} + \frac{9}{2EI} = \frac{M_{CD}.4}{3EI} + \frac{M_{DC}.4}{6EI} - \frac{8}{3EI}$$

$$-M_{CB} - \frac{1}{2}M_{BC} - \frac{4}{3}M_{CD} - \frac{2}{3}M_{DC} = -9 - \frac{8}{3}$$

$$-\frac{7}{3}M_C - \frac{1}{2}.4 - \frac{2}{3}M_D = -\frac{35}{3}$$

$$-\frac{7}{3}M_C - \frac{2}{3}M_D = -\frac{29}{3}$$

$$-7M_C - 2M_D = -29 \quad \dots \dots \dots \text{Pers. III}$$

5. Subtitusikan persamaan (I) dengan persamaan (II) :

$$2M_D + M_D = 4 \quad \dots \dots \text{dikalikan } \frac{1}{2}$$

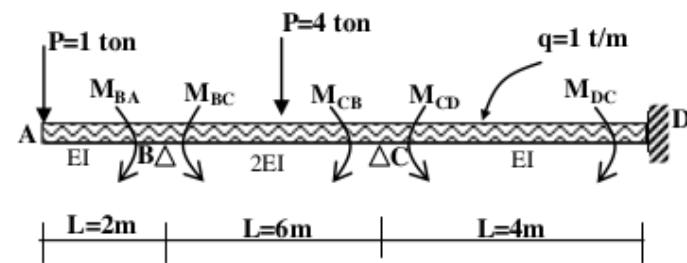
$$\begin{array}{r} -2M_D - 7M_C = -29 \\ \hline \end{array} +$$

$$-6MC = -25$$

MC = 4,1

$$MD = -0,083 \text{ t-m}$$

6. Gaya-gaya dalam selanjutnya dihitung dengan *Free Body Diagram* dan persamaan statika.

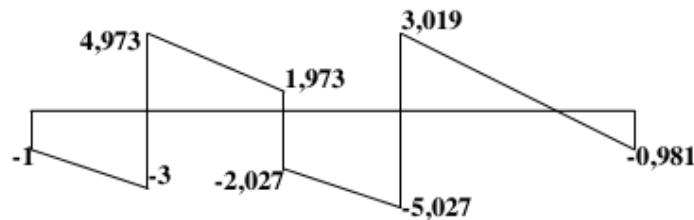


$$\begin{aligned}
 M_{BA} &= 4 \text{ t-m} & M_{BC} &= 4 \text{ t-m} & M_{CB} &= 4,16 \text{ t-m} & M_{CD} &= 4,16 \text{ t-m} & M_{DC} &= 0,083 \text{ t-m} \\
 3 \text{ t} & \uparrow & 4,973 \text{ t} & \uparrow & 5,026 \text{ t} & \uparrow & 3,019 \text{ t} & \uparrow & 0,981 \text{ t} \\
 \end{aligned}$$

Free body diagram



Bidang M (Momen)



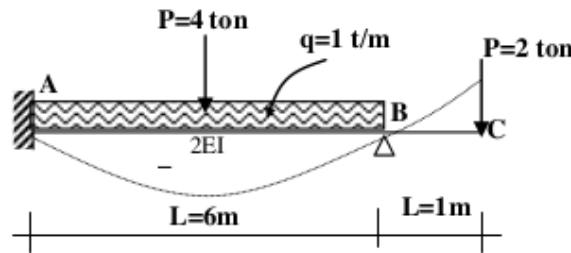
Bidang D (Geser)

Catatan:

- $\Sigma M$  pada suatu titik simpul, momen yang sudah diketahui sudah harus mempunyai pemisalan arah dan tandanya.
- Momen akibat rotasi, arah dan tandanya tidak dilihat, cukup dengan tanda pemisalan lendutan atau garis elastis.

## Contoh Soal 2.

Sebuah balok dengan beban merata dan beban terpusat seperti gambar dibawah. Tentukan gaya-gaya dalam balok tersebut dengan metode *Persamaan 3 Momen*.



1. Penyelesaian :

$$M_{BA} = M_{BC} = P \cdot L = 1 \cdot 2 = 2 \text{ t-m}$$

Variabel momen yang belum diketahui / dicari adalah  $M_{AB}$ ,  $M_{BA}$

2. Tentukan persamaan yang diperlukan.

$$\Sigma M_B = 0 \longrightarrow M_{BA} + M_{BC} = 0 \quad M_{BA} = M_{BC}$$

$$\theta_{AB} = 0 \quad (\text{jepit})$$

3. Penyelesaian persamaan yang diperlukan.

$$\theta_{AB} = 0 \longrightarrow -\frac{M_{AB} \cdot L}{3EI} - \frac{M_{BA} \cdot L}{6EI} + \frac{PL^2}{16EI} + \frac{qL^3}{24EI} = 0$$

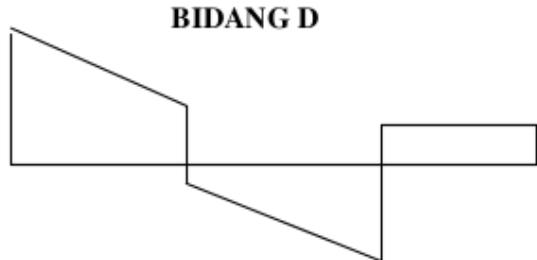
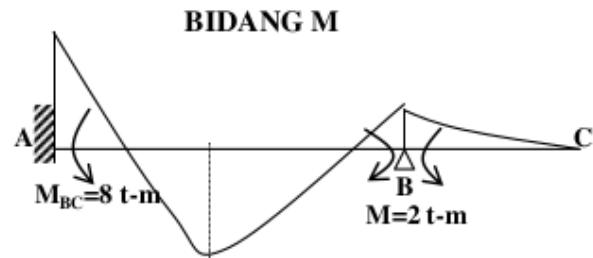
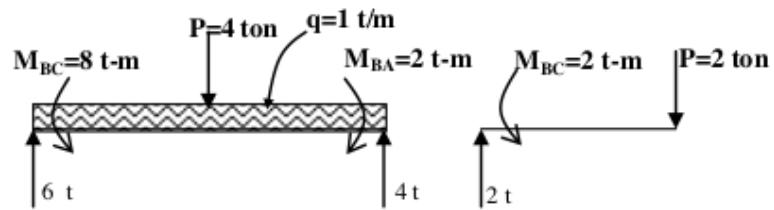
$$-\frac{M_{AB} \cdot 6}{3(2EI)} - \frac{M_{BA} \cdot 6}{6(2EI)} + \frac{4 \cdot 6^2}{16(2EI)} + \frac{1 \cdot 6^3}{24(2EI)} = 0$$

$$-M_{AB} - \frac{1}{2}M_{BA} + \frac{9}{2} + \frac{9}{2} = 0$$

$$-M_{AB} - \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{9}{2} + \frac{9}{2} = 0$$

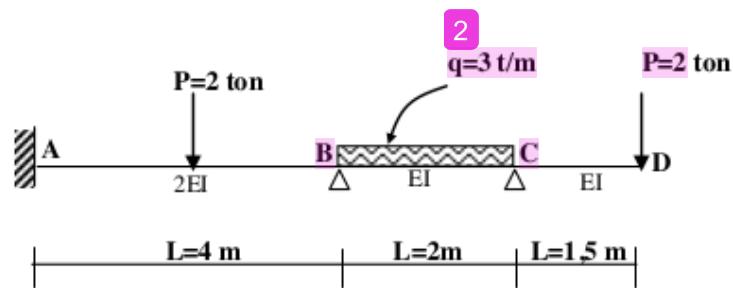
Jadi  $M_{AB} = 8 \text{ t-m}$

**FREE BODY DIAGRAM**  
Lengkapi Gambarnya



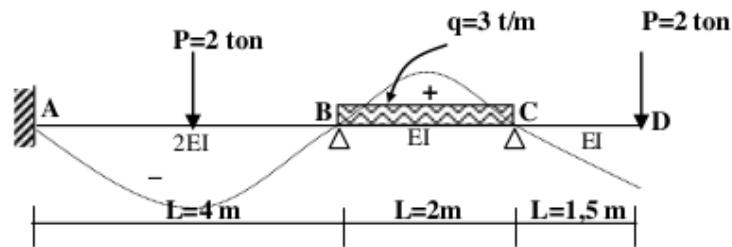
### Contoh Soal 3.

Sebuah balok menerus dengan beban merata dan beban terpusat seperti gambar dibawah. Tentukan gaya-gaya dalam balok tersebut dengan metode *Persamaan 3 Momen*.

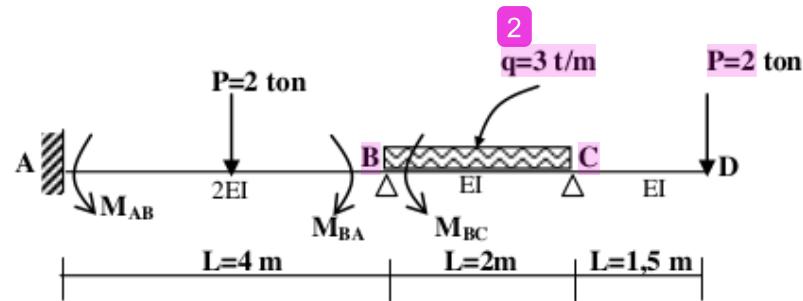


Penyelesaian:

1. Tentukan perputaran sudut rotasi



2. Tentukan variabel momen yang akan dicari.



$$M_{CD} = M_{CB} = P \cdot L = 1.5 \cdot 2 = 3 \text{ t-m}$$

Variabel momen yang belum diketahui atau dicari adalah  $M_{AB}$ ,  $M_{BA}$ ,  $M_{BC}$ .

