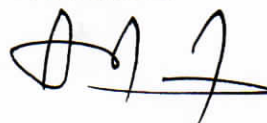


**LEMBAR  
SEJAWAT SEBIDANG ATAU PEER REVIEW  
KARYA ILMIAH: JURNAL ILMIAH**

1. Judul Jurnal Ilmiah : Bilangan Dominasi Jarak Dua pada Graf Hasil Operasi *Shackle*
2. Penulis Jurnal Ilmiah : Reni Umilasari, S.Pd, M.Si
3. Identitas Jurnal Ilmiah : a. Nama Jurnal : Jurnal Sistem dan Teknologi Informasi Indonesia (JUSTINDO)
- b. Nomor/Volume : 2/2
- c. Edisi/ISSN : Februari 2017/ p-ISSN: 2502-5724; e-ISSN: 2541-5735
- d. Penerbit : Teknik Informatika Unmuh Jember
- e. Jumlah Halaman : 167
4. Kategori Publikasi Makalah  Jurnal Ilmiah Internasional
- Jurnal Ilmiah Nasional Terakreditasi
- Jurnal Ilmiah Nasional Tidak Terakreditasi
5. Hasil Penilaian *Peer Review* :

Komponen yang Dinilai	Nilai Maksimal Jurnal Ilmiah			Nilai Akhir Yang Diperoleh
	Internasional <input type="checkbox"/>	Nasional Terakreditasi <input type="checkbox"/>	Nasional Tidak Terakreditasi <input checked="" type="checkbox"/>	
a. Kelengkapan unsur isi buku (10%)			7,5	0,75
b. Ruang lingkup dan kedalaman pembahasan (30%)			7,5	2,25
c. Kecukupan dan kemutakhiran data/informasi dan metodologi (30%)			7,5	2,25
d. Kelengkapan unsur dan kualitas penerbit (30%)			7,5	2,25
<b>Total = (100%)</b>				<b>7,5</b>

Jember, 17 September 2018  
Reviewer 1




(Prof. Drs. Slamir, M.Comp.Sc.,Ph.D.)  
NIP 196704201992011001  
Unit kerja: Fasilkom Universitas Jember

**LEMBAR  
SEJAWAT SEBIDANG ATAU PEER REVIEW  
KARYA ILMIAH: JURNAL ILMIAH**

1. Judul Jurnal Ilmiah : Bilangan Dominasi Jarak Dua pada Graf Hasil Operasi *Shackle*
2. Penulis Jurnal Ilmiah : Reni Umilasari, S.Pd, M.Si
3. Identitas Jurnal Ilmiah : a. Nama Jurnal : Jurnal Sistem dan Teknologi Informasi Indonesia (JUSTINDO)
- b. Nomor/Volume : 2/2
- c. Edisi/ISSN : Februari 2017/ p-ISSN: 2502-5724; e-ISSN: 2541-5735
- d. Penerbit : Teknik Informatika Unmuh Jember
- e. Jumlah Halaman : 167
4. Kategori Publikasi Makalah  Jurnal Ilmiah Internasional
- Jurnal Ilmiah Nasional Terakreditasi
- Jurnal Ilmiah Nasional Tidak Terakreditasi
5. Hasil Penilaian *Peer Review* :

Komponen yang Dinilai	Nilai Maksimal Jurnal Ilmiah			Nilai Akhir Yang Diperoleh
	Internasional <input type="checkbox"/>	Nasional Terakreditasi <input type="checkbox"/>	Nasional Tidak Terakreditasi <input checked="" type="checkbox"/>	
a. Kelengkapan unsur isi buku (10%)			7,5	0,75
b. Ruang lingkup dan kedalaman pembahasan (30%)			7,5	2,25
c. Kecukupan dan kemutakhiran data/informasi dan metodologi (30%)			7,5	2,25
d. Kelengkapan unsur dan kualitas penerbit (30%)			7,5	2,25
<b>Total = (100%)</b>				7,5

Jember, 17 September 2018  
Reviewer 2

  
(Arif Fatahillah, S.Pd, M.Si)  
NIP 198205292009121003  
Unit kerja: Pendidikan Matematika FKIP  
Universitas Jember