3. Tentukan persamaan yang diperlukan.

$$\sum M_B = 0 \longrightarrow M_{BA} + M_{BC} = 0 ; M_{BA} = M_{BC} = M_B$$

$$\theta_{AB} = 0 \text{ (jepit)}$$

$$\theta_{BA} = \theta_{BC}$$

4. Penyelesaian persamaan yang diperlukan.

$$\theta_{AB} = 0 \longrightarrow -\frac{M_{AB}L}{3EI} - \frac{M_{BA}L}{6EI} + \frac{PL^2}{16EI} = 0$$

$$-\frac{M_{AB} \cdot 4}{3(2EI)} - \frac{M_{BA} \cdot 4}{6(2EI)} + \frac{2 \cdot 4^2}{16(2EI)} = 0$$

$$-\frac{2}{3EI} M_{AB} - \frac{1}{3EI} M_{BA} + \frac{1}{EI} = 0$$

$$-\frac{2}{3} M_A - \frac{1}{3} M_B = -1 \dots \text{Pers. I}$$

$$\theta_{BA} = \theta_{BC} \quad \xrightarrow{1}$$

$$-\frac{M_{BA} \cdot L}{3(2EI)} - \frac{M_{AB} \cdot L}{6(2EI)} + \frac{PL^2}{16(2EI)} = \frac{M_{BC} \cdot L}{3EI} + \frac{M_{CB} \cdot L}{6EI} - \frac{qL^3}{24EI}$$

$$-\frac{M_{BA} \cdot 4}{6EI} - \frac{M_{AB} \cdot 4}{12EI} + \frac{2 \cdot 4^2}{32EI} = \frac{M_{BC} \cdot 2}{3EI} + \frac{M_{CB} \cdot 2}{6EI} - \frac{3 \cdot 2^3}{24EI}$$

$$-\frac{2}{3} M_{BA} - \frac{1}{3} M_{AB} + 1 = \frac{2}{3} M_{BC} + \frac{3 \cdot 2}{6} - \frac{3 \cdot 2^3}{24}$$

$$-\frac{2}{3} M_{BA} - \frac{1}{3} M_{AB} + 1 = \frac{2}{3} M_{BC}$$

$$-\frac{4}{3} M_B - \frac{1}{3} M_A = -1 \dots \text{Pers. II}$$

5. Subtitusikan persamaan (I) dengan persamaan (II) :

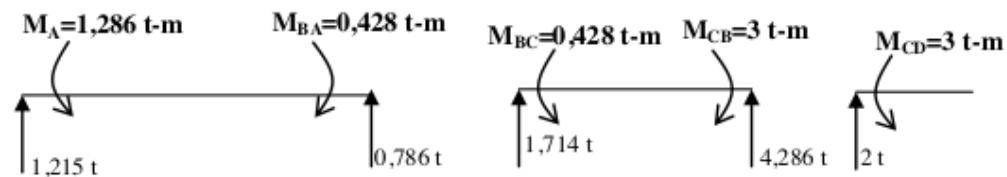
$$-\frac{1}{3} M_B - \frac{2}{3} M_A = -1 \dots \text{Pers (I) dikalikan } \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{6} M_B - \frac{1}{3} M_A &= -\frac{1}{2} \\ -\frac{4}{3} M_B - \frac{1}{3} M_A &= -1 \end{aligned} \quad \underline{\underline{1,167 M_B = 0,5}}$$

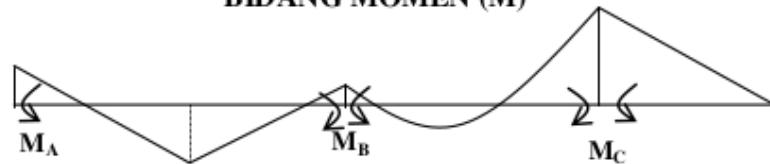
$$M_B = 0,428 \text{ t-m}$$

$$M_A = 1,286 \text{ t-m}$$

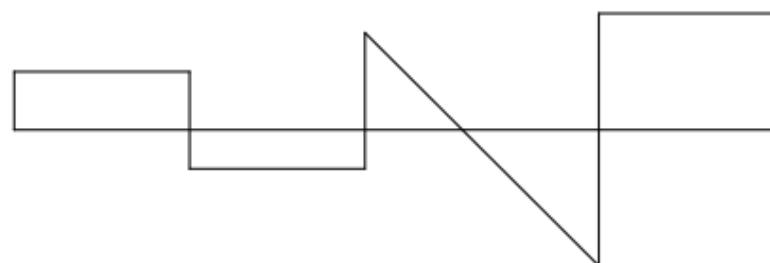
**FREE BODY DIAGRAM**  
**Lengkapi Gambarnya**



**BIDANG MOMEN (M)**

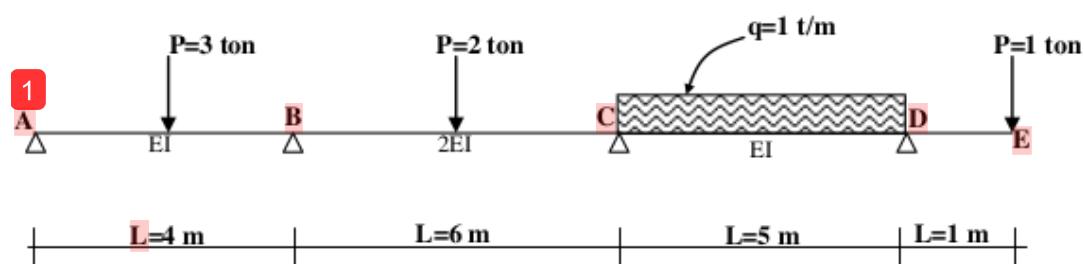


**BIDANG D**



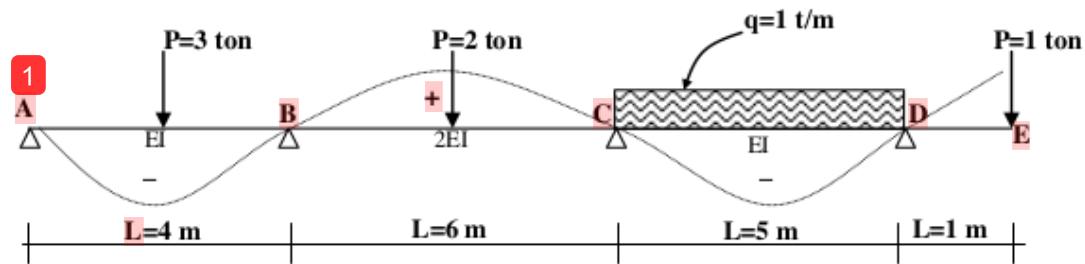
**Contoh soal 4.**

Sebuah balok menerus dengan beban merata dan beban terpusat seperti gambar dibawah. Tentukan gaya-gaya dalam balok tersebut dengan metode *Persamaan 3 Momen*.

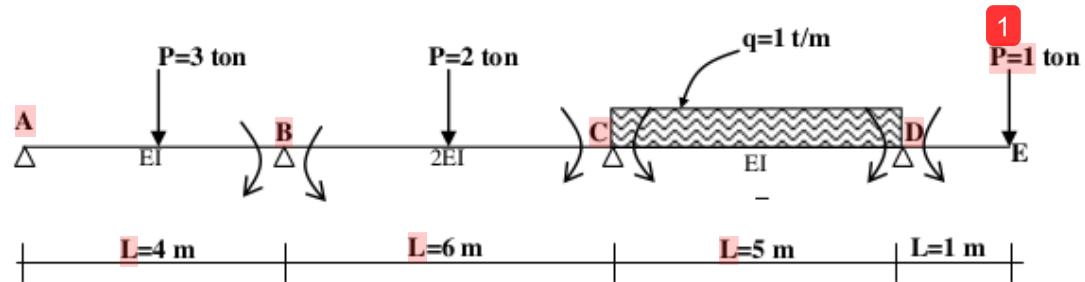


Penyelesaian:

1. Tentukan perputaran sudut rotasi



2. Tentukan variabel momen yang akan dicari.



$$M_{DE} = M_{DC} = MD = P \cdot L = 1 \cdot 1 = 1 \text{ t-m}$$

Variabel momen yang belum diketahui/dicari adalah  $M_{BA}$ ,  $M_{BC}$ ,  $M_{CB}$ ,  $M_{CD}$

3. Tentukan persamaan yang diperlukan.

$$\sum M_B = 0 \longrightarrow M_{BA} + M_{BC} = 0 ; M_{BA} = M_{BC} = M_B$$

$$\sum M_C = 0 \longrightarrow M_{CB} + M_{CD} = 0 ; M_{CB} = M_{CD} = M_C$$

$$\theta_{BA} = \theta_{BC}$$

$$\theta_{CB} = \theta_{CD}$$

4. Penyelesaian persamaan yang diperlukan.

$$\theta_{BA} = \theta_{BC} \xrightarrow{1}$$

$$-\frac{M_{BA} \cdot L}{3EI} - \frac{M_{AB} \cdot L}{6EI} + \frac{PL^2}{16EI} = \frac{M_{BC} \cdot L}{3(2EI)} + \frac{M_{CB} \cdot L}{6(2EI)} - \frac{PL^2}{16(2EI)}$$

$$-\frac{M_{BA} \cdot 4}{3EI} - \frac{0.4}{6EI} + \frac{3.4^2}{16EI} = \frac{M_{BC} \cdot 6}{6EI} + \frac{M_{CB} \cdot 6}{12EI} - \frac{2.6^2}{32EI}$$

$$-\frac{4}{3}M_{BA} + 3 = M_{BC} + \frac{1}{2}M_{CB} - \frac{9}{4}$$

$$-\frac{7}{3}M_B - \frac{1}{2}M_C = -\frac{12}{4} - \frac{9}{4}$$

$$-2,33M_B - 0,5M_C = -5,25 \quad \rightarrow \text{Pers. I}$$

$$\theta_{CB} = \theta_{CD} \quad \rightarrow$$

$$\frac{M_{CB} \cdot L}{3(2EI)} + \frac{M_{BC} \cdot L}{6(2EI)} - \frac{PL^2}{16(2EI)} = -\frac{M_{CD} \cdot L}{3EI} - \frac{M_{DC} \cdot L}{6EI} + \frac{qL^3}{24EI}$$

$$\frac{M_{CB} \cdot 6}{6EI} + \frac{M_{BC} \cdot 6}{12EI} - \frac{2.6^2}{32EI} = -\frac{M_{CD} \cdot 5}{3EI} - \frac{(1) \cdot 5}{6EI} + \frac{1.5^3}{24EI}$$

$$\frac{M_{CB}}{EI} + \frac{M_{BC}}{2EI} - \frac{9}{4EI} = -\frac{M_{CD} \cdot 5}{3EI} - \frac{5}{6EI} + 5 \frac{5}{24EI}$$

$$0,5M_B + 2,667M_C = 6,625 \quad \dots \text{Pers. II}$$

5. Subtitusikan persamaan (I) dengan persamaan (II):

$$-2,33M_B - 0,5M_C = -5,25 \quad \dots \text{Pers (I)}$$

$$0,5M_B + 2,667M_C = 6,625 \quad \dots \text{Pers (II) dibagi } 5,33$$

$$-2,33M_B - 0,5M_C = -5,25$$

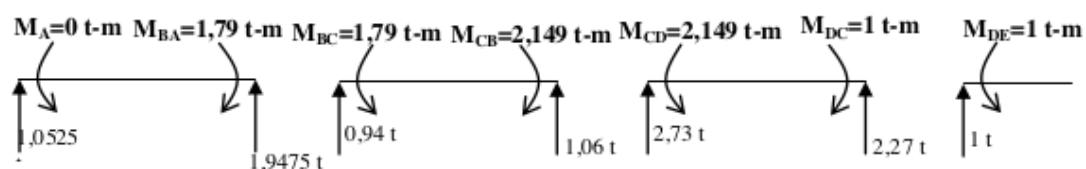
$$\underline{0,0937M_B + 0,5M_C = 1,242} \quad +$$

$$-2,239 M_B = -4,008$$

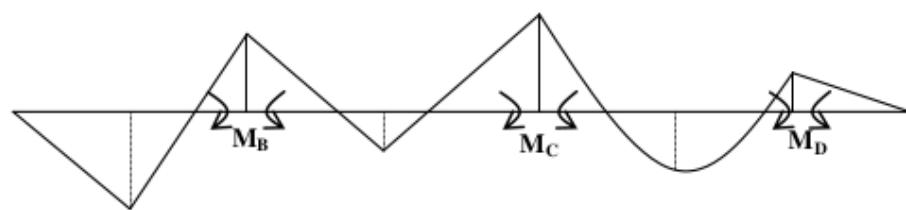
$$M_B = 1,79 \text{ t-m}$$

$$M_C = 2,149 \text{ t-m}$$

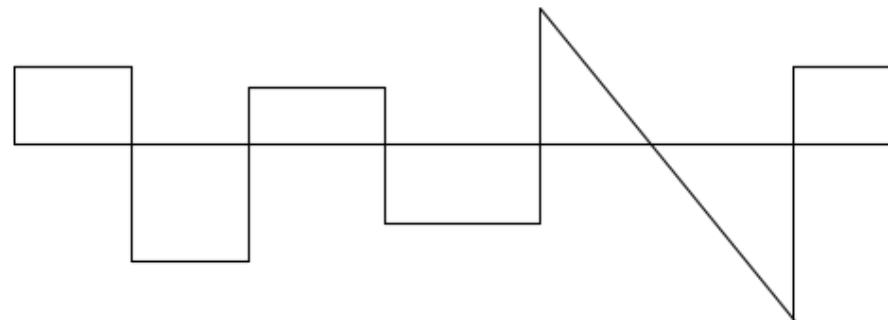
**FREE BODY DIAGRAM  
Lengkapi Gambarnya**



**BIDANG MOMEN (M)**

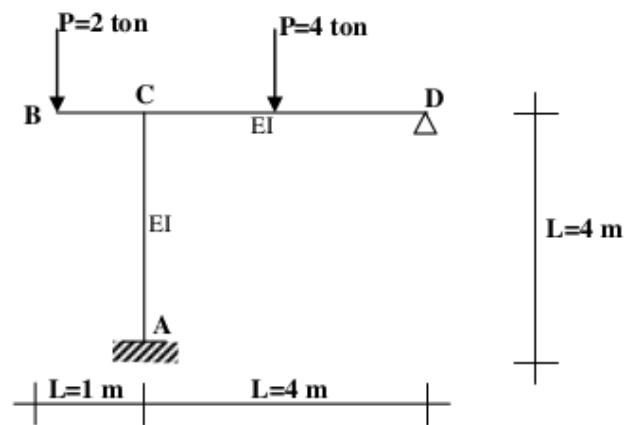


**BIDANG D**



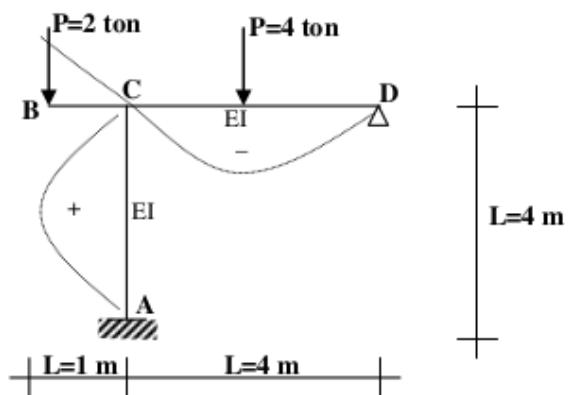
### Conoh soal 5.

Sebuah portal dengan beban terpusat seperti gambar dibawah ini. Tentukan gaya-gaya dalam portal tersebut dengan metode *Persamaan 3 Momen*.

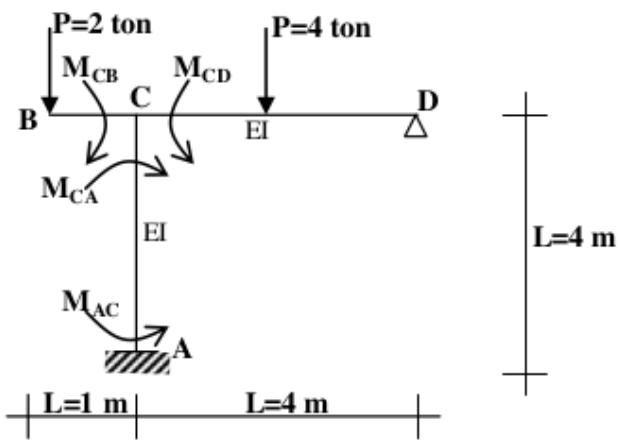


Penyelesaian:

1. Tentukan perputaran sudut rotasi



2. Tentukan variabel momen yang akan dicari.



$$M_{CB} = P \cdot L = 2 \cdot 1 = 2 \text{ t-m}$$

Variabel momen yang belum diketahui/dicari adalah  $M_{AC}$ ,  $M_{CA}$ ,  $M_{CD}$

3. Tentukan persamaan yang diperlukan.

$$\sum M_C = 0 \rightarrow M_{CA} + M_{CB} + M_{CD} = 0 ; M_{CD} - M_{CB} - M_{CA} = 0$$

$$M_{CD} - M_{CA} - 2 = 0 ; M_{CD} - M_{CA} = 2 \quad \dots \dots \text{Pers (I)}$$

$$\theta_{AC} = 0 \quad (\text{jepit})$$

$$\theta_{CA} = \theta_{CD}$$

4. Penyelesaian persamaan yang diperlukan.

$$\theta_{AC} = 0 \rightarrow \frac{M_{AC} \cdot L}{3EI} + \frac{M_{CA} \cdot L}{6EI} = 0$$

$$\frac{M_{AC} \cdot 4}{3EI} + \frac{M_{CA} \cdot 4}{6EI} = 0$$

$$\frac{4}{3} M_{AC} + \frac{2}{3} M_{CA} = 0$$

$$4M_{AC} + 2M_{CA} = 0$$

$$2M_{AC} + M_{CA} = 0 \quad \dots\dots\dots \text{Pers II}$$

$$\theta_{CA} = \theta_{CD} \rightarrow \frac{M_{CA} \cdot L}{3EI} + \frac{M_{AC} \cdot L}{6EI} = -\frac{M_{CD} \cdot L}{3EI} - \frac{M_{DC} \cdot L}{6EI} + \frac{PL^2}{16EI}$$

$$\frac{M_{CA} \cdot 4}{3EI} + \frac{M_{AC} \cdot 4}{6EI} = -\frac{M_{CD} \cdot 4}{3EI} - \frac{0.4}{6EI} + \frac{4 \cdot 4^2}{16EI}$$

$$\frac{4}{3}M_{CA} + \frac{2}{3}M_{AC} + \frac{4}{3}M_{CD} = 4$$

$$4M_{CA} + 2M_{AC} + 4M_{CD} = 12$$

$$2M_{CA} + M_{AC} + 2M_{CD} = 6 \quad \dots\dots\dots \text{Pers. III}$$

5. Subtitusi persamaan.

$$M_{CD} - M_{CA} = 2 \quad \text{Pers (I)}$$

$$2M_{AC} + M_{CA} = 0 \quad \text{Pers (II)}$$

$$2M_{CA} + M_{AC} + 2M_{CD} = 6 \quad \text{Pers (III)}$$

Subtitusikan persamaan II & III :

$$2 M_{CA} - (-0,5 M_{CA}) + 2 M_{CD} = 6$$

$$2 MCA - 0,5 MCA + 2 MCD = 6$$

$$1,5 MCA + 2 MCD = 6 \quad \dots\dots\dots \text{Pers. IV}$$

Subtitusikan persamaan I & IV :

$$M_{CD} - M_{CA} = 2 \quad \dots\dots \text{dikalikan 2}$$

$$- 2 M_{CA} + 2 M_{CD} = 4$$

$$\underline{1,5 M_{CA} + 2 M_{CD} = 6} \quad -$$

$$- 3,5 M_{CA} = - 2$$

$$M_{CA} = 0,571 \text{ t-m}$$

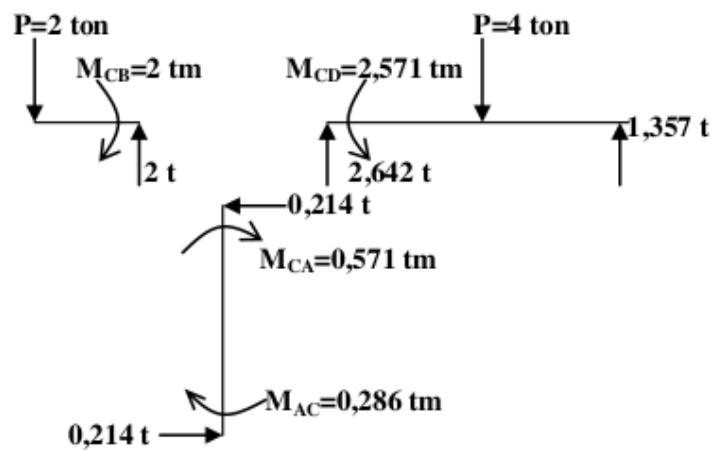
$$M_{AC} = - 0,286 \text{ t-m}$$

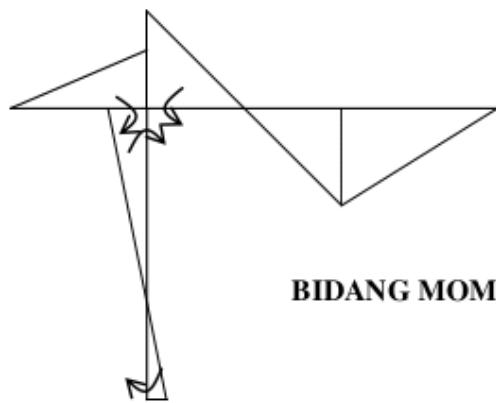
$$M_{CD} = 2,571 \text{ t-m}$$

Catatan:

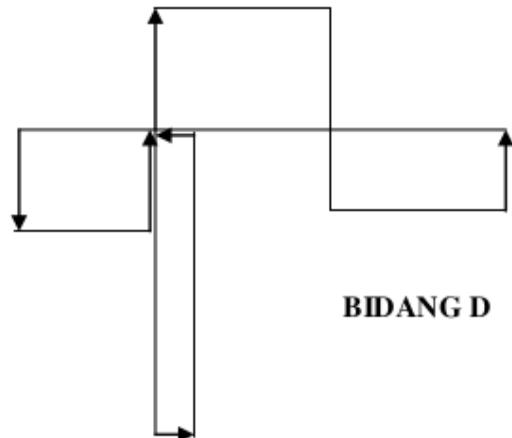
- Asumsi arah momen positip/negatif pada titik simpul sesuai dengan anggapan sendiri, jika pemisalan awal searah jarum jam (+) dan hasil perhitungan angkanya positip maka arah betul, jika hasil perhitungan negatif maka arah momen berlawanan arah dengan pemisalan.
- Untuk momen yang lain mengikuti pemisalan awal sesuai hasil perhitungannya.