# BILANGAN DOMINASI JARAK DUA PADA GRAF HASIL OPERASI SHACKLE

*by* Reni Umilasari

---

**Submission date:** 25-Sep-2018 08:16AM (UTC+0700)

**Submission ID:** 1007777716

**File name:** Artikel\_Reni\_Umilasari.pdf (337.08K)

**Word count:** 2393

**Character count:** 14693

## BILANGAN DOMINASI JARAK DUA PADA GRAF HASIL OPERASI SHACKLE

Reni Umilasari

Fakultas Teknik Universitas Muhammadiyah Jember  
reni.umilasari@unmuhjember.ac.id

### Abstrak

Himpunan dominasi  $S$  pada graf terhubung  $G = (V, E)$  adalah subset dari  $V(G)$  sedemikian setiap simpul  $G$  yang bukan elemen  $S$  terhubung dan berjarak satu terhadap  $S$ . Kardinalitas minimum di antara himpunan dominasi pada graf  $G$  disebut bilangan dominasi dari graf  $G$  dan dinotasikan  $\gamma(G)$ . Sedangkan himpunan dominasi jarak dua yang dinotasikan dengan  $S_2$ , yaitu subset dari  $V(G)$  sedemikian simpul  $G$  yang bukan elemen  $S_2$  terhubung dan memiliki jarak maksimal 2 terhadap  $S_2$ . Bilangan dominasi jarak dua  $\gamma_2(G)$  adalah kardinalitas minimum dari himpunan dominasi jarak dua  $S_2$ .

Graf *shackle* dinotasikan dengan  $Shack(G_1, G_2, \dots, G_k)$  merupakan suatu graf *shackle* yang dibentuk dari  $k$  salinan graf  $G$  dinotasikan dengan  $Shack(G, k)$  dengan  $k \geq 2$  dan  $k$  adalah bilangan asli. Operasi *shackle* pada penelitian ini terdiri dari *shackle* titik dan *shackle* sisi. Operasi *shackle* titik dinotasikan dengan  $Shack(G, v, t)$  artinya graf dikonstruksi dari sebarang graf  $G$  sebanyak  $t$  salinan dan  $v$  sebagai *linkage vertex*. Sedangkan operasi *shackle* sisi dinotasikan dengan  $Shack(G, e, t)$  artinya graf dikonstruksi dari sebarang graf  $G$  sebanyak  $t$  salinan dan  $e$  sebagai *linkage edge*.

Dalam penelitian ini diperoleh bilangan dominasi jarak dua pada graf komplit dengan operasi *shackle* titik dan sisi adalah  $\gamma_2(Shack(K_n, v_i, s)) = \begin{bmatrix} s \\ 4 \end{bmatrix}$ , jika  $s \geq 2, n \geq 3$  dan  $\gamma_2(Shack(K_n, e_i, s)) = \begin{bmatrix} s \\ 5 \end{bmatrix}$ , jika  $s \geq 2, n = 3, 4$  dan  $\begin{bmatrix} s \\ 4 \end{bmatrix}$ , jika  $s \geq 2, n \geq 5$ . Bilangan dominasi jarak dua pada graf bintang dengan operasi *shackle* adalah  $\gamma_2(Shack(S_n, v_i, t)) = \begin{bmatrix} t \\ 4 \end{bmatrix}$ , jika  $t \geq 2, n \geq 3$ ,  $\gamma_2(Shack(S_n, e_i, t)) = \begin{bmatrix} t \\ 2 \end{bmatrix}$  jika  $t \geq 2, n \geq 3$ . Sedangkan graf komplit berpendant mempunyai bilangan dominasi jarak dua  $\gamma_2(Shack(K_{n,n}, v_i, m)) = \gamma_2(Shack(K_{n,n}, e_i, m)) = t$ , untuk  $m \geq 2, n \geq 3$ .