**FREE BODY DIAGRAM**  
**Lengkapi Gambarnya**





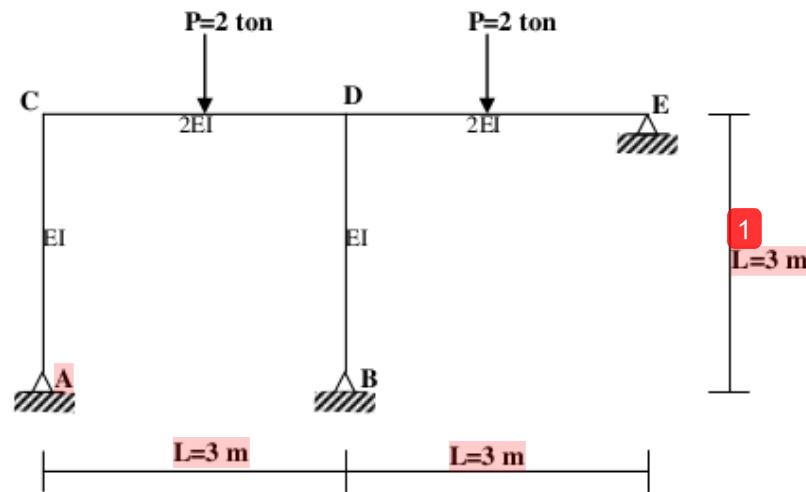
BIDANG MOMEN (M)



BIDANG D

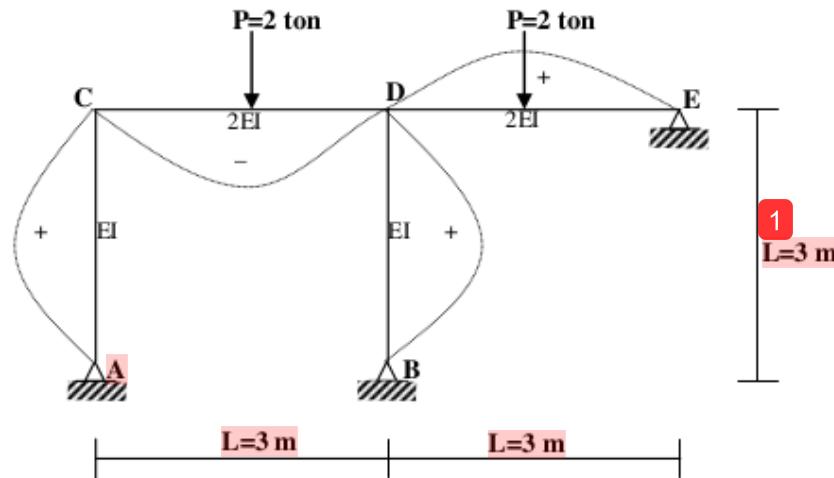
### Contoh soal 6.

Sebuah portal dengan beban terpusat seperti gambar dibawah ini. Tentukan gaya-gaya dalam portal tersebut dengan metode *Persamaan 3 Momen*.

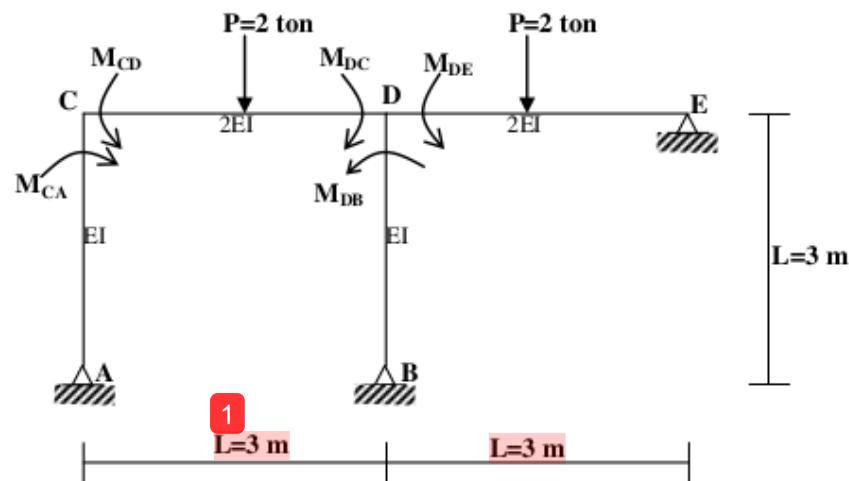


Penyelesaian:

1. Tentukan perputaran sudut rotasi



2. Tentukan variabel momen yang akan dicari.



Variabel momen yang belum diketahui/dicari adalah  $M_{CA}$ ,  $M_{CD}$ ,  $M_{DC}$ ,  $M_{DB}$ , dan  $M_{DE}$

3. Tentukan persamaan yang diperlukan (ada 5 persamaan).

$$(a). \theta_{CA} = \theta_{CD}$$

$$(b). \theta_{DC} = \theta_{DB}$$

$$(c). \theta_{DE} = \theta_{DB}$$

$$(d). \sum M_D = 0 \quad \rightarrow \quad M_{DC} - M_{DB} - M_{DE} = 0$$

$$(e). \sum M_C = 0 \quad \rightarrow \quad M_{CA} - M_{Cd} = 0$$

4. Penyelesaian persamaan yang diperlukan.

$$(a). \theta_{CA} = \theta_{CD} \rightarrow \frac{M_{CA} \cdot L}{3EI} + \frac{M_{AC} \cdot L}{6EI} = -\frac{M_{CD} \cdot L}{3(2EI)} - \frac{M_{DC} \cdot L}{6(2EI)} + \frac{PL^2}{16(2EI)}$$

$$\frac{M_{CA} \cdot 3}{3EI} + \frac{0.3}{6EI} = -\frac{M_{CD} \cdot 3}{6EI} - \frac{M_{DC} \cdot 3}{12EI} + \frac{2 \cdot 3^2}{32EI}$$

$$M_{CA} = -\frac{1}{2}M_{CD} - \frac{1}{4}M_{DC} + 0,5625$$

$$1,5M_C + 0,25M_{DC} = 0,5625$$

$$M_C = 0,375 - 0,167 M_{DC} \quad \dots \dots \text{ Pers (I)}$$

$$(b). \theta_{DC} = \theta_{DB} \rightarrow -\frac{M_{DC} \cdot L}{3(2EI)} - \frac{M_{CD} \cdot L}{6(2EI)} + \frac{PL^2}{16(2EI)} = \frac{M_{DB} \cdot L}{3EI} + \frac{M_{BD} \cdot L}{6EI}$$

$$-\frac{M_{DC} \cdot 3}{6EI} - \frac{M_{CD} \cdot 3}{12EI} + \frac{2 \cdot 3^2}{32EI} = \frac{M_{DB} \cdot 3}{3EI} - \frac{0.3}{6EI}$$

$$-\frac{1}{2}M_{DC} - \frac{1}{4}M_{CD} - M_{DB} = -0,5625$$

$$0,25M_C + 0,5M_{DC} + M_{DB} = 0,5625 \quad \dots \dots \text{ Pers (II)}$$

$$(c). \theta_{DE} = \theta_{DB} \rightarrow +\frac{M_{DE} \cdot L}{3(2EI)} + \frac{M_{ED} \cdot L}{6(2EI)} - \frac{PL^2}{16(2EI)} = \frac{M_{DB} \cdot L}{3EI} + \frac{M_{BD} \cdot L}{6EI}$$

$$\frac{M_{DE} \cdot 3}{6EI} + \frac{0.3}{12EI} - \frac{2 \cdot 3^2}{32EI} = \frac{M_{DB} \cdot 3}{3EI} + \frac{0.3}{6EI}$$

$$\frac{1}{2}M_{DE} - 0,5625 = M_{DB}$$

$$M_{DB} = 0,5M_{DE} - 0,5625 \quad \dots \text{Pers (III)}$$

$$(d). \sum M_D = 0 \quad \longrightarrow \quad M_{DC} - M_D - M_{DE} = 0 \quad \dots \text{Pers (IV)}$$

5. Subtitusi persamaan:

$$1,5M_C + 0,25M_{DC} = 0,5625 \quad \dots \text{Pers (I)}$$

$$M_C = 0,375 - 0,167 M_{DC}$$

$$0,25M_C + 0,5M_{DC} + M_{DB} = 0,5625 \quad \dots \text{Pers (II)}$$

$$M_{DB} = 0,5M_{DE} - 0,5625 \quad \dots \text{Pers (III)}$$

$$M_{DE} = 2 M_{DB} + 1,125$$

$$M_{DC} - M_{DB} - M_{DE} = 0 \quad \dots \text{Pers (IV)}$$

Subtitusikan persamaan I & II :

$$0,25(0,375 - 0,1667 M_{DC}) + 0,5 M_{DC} + M_{DB} = 0,5625$$

$$0,4583 M_{DC} + M_{DB} = 0,46875 \quad \dots \text{(A)}$$

Subtitusikan persamaan III & IV :

$$M_{DC} - M_{DB} - (2 M_{DB} + 1,125) = 0$$

$$M_{DC} - M_{DB} - 2 M_{DB} = 1,125 \quad \dots \text{(B)}$$

Subtitusikan persamaan (A) & (B) :

$$0,4583 M_{DC} + M_{DB} = 0,46875 \quad \dots \text{dibagi } 0,4583$$

$$M_{DC} - 3 M_{DB} = 1,125$$

$$\underline{M_{DC} + 2,182 M_{DB} = 1,125} \quad -$$

$$- 5,182 M_{DB} = 0,1022$$

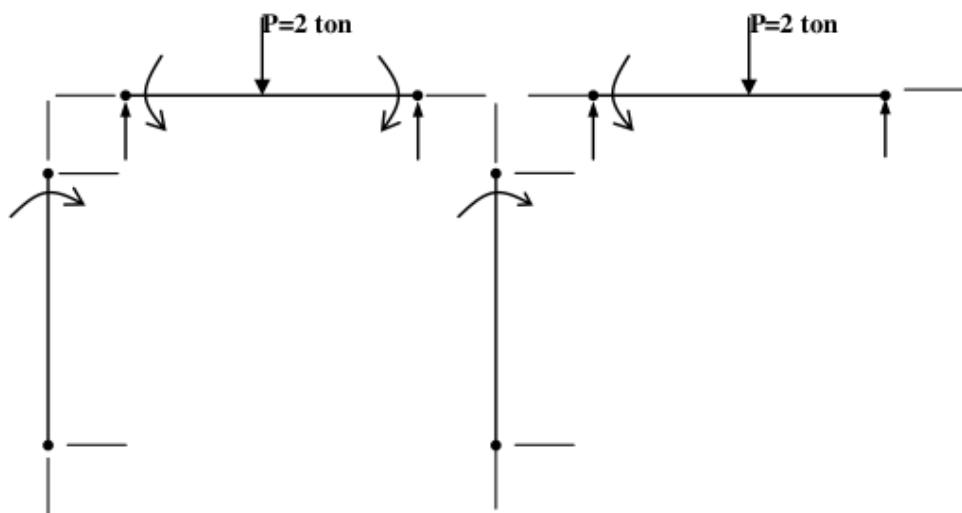
$M_{DB} = - 0,01972 \text{ t-m}$  (arah berlawanan dg pemisalan)

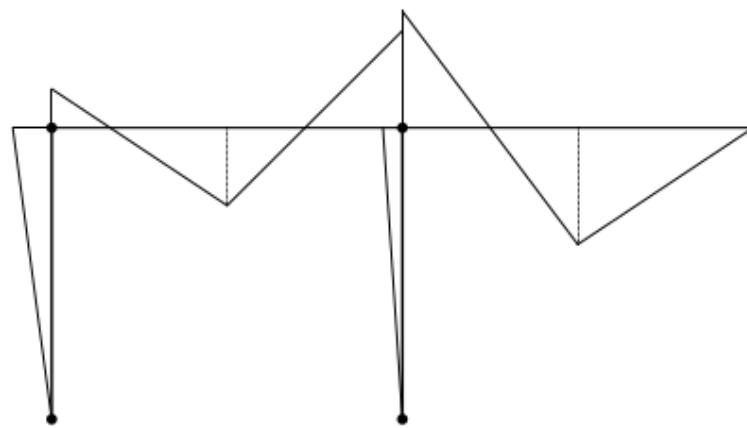
$M_{DC} = 1,06583 \text{ t-m}$

$M_{DE} = 1,08556 \text{ t-m}$

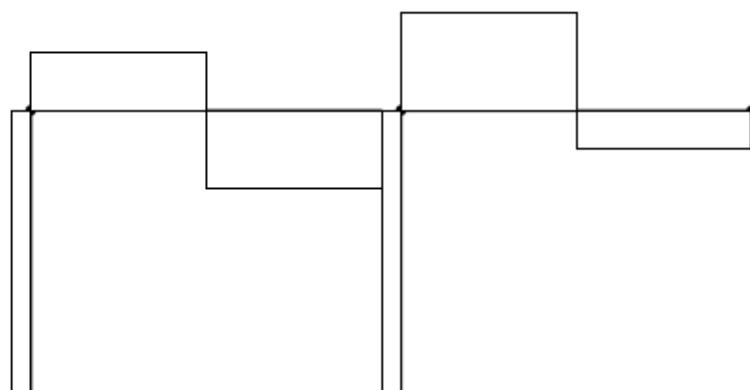
$M_c = 0,19736 \text{ t-m}$

**FREE BODY DIAGRAM**  
Lengkapi Gambarnya





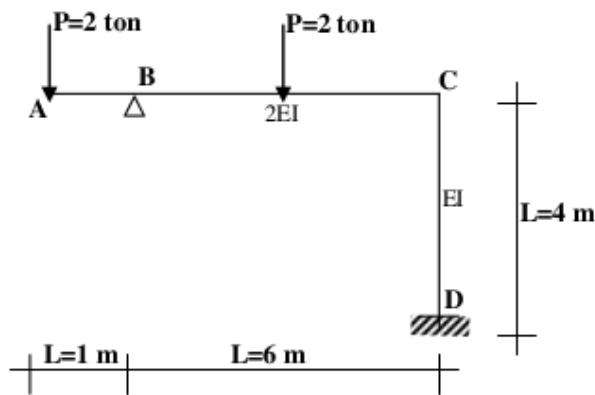
**DIAGRAM MOMEN**



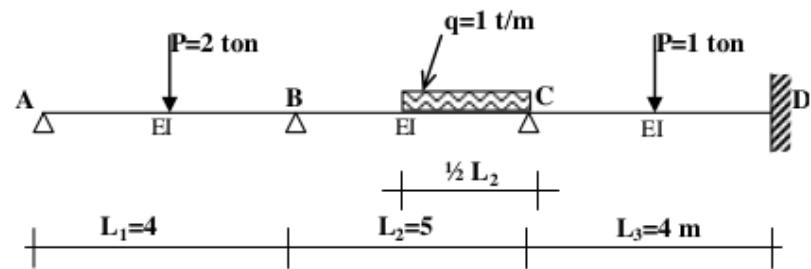
**BIDANG D**

### 3.3. Soal-Soal Latihan

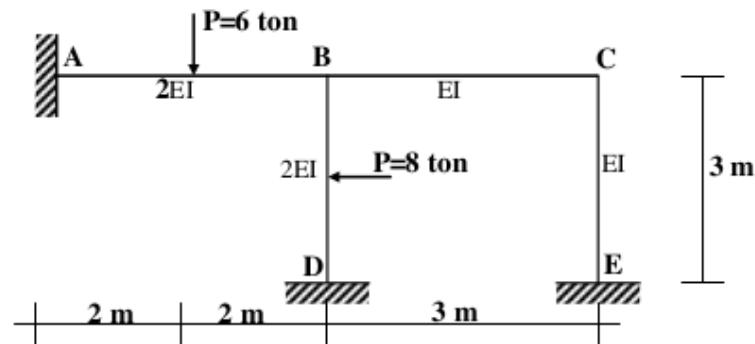
1. Sebuah portal dengan beban terpusat seperti gambar dibawah ini. Tentukan gaya-gaya dalam portal tersebut dengan metode *Persamaan 3 Momen*.



2. Sebuah balok dengan beban seperti gambar dibawah ini. Tentukan gaya-gaya dalam balok tersebut dengan metode *Persamaan 3 Momen*.



3. Sebuah portal dengan beban seperti gambar dibawah ini. Tentukan gaya-gaya dalam portal tersebut dengan metode *Persamaan 3 Momen*.

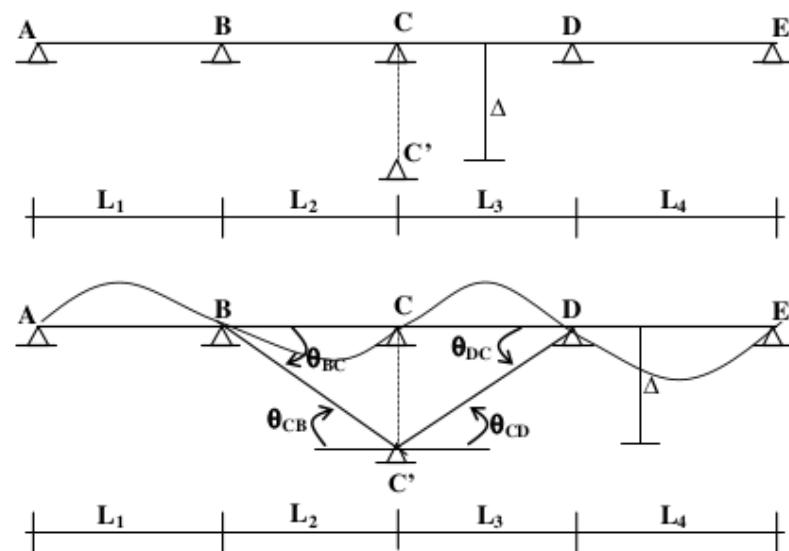


## BAB IV

### METODE CLAPEYRON PADA KONSTRUKSI BERGOYANG

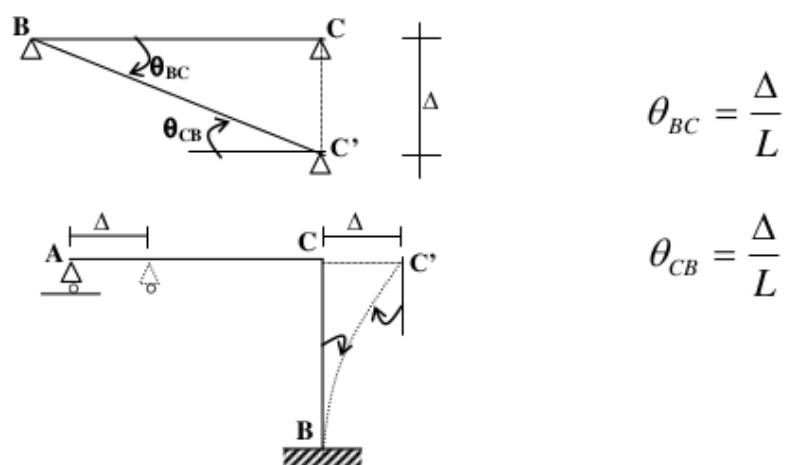
#### 4.1. Penurunan rumus

Jika salah satu perletakan mengalami penurunan (pada balok) atau pergoyangan (pada portal), maka akan timbul tambahan rotasi akibat perpindahan sejauh  $\Delta$  sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 4.1.