**Kata kunci:** bilangan dominasi jarak dua, operasi *shackle*, graf komplit, graf bintang, graf komplit berpendant

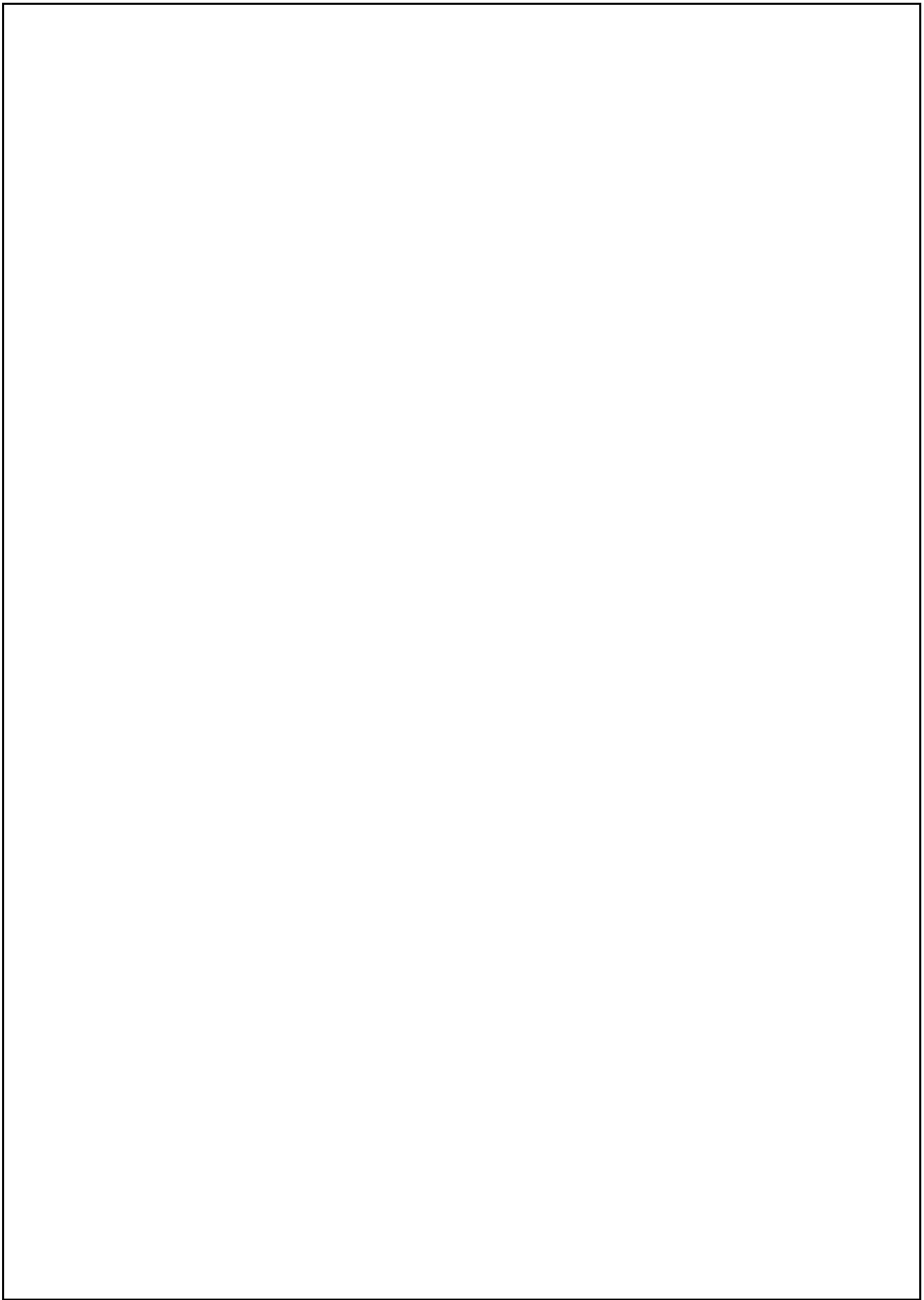
**Abstract**

*Dominating set  $S$  in graph  $G=(V,E)$  is a subset of  $V(G)$  such that every vertex of  $G$  which is not element of  $S$  are connected and have distance one to  $S$ . Minimum cardinality among dominating sets in a graph  $G$  is called dominating number of graph  $G$  and denoted by  $\gamma(G)$ . Dominating set of distance two which denoted by  $S_2$  is a subset of  $V(G)$  such that every vertex of  $G$  which is not element of  $S$  are connected and have maximum distance two to  $S_2$ . Dominating number of distance two  $\gamma_2(G)$  is minimum cardinality of dominating set of distance two  $S_2$ . In this paper, we determine the dominating number of distance two of both shackle product of vertex and edge of complete graph, star graph, complete with pendant graph.*