Gambar 4.1. Perpindahan  $\Delta$  titik simpul akibat pergoyangan

Secara umum pengaruh perpindahan sejauh  $\Delta$  pada balok dan portal ditunjukkan pada Gambar 4.2 berikut:



Gambar 4.2. Besar rotasi  $\theta$  akibat pergoyangan

Jika titik C pada Gambar 4.1 dan Gambar 4.2 turun sejauh  $\Delta$ , maka hanya batang BC dan CD yang berpengaruh, dan rotasi akibat  $\Delta = \theta(\Delta)$  harus ditambahkan atau dikurangkan pada perhitungan atau pembahasan terdahulu (pada rumus umum), sehingga perhitungan rotasi akibat perpindahan  $\Delta$  menjadi seperti persamaan berikut:

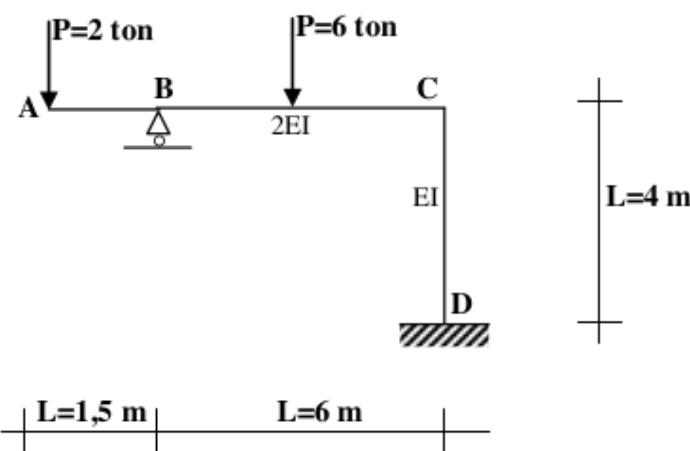
$$\theta_{BC} = -\frac{M_{BC}L}{3EI} - \frac{M_{CB}L}{6EI} + \frac{\Delta}{L} \quad \theta_{CD} = +\frac{M_{CD}L}{3EI} + \frac{M_{DC}L}{6EI} + \frac{\Delta}{L}$$

$$\theta_{CB} = -\frac{M_{CB}L}{3EI} - \frac{M_{BC}L}{6EI} - \frac{\Delta}{L} \quad \theta_{DC} = +\frac{M_{DC}L}{3EI} + \frac{M_{CD}L}{6EI} - \frac{\Delta}{L}$$

## 4.2. Diskusi dan Latihan Soal

### Contoh soal 1.

Sebuah portal dengan beban dan ukuran seperti gambar dibawah ini, tentukan gaya-gaya dalam portal tersebut dengan metode *Clayperon* atau *Persamaan 3 Momen*.



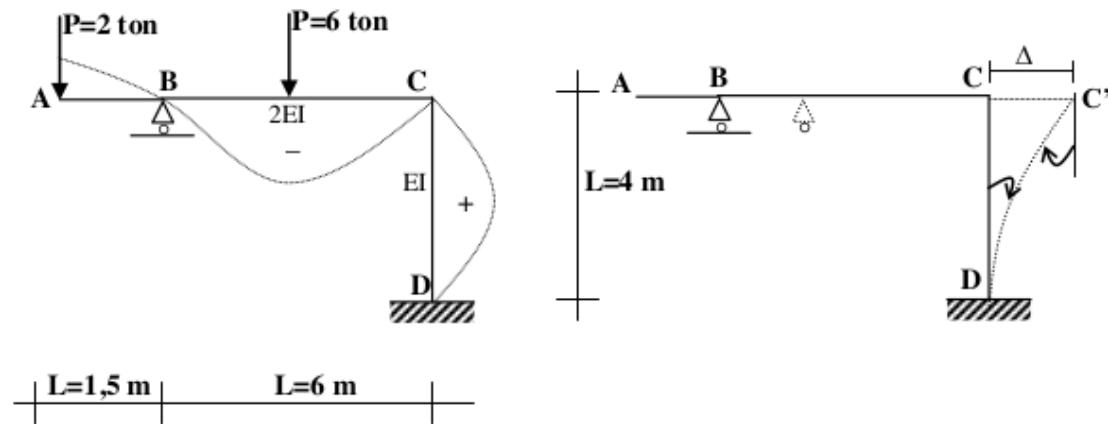
Penyelesaian :

- Chek apakah portal ada pergoyangan atau tidak.

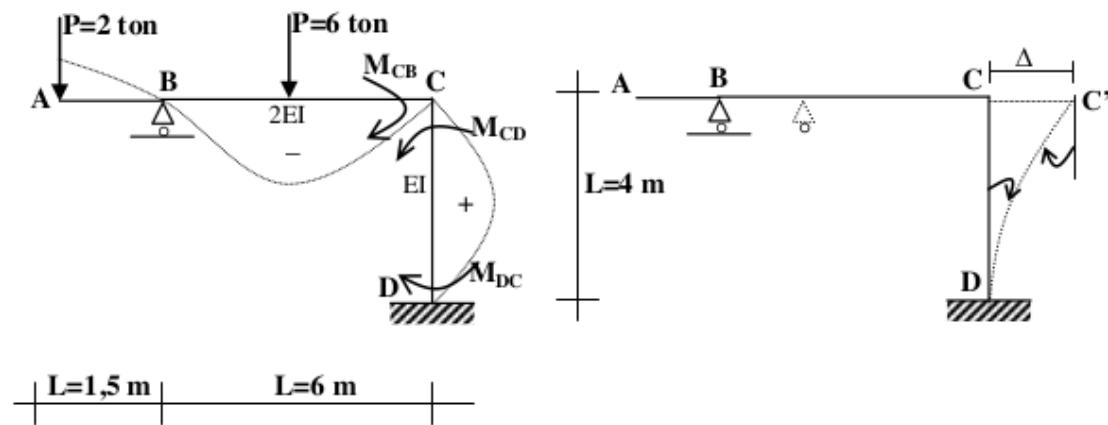
$$N = 2j - (m + 2f + 2h + r)$$

$$N = 2.3 - (2 + 2.1 + 2.0 + 1) = 1 \quad \dots \text{Portal bergoyang}$$

2. Tentukan perputaran sudut rotasi atau garis elastis dan perpindahan akibat goyang.



3. Tentukan variabel momen yang akan dicari.



$$M_{BA} = P \cdot L = 2 \cdot 1.5 = 3 \text{ t-m}$$

Variabel dan momen yang belum diketahui/dicari adalah  $M_{CB}$ ,  $M_{CD}$ ,  $M_{DC}$ , dan  $\Delta$

4. Tentukan persamaan yang diperlukan (ada 4 persamaan).

$$(a). \sum M_C = 0$$

$$(b). \theta_{DC} = 0$$

$$(c). \theta_{CB} = \theta_{CD}$$

$$(d). \sum H_D = 0$$

5. Penyelesaian persamaan yang diperlukan.

$$(a). \sum M_C = 0 \rightarrow M_{CB} - M_{CD} = 0 ; \quad M_{CB} = M_{CD}$$

$$(b). \theta_{DC} = 0 \rightarrow \frac{M_{DC} \cdot L}{3EI} + \frac{M_{CD} \cdot L}{6EI} + \frac{\Delta}{L} = 0$$

$$\frac{M_{DC} \cdot 4}{3EI} + \frac{M_{CD} \cdot 4}{6EI} + \frac{\Delta}{4} = 0$$

$$\frac{4}{3}M_{DC} + \frac{2}{3}M_{CD} + \frac{\Delta}{4} = 0 \quad \dots \dots \dots \text{Pers (I)}$$

$$(c). \theta_{CB} = \theta_{CD} \rightarrow$$

$$-\frac{M_{CB} \cdot L}{3(2EI)} - \frac{M_{BC} \cdot L}{6(2EI)} + \frac{PL^2}{16(2EI)} = \frac{M_{CD} \cdot L}{3EI} + \frac{M_{DC} \cdot L}{6EI} - \frac{\Delta}{L}$$

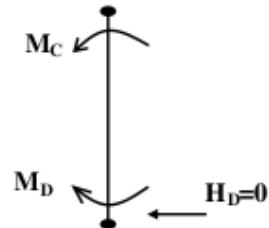
$$-\frac{M_{CB} \cdot 6}{6EI} - \frac{M_{BC} \cdot 6}{12EI} + \frac{6 \cdot 6^2}{32EI} = \frac{M_{CD} \cdot 4}{3EI} + \frac{M_{DC} \cdot 4}{6EI} - \frac{\Delta}{4}$$

$$-M_{CB} - \frac{1}{2}M_{BC} - \frac{4}{3}M_{CD} - \frac{2}{3}M_{DC} + \frac{\Delta}{4} = -5,25$$

$$-M_{CB} - \frac{1}{2} \cdot 3 - \frac{4}{3}M_{CD} - \frac{2}{3}M_{DC} + \frac{\Delta}{4} = -5,25$$

$$-\frac{7}{3}M_C - \frac{2}{3}M_D + \frac{\Delta}{4} = -5,25 \quad \dots \dots \text{ Pers (II)}$$

(d).  $\sum H_D = 0$



$$H_D \cdot L + M_D - M_C = 0$$

$$0 \cdot 4 + M_D - M_C = 0$$

$$M_D = M_C \quad \dots \dots \text{ Pers (III)}$$

6. Subtitusikan persamaan - persamaan berikut :

$$\frac{4}{3}M_{DC} + \frac{2}{3}M_{CD} + \frac{\Delta}{4} = 0 \quad \dots \dots \text{ Pers (I)}$$

$$-\frac{7}{3}M_C - \frac{2}{3}M_D + \frac{\Delta}{4} = -5,25 \quad \dots \dots \text{ Pers (II)}$$

$$M_D = M_C \quad \dots \dots \text{ Pers (III)}$$

Subtitusikan persamaan (III) ke persamaan (I) & (II) menjadi :

$$\frac{6}{3}M_D + \frac{\Delta}{4} = 0 \quad \dots \dots \text{ Pers (I)}$$

$$-\frac{9}{3}M_D + \frac{\Delta}{4} = -5,25 \quad \dots \dots \text{ Pers (II)}$$