*Schakle graph is denoted by  $Shack(G_1, G_2, \dots, G_k)$  is graph which formed by  $k$  copy of graph  $G$  and denoted by  $Shack(G, k)$  with  $k \geq 2$  and  $k$  is natural number. Shackle product in this research are consist of vertex shackle and edge shackle. Vertex shackle product is denoted by  $Shack(G, v, t)$  means a graph which constructed by any graph  $G$  of  $t$  copy and  $v$  as linkage vertex. Besides edge shackle product is denoted by  $Shack(G, e, t)$  means a graph which constructed by any graph  $G$  of  $t$  copy and  $e$  as linkage edge.*

*In this research we get dominating number of distance two of complete vertex shackle and edge shackle products are  $\gamma_2(Shack(K_n, v_i, s)) = \left\lceil \frac{s}{4} \right\rceil$ , for  $s \geq 2, n \geq 3$  and  $\gamma_2(Shack(K_n, e_i, s)) = \left\lceil \frac{s}{5} \right\rceil$ , for  $s \geq 2, n = 3, 4$  and  $\left\lceil \frac{s}{4} \right\rceil$ , for  $s \geq 2, n \geq 5$ . Dominating number of distance two of star graph by vertex shackle and edge shackle products are  $\gamma_2(Shack(S_n, v_i, t)) = \left\lceil \frac{t}{4} \right\rceil$ , for  $t \geq 2, n \geq 3$ ,  $\gamma_2(Shack(S_n, e_i, t)) = \left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil$  for  $t \geq 2, n \geq 3$ . Besides complete graph with pendant has dominating number of distance two  $\gamma_2(Shack(K_{n,n}, v_i, m)) = \gamma_2(Shack(K_{n,n}, e_i, m)) = t$ , for  $m \geq 2, n \geq 3$ .*

**Keywords:** *dominating number of distance two, shackle product, complete graph, star graph, complete with pendant graph*



## PENDAHULUAN

*Dominating* atau dominasi secara matematis dikenalkan pada awal tahun 1960. Sejak saat itu baik himpunan dominasi maupun bilangan dominasi banyak digunakan dalam berbagai aplikasi. Salah satu contoh aplikasi dari bilangan dominasi adalah menentukan banyaknya pos pertolongan pertama pada suatu wilayah yang terjadi bencana alam. Misalkan wilayah tersebut terdiri dari banyak desa-desa kecil. Simpul dari graf mewakili desa-desa di wilayah tersebut. Sisi yang menghubungkan dua simpul menunjukkan bahwa pos pertolongan pertama darurat didirikan pada salah satu desa yang juga dapat melayani desa lainnya. Kemudian, himpunan dominasi minimum dari graf akan merepresentasikan cara melayani seluruh wilayah dengan jumlah pos pertolongan pertama yang minimum (Gross, J. dan Yellen J., 2006).

Permasalahannya adalah jika jumlah tenaga medis serta fasilitas yang ada sangat terbatas maka banyaknya pos darurat yang akan didirikan harus diminimalkan, akan tetapi pelayanan kepada seluruh wilayah masih dapat dijangkau dengan baik. Misalkan, satu pos dapat melayani maksimal dua desa terdekat. Sehingga banyaknya pos darurat yang didirikan lebih minimal dan banyaknya desa yang dapat dijangkau semakin bertambah. Permasalahan tersebut belum banyak dipublikasikan. Penelitian mengenai bilangan dominasi jarak dua yang sudah dilakukan diantaranya oleh Umilasari, R. 2015 dan Vikade, W, 2016.