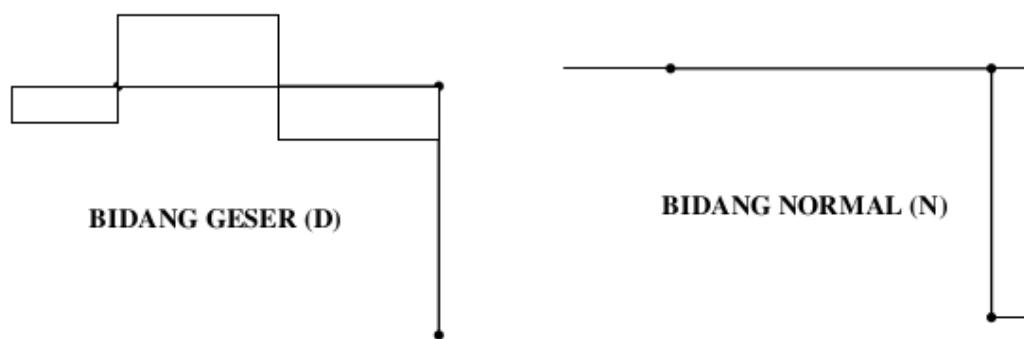
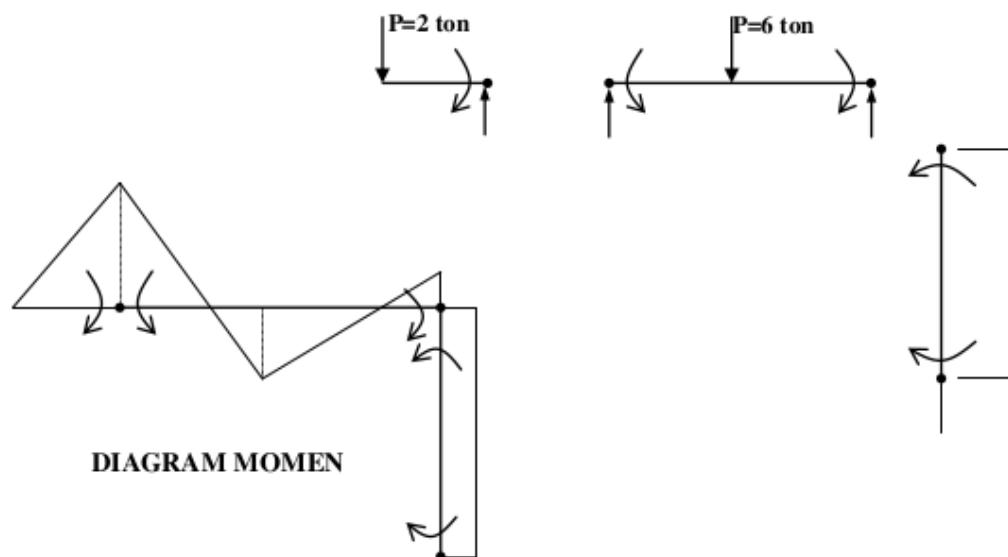
$$2M_D + \Delta/4 = 0$$

$$\begin{array}{r} -3M_D + \Delta/4 = -5,25 \\ \hline 5M_D = 5,25 \end{array}$$

$$M_D = 1,05 \text{ t-m}$$

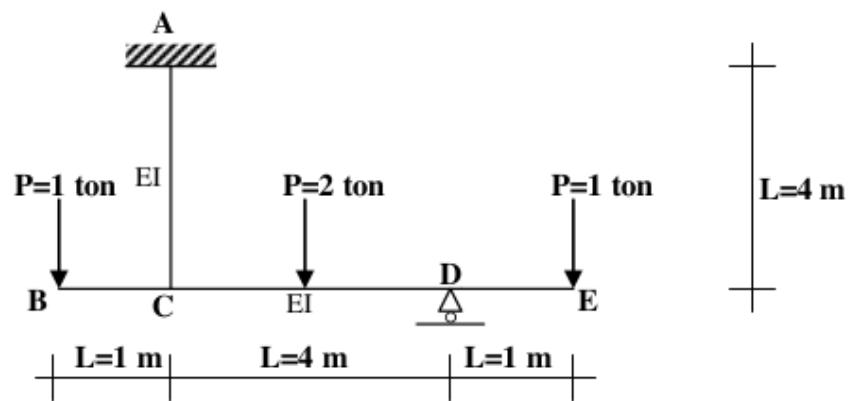
$$M_D = M_{CD} = M_{CB} = 1,05 \text{ t-m.}$$

**FREE BODY DIAGRAM**  
Lengkapilah



**Contoh soal 2.**

Sebuah portal dengan beban dan ukuran seperti gambar dibawah ini, tentukan gaya-gaya dalam portal tersebut dengan metode *Clayperon* atau *Persamaan 3 Momen*.



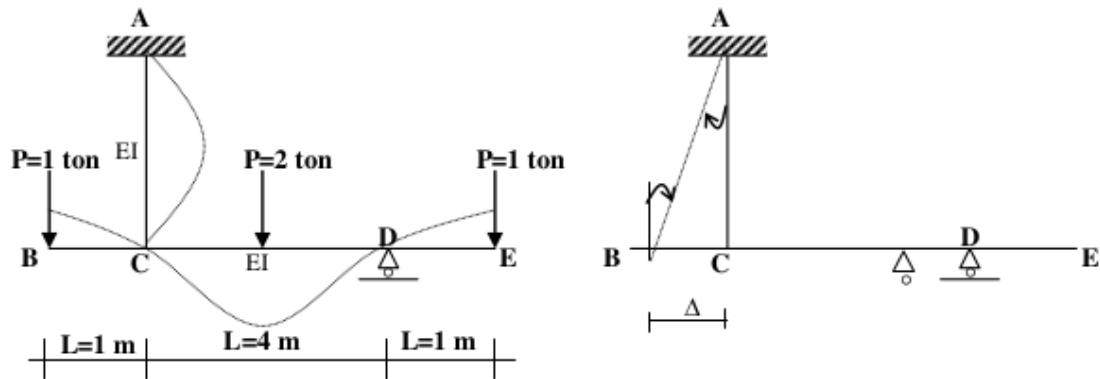
Penyelesaian :

- Chek apakah portal ada pergoyangan atau tidak.

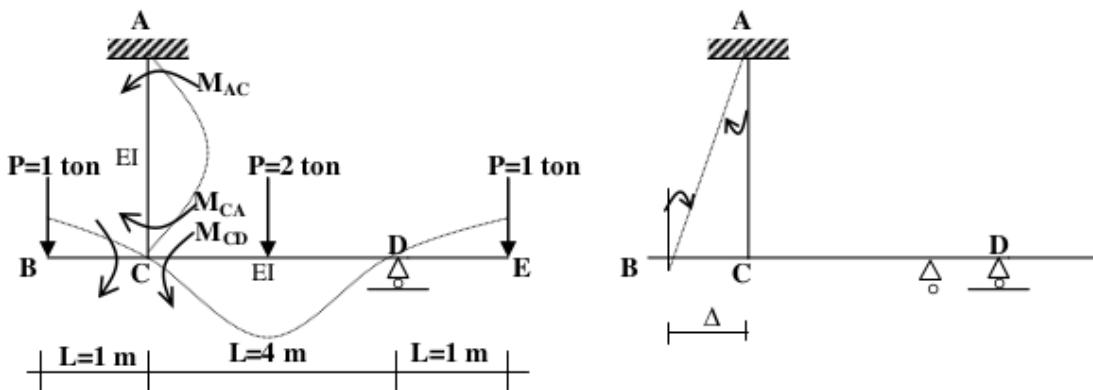
$$N = 2j - (m + 2f + 2h + r)$$

$$N = 2.3 - (2 + 2.1 + 2.0 + 1) = 1 \dots\dots \text{Portal bergoyang}$$

- Tentukan perputaran sudut rotasi atau garis elastis dan perpindahan akibat goyang.



- Tentukan variabel momen yang akan dicari.



$$M_{BC} = P \cdot L = 1 \cdot 1 = 1 \text{ t-m}$$

$$M_{DE} = P \cdot L = 1 \cdot 1 = 1 \text{ t-m}$$

Variabel dan momen yang belum diketahui/dicari adalah  $M_{CA}$ ,  $M_{CD}$ ,  $M_{AC}$ , dan  $\Delta$

4. Tentukan persamaan yang diperlukan (ada 4 persamaan).

$$(a). \sum M_C = 0$$

$$(b). \theta_{AC} = 0$$

$$(c). \theta_{CD} = \theta_{CA}$$

$$(d). \sum H_D = 0$$

5. Penyelesaian persamaan yang diperlukan.

$$(a). \sum M_C = 0 \quad M_{CD} - M_{CB} - M_{CA} = 0 ; \quad M_{CD} = 1 + M_{CA} = 0$$

$$(b). \theta_{AC} = 0 \quad \frac{M_{AC} \cdot L}{3EI} + \frac{M_{CA} \cdot L}{6EI} + \frac{\Delta}{L} = 0$$

$$\frac{M_{AC} \cdot 4}{3EI} + \frac{M_{CA} \cdot 4}{6EI} + \frac{\Delta}{4} = 0$$

$$\frac{4}{3}M_{AC} + \frac{2}{3}M_{CA} + \frac{\Delta}{4} = 0 \quad \dots \dots \dots \text{Pers (I)}$$

(c).  $\theta_{CD} = \theta_{CA}$

$$-\frac{M_{CD} \cdot L}{3EI} - \frac{M_{DC} \cdot L}{6EI} + \frac{PL^2}{16EI} = \frac{M_{CA} \cdot L}{3EI} + \frac{M_{AC} \cdot L}{6EI} - \frac{\Delta}{L}$$

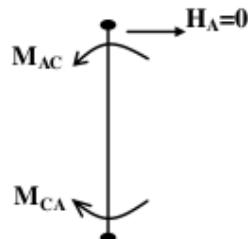
$$-\frac{M_{CD} \cdot 4}{3EI} - \frac{M_{DC} \cdot 4}{6EI} + \frac{2 \cdot 4^2}{16EI} = \frac{M_{CA} \cdot 4}{3EI} + \frac{M_{AC} \cdot 4}{6EI} - \frac{\Delta}{4}$$

$$-\frac{4}{3}M_{CD} - \frac{2}{3}M_{DC} - \frac{4}{3}M_{CA} - \frac{2}{3}M_{AC} + \frac{\Delta}{4} = -2$$

$$-\frac{4}{3}M_{CD} - \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{4}{3}M_{CA} - \frac{2}{3}M_{AC} + \frac{\Delta}{4} = -2$$

$$-\frac{4}{3}M_{CD} - \frac{4}{3}M_{CA} - \frac{2}{3}M_{AC} + \frac{\Delta}{4} = -\frac{4}{3} \quad \dots \dots \text{Pers (II)}$$

(d).  $\sum H_A = 0$



$$H_A \cdot L + M_{AC} - M_{CA} = 0$$

$$0 \cdot 4 + M_{AC} - M_{CA} = 0$$

$$M_{AC} = M_{CA} \quad \dots \dots \text{Pers (III)}$$

6. Subtitusikan persamaan - persamaan berikut :

$$\frac{4}{3}M_{AC} + \frac{2}{3}M_{CA} + \frac{\Delta}{4} = 0 \quad \dots \dots \dots \text{Pers (I)}$$

$$-\frac{4}{3}M_{CD} - \frac{4}{3}M_{CA} - \frac{2}{3}M_{AC} + \frac{\Delta}{4} = -\frac{4}{3} \quad \dots \text{Pers (II)}$$

$$M_{AC} = M_{CA} \quad \dots \text{Pers (III)}$$

Subtitusikan persamaan (III) ke persamaan (I) & (II) menjadi:

$$2M_{CA} + \frac{\Delta}{4} = 0 \quad \dots \text{Pers (IV)}$$

$$-\frac{4}{3}M_{CD} - 2M_{CA} + \frac{\Delta}{4} = -\frac{4}{3} \quad \dots \text{Pers (V)}$$

Subtitusikan persamaan (I) ke persamaan (V) menjadi:

$$\begin{aligned} -\frac{4}{3}(1+M_{CA}) - 2M_{CA} + \frac{\Delta}{4} &= -\frac{4}{3} \\ -\frac{10}{3}M_{CA} + \frac{\Delta}{4} &= 0 \end{aligned} \quad \dots \text{Pers (VI)}$$

Subtitusikan persamaan (IV) dengan (VI) menjadi:

$$2 M_{CA} + \Delta/4 = 0$$

$$\begin{array}{r} - 10/3 M_{CA} + \Delta/4 = 0 \\ \hline \end{array} \quad -$$

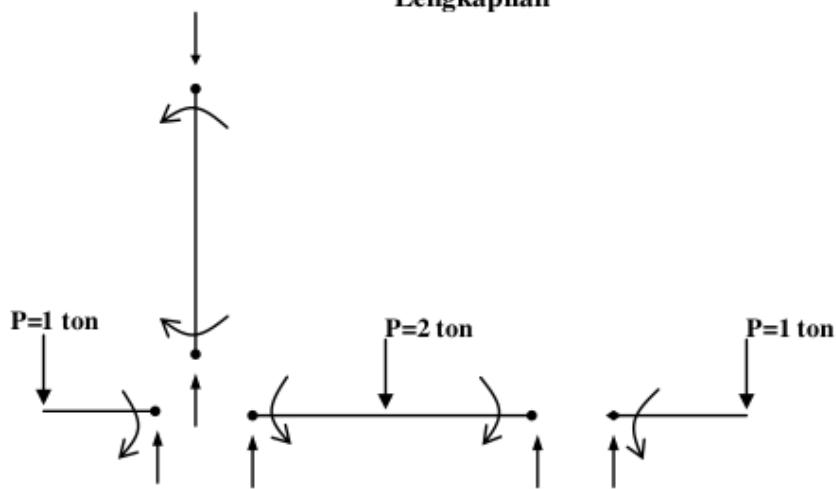
$$16/3 M_{CA} = 0$$

$$M_{CA} = 0 \text{ t-m}$$

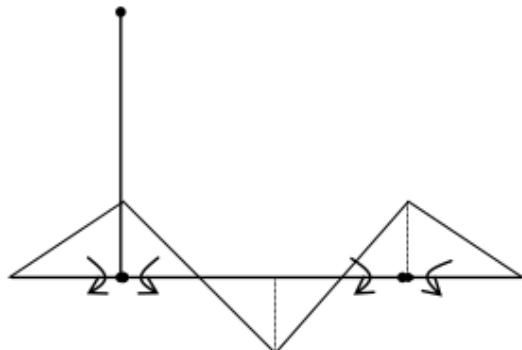
$$M_{AC} = M_{CA} = 0 \text{ t-m.} \quad M_{CD} = 1 + M_{CA} = 1 + 0 = 1 \text{ t-m}$$

**FREE BODY DIAGRAM**

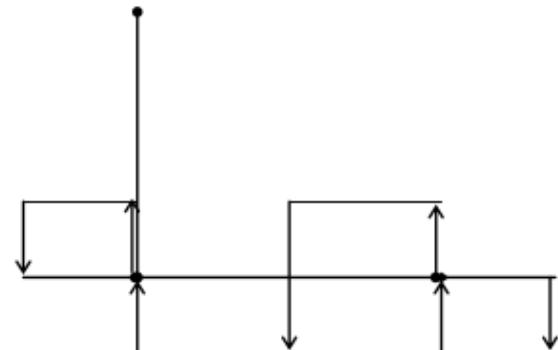
Lengkapilah



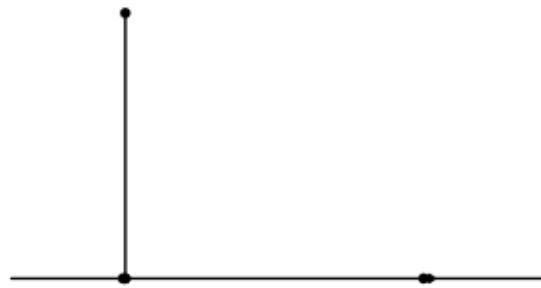
**DIAGRAM MOMEN**



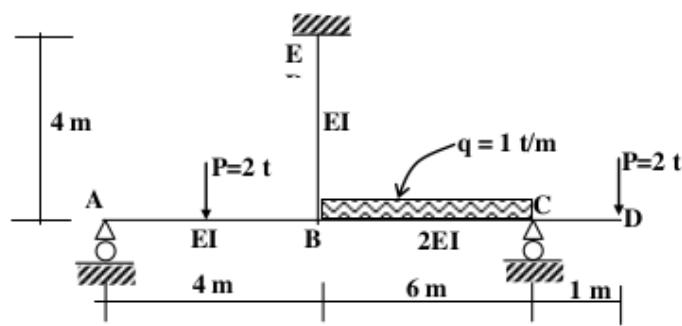
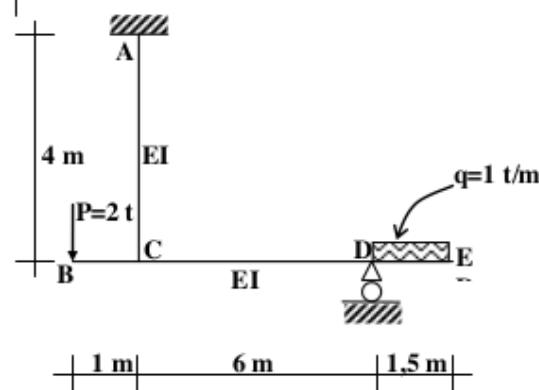
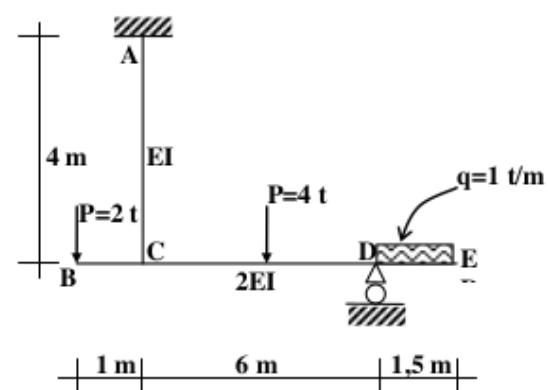
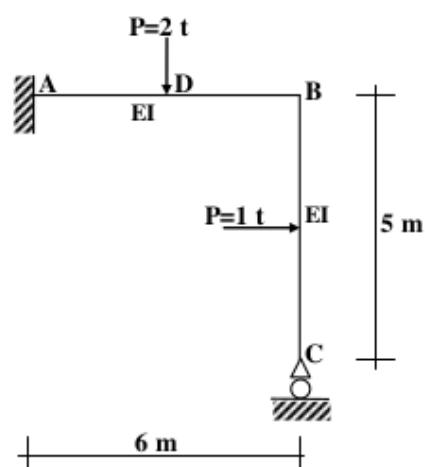
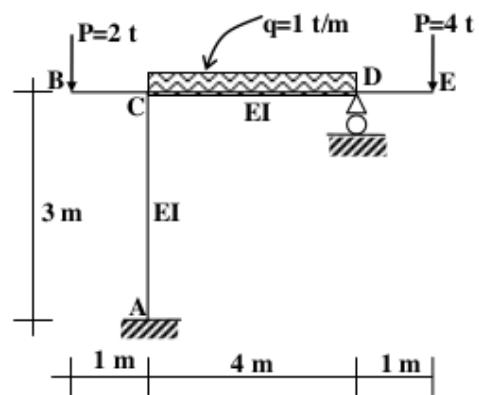
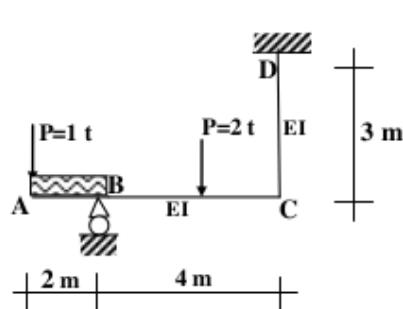
**DIAGRAM GESER (D)**



**DIAGRAM NORMAL (N)**



### 4.3. Soal-Soal Latihan



## **DAFTAR PUSTAKA**

- Chu-Kia W, Wirawan K., Nataprawira M. (1994). “*Analisa Struktur Lanjutan*”. Erlangga Jakarta.
- Ghali, Nevile, Vira (1990). “*Analisa Struktur*”. Erlangga Jakarta.
- Diktat & Catatan Kuliah. Institut Teknologi Surabaya.
- Diktat & Catatan Kuliah. Fakultas Teknik Unmuh Jember.

## Tentang Penulis



**M**uhtar, lahir di Jember pada tanggal 10 Juni 1973 adalah Dosen Dpk pada Program Studi Teknik Sipil Universitas Muhammadiyah Jember sejak tahun 1997 hingga sekarang. Pendidikan SLTP ditempuh melalui ST Negeri 2 Jember Jurusan Sipil Bangunan, SLTA ditempuh melalui STM Negeri Jember Jurusan Sipil Bangunan Gedung, S1 Teknik Sipil Struktur pada Fakultas Teknik Sipil Universitas Muhammadiyah Jember, S2 Teknik Sipil Rekayasa Struktur Universitas Brawijaya Malang, dan S3 Teknik Sipil Rekayasa Struktur Universitas Brawijaya Malang. Pengalaman lain bergerak di bidang Jasa Konsultasi Konstruksi dan Kontraktor semenjak lulus SLTA atau STM.

**S**ri Murni Dewi, lahir di Bukittinggi pada tanggal 11 Desember 1951 adalah Dosen sekaligus Guru Besar pada Jurusan Sipil Fakultas Teknik Universitas Brawijaya Malang pada Bidang Rekayasa Struktur dari tahun 1981 sampai sekarang. Riwayat Pendidikan S1 dan S2 Bidang Teknik Sipil Rekayasa Struktur di Institut Teknologi Bandung (ITB), dan S3 Teknik Sipil Rekayasa Struktur di ITS Surabaya. Telah banyak menulis buku tentang Rekayasa Struktur, statisti dan keandalan struktur, serta penulis puluhan artikel ilmiah Nasional maupun Internasional.

# STRUKTUR STATIS TAK TENTU UNTUK TEKNIK SIPIL

## ORIGINALITY REPORT



## PRIMARY SOURCES

1	Jerome J. Connor, Susan Faraji. "Fundamentals of Structural Engineering", Springer Nature, 2013	1 %
2	www.scribd.com	1 %

Exclude quotes Off Exclude matches < 1%  
Exclude bibliography Off