Himpunan dominasi  $S$  pada graf  $G = (V, E)$  adalah subset dari  $V(G)$  sedemikian setiap simpul  $G$  yang bukan elemen  $S$  terhubung dan berjarak satu terhadap  $S$ . Kardinalitas minimum di antara himpunan dominasi pada graf  $G$  disebut bilangan dominasi dari graf  $G$  dan dinotasikan  $\gamma(G)$  (Haynes, W. Teresa., 1998). Sedangkan himpunan dominasi jarak dua yang dinotasikan dengan  $S_2$ , yaitu subset dari  $V(G)$  sedemikian simpul  $G$  yang bukan elemen  $S_2$  terhubung dan memiliki jarak maksimal dua terhadap  $S_2$ . Bilangan dominasi jarak dua  $\gamma_2(G)$  adalah kardinalitas minimum dari himpunan dominasi jarak dua  $S_2$ .

Graf *shackle* dinotasikan dengan  $Shack(G_1, G_2, \dots, G_k)$ , suatu graf *shackle* yang dibentuk dari  $k$  salinan graf  $G$  dinotasikan dengan  $Shack(G, k)$  dengan  $k \geq 2$  dan  $k$  adalah bilangan asli (Maryati et al, 2010). Operasi *shackle* pada penelitian ini terdiri dari *shackle* titik dan *shackle* sisi. Operasi *shackle* titik dinotasikan dengan  $Shack(G, v, t)$  artinya graf dikonstruksi dari sebarang graf  $G$  sebanyak  $t$  salinan dan  $v$  sebagai *linkage vertex*. Sedangkan operasi *shackle* sisi dinotasikan dengan  $Shack(G, e, t)$  artinya graf dikonstruksi dari sebarang graf  $G$  sebanyak  $t$  salinan dan  $e$  sebagai *linkage edge*. Graf yang akan digunakan dalam penelitian ini diantaranya graf lengkap ( $K_n$ ), graf bintang ( $S_n$ ) dan graf komplit *berpendant* ( $K_{n,n}$ ).

## METODE

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah pendeteksian pola, yaitu dengan cara mencari himpunan dominasi sedemikian hingga ditemukan bilangan kardinalitas yang minimum. Adapun langkah-langkahnya sebagai berikut:

- memilih beberapa graf hasil operasi;
- menentukan *dominating set* pada graf hasil operasi;
- memilih simpul berderajat maksimal sebagai simpul pendominasi jarak dua;
- memilih simpul berderajat maksimal berikutnya yang belum terdominasi;
- menentukan himpunan dominasi jarak dua;
- menentukan bilangan kardinalitas jarak dua;
- membuat kesimpulan.

**HASIL DAN PEMBAHASAN**

2

Berikut ini ditunjukkan beberapa teorema **Bilangan dominasi jarak dua pada graf Komplit, graf Bintang, dan graf Komplit Berpendant.** Ketiga graf tersebut dioperasikan menggunakan operasi *Shackle* titik dan *Shackle* sisi.

**Teorema 1.** Bilangan dominasi jarak dua pada graf Komplit  $K_n$  sebanyak  $s$  salinan dengan operasi *shackle* titik adalah

$$\gamma_2(\text{Shack}(K_n, v_i, s)) = \left\lceil \frac{s}{4} \right\rceil, \text{ untuk } s \geq 2, n \geq 3$$

Bukti.  $\text{Shack}(K_n, v_i, s)$  adalah graf hasil operasi *shackle* titik dari graf Komplit  $K_n$  sebanyak  $s$  salinan dan  $v$  sebagai *lingkage vertex*. Jika sebuah graf  $K_n$  memiliki  $n$  simpul, maka  $\text{Shack}(K_n, v_i, s)$  memiliki  $ns - s + 1$  simpul.

Graf  $K_n$  yang berdiameter satu dan jika dioperasikan *shackle* titik maka sebuah simpul pendominasi dapat mendominasi maksimal 4 salinan graf  $K_n$ , sehingga jumlah simpul pendominasi yang dibutuhkan adalah  $\gamma_2(\text{Shack}(K_n, v_i, s)) = \left\lceil \frac{s}{4} \right\rceil$ .

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa  $\left\lceil \frac{s}{4} \right\rceil$  adalah simpul pendominasi minimal yang dapat mendominasi semua simpul pada  $\text{Shack}(K_n, v_i, s)$  dengan  $\text{diam}(K_n) = 1$ . Andai  $\gamma_2(\text{Shack}(K_n, v_i, s)) = \left\lceil \frac{s}{4} \right\rceil - 1$ , maka salinan maksimal yang dapat didominasi sampai jarak dua adalah

$$4s \left( \left\lceil \frac{s}{4} \right\rceil - 1 \right) \leq 4s \left( \frac{s + 4s - 1}{4s} - 1 \right) = s - 1$$

dengan demikian jumlah salinan maksimal yang dapat didominasi adalah  $s - 1$ . Dengan kata lain, terdapat minimal satu salinan graf yang tidak didominasi, sehingga  $\gamma_2(\text{Shack}(K_n, v_i, s)) \neq \left\lceil \frac{s}{4} \right\rceil - 1$  dan  $\left\lceil \frac{s}{4} \right\rceil$  adalah jumlah simpul pendominasi minimal yang mendominasi seluruh simpul  $\text{Shack}(K_n, v_i, s)$ . Terbukti bahwa  $\gamma_2(\text{Shack}(K_n, v_i, s)) = \left\lceil \frac{s}{4} \right\rceil$ .

**Teorema 2.** Bilangan dominasi jarak dua pada graf Komplit  $K_n$  sebanyak  $s$  salinan dengan operasi *shackle* sisi adalah

$$\gamma_2(\text{Shack}(K_n, e_i, s)) = \begin{cases} \left\lceil \frac{s}{5} \right\rceil, & \text{untuk } s \geq 2, n = 3, 4 \\ \left\lceil \frac{s}{4} \right\rceil, & \text{untuk } s \geq 2, n \geq 5 \end{cases}$$

**Bukti.** Graf Komplit  $K_n$  adalah graf dengan diameter sama dengan satu, sehingga untuk setiap dua salinan graf  $K_n$  yang dioperasikan *Shackle* sisi maka diameternya menjadi sama dengan dua. Oleh karena itu, untuk setiap empat salinan graf  $K_n$  dibutuhkan 1 simpul pendominasi, sehingga untuk  $s$  salinan graf  $K_n$   $\text{Shack}(K_n, e_i, s)$  dibutuhkan  $\left\lceil \frac{s}{4} \right\rceil$  simpul pendominasi.

Misalnya  $\left\lceil \frac{s}{4} \right\rceil$  bukan jumlah simpul pendominasi yang minimal. Ambil  $\gamma_2(\text{Shack}(K_n, e_i, s)) = \left\lceil \frac{s}{4} \right\rceil - 1$  sebagai simpul pendominasi yang minimal. Maka banyak simpul yang dapat didominasi adalah

$$4s \left( \left\lceil \frac{s}{4} \right\rceil - 1 \right) \leq 4s \left( \frac{s + 4s - 1}{4s} - 1 \right) = s - 1$$

Karena banyak simpul yang dapat didominasi hanya  $s - 1$  salinan, maka dapat dikatakan bahwa terdapat satu salinan simpul-simpul graf  $\text{Shack}(K_n, e_i, s)$  tidak dapat didominasi. Sehingga  $\gamma_2(\text{shack}(K_n, e_i, s)) \neq \left\lceil \frac{s}{4} \right\rceil - 1$ . Oleh karena itu,  $\left\lceil \frac{s}{4} \right\rceil$  adalah simpul pendominasi yang minimal.



**Teorema 2.** Bilangan dominasi jarak dua pada graf Komplit  $K_n$  sebanyak  $s$  salinan dengan operasi *shackle* sisi adalah

$$\gamma_2(\text{Shack}(K_n, e_i, s)) = \begin{cases} \left\lceil \frac{s}{5} \right\rceil, & \text{untuk } s \geq 2, n = 3, 4 \\ \left\lceil \frac{s}{4} \right\rceil, & \text{untuk } s \geq 2, n \geq 5 \end{cases}$$

**Bukti.** Graf Komplit  $K_n$  adalah graf dengan diameter sama dengan satu, sehingga untuk setiap dua salinan graf  $K_n$  yang dioperasikan *Shackle* sisi maka diameternya menjadi sama dengan dua. Oleh karena itu, untuk setiap empat salinan graf  $K_n$  dibutuhkan 1 simpul pendominasi, sehingga untuk  $s$  salinan graf  $K_n$   $\text{Shack}(K_n, e_i, s)$  dibutuhkan  $\left\lceil \frac{s}{4} \right\rceil$  simpul pendominasi.

Misalnya  $\left\lceil \frac{s}{4} \right\rceil$  bukan jumlah simpul pendominasi yang minimal. Ambil  $\gamma_2(\text{Shack}(K_n, e_i, s)) = \left\lceil \frac{s}{4} \right\rceil - 1$  sebagai simpul pendominasi yang minimal. Maka banyak simpul yang dapat didominasi adalah

$$4s \left( \left\lceil \frac{s}{4} \right\rceil - 1 \right) \leq 4s \left( \frac{s + 4s - 1}{4s} - 1 \right) = s - 1$$

Karena banyak simpul yang dapat didominasi hanya  $s - 1$  salinan, maka dapat dikatakan bahwa terdapat satu salinan simpul-simpul graf  $\text{Shack}(K_n, e_i, s)$  tidak dapat didominasi. Sehingga  $\gamma_2(\text{shack}(K_n, e_i, s)) \neq \left\lceil \frac{s}{4} \right\rceil - 1$ . Oleh karena itu,  $\left\lceil \frac{s}{4} \right\rceil$  adalah simpul pendominasi yang minimal.

**Teorema 4.3** Bilangan dominasi jarak dua pada graf Bintang  $S_n$  sebanyak  $t$  salinan dengan operasi *shackle* titik adalah

$$\gamma_2(\text{Shack}(S_n, v_i, t)) = \left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil, \text{ untuk } t \geq 2, n \geq 3$$

**Bukti.** Dalam teorema ini akan dibuktikan graf Bintang sebanyak  $t$  salinan dengan operasi *shackle* titik dan yang dihubungkan antara  $S_{n_i}$  dengan  $S_{n_{i+1}}$  adalah simpul-simpul pendant dari graf Bintang bukan simpul pusatnya Representasi graf  $\text{Shack}(S_n, v_i, t)$  dapat dilihat pada Gambar .....

$\text{Shack}(S_n, v_i, t)$  adalah graf hasil operasi *shackle* titik dari graf Komplit  $S_n$  sebanyak  $t$  salinan dan  $v$  sebagai *linkage vertex*. Jika sebuah graf  $S_n$  memiliki  $n$  simpul, maka  $\text{Shack}(S_n, v_i, t)$  memiliki  $nt - t + 1$  simpul. Terdapat dua kemungkinan himpunan elemen simpul pendominasi seperti penjelasan berikut.

1. jika  $v \in S_2$

Seperti yang diketahui berdasarkan definisi, graf Bintang memiliki diameter sama dengan dua  $\text{diam}(S_n) = 2$ . Oleh karena itu, jika graf  $S_n$  dioperasikan *shackle* titik maka sebuah simpul pendominasi ( $S_2$ ) yang merupakan sebuah *linkage vertex* dapat mendominasi maksimal 2 salinan graf  $S_n$ . Sehingga untuk  $t$  salinan graf Bintang simpul pendominasi yang dibutuhkan adalah  $\gamma_2(\text{Shack}(S_n, v_i, t)) = \left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil$ .

2.  $v \notin S_2$

Sedangkan jika elemen  $S_2$  bukan diambil dari simpul-simpul *linkage vertex* maka untuk setiap simpul pendominasi maksimal hanya dapat mendominasi satu salinan graf Bintang. Hal ini dikarenakan jarak simpul pendominasi ke salinan simpul-simpul graf Bintang yang berikutnya bisa mencapai 4  $d(S_2, V(S_{n+1})) \leq 4$ .

Oleh karena itu, kemungkinan pertama lebih optimal jika  $\gamma_2(Shack(S_n, v_i, t)) = \lfloor \frac{t}{2} \rfloor$ . Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa  $\lfloor \frac{t}{2} \rfloor$  adalah simpul pendominasi minimal yang dapat mendominasi semua simpul pada  $Shack(S_n, v_i, t)$ . Andai  $\gamma_2(Shack(S_n, v_i, t)) = \lfloor \frac{t}{2} \rfloor - 1$ , maka salinan maksimal yang dapat didominasi sampai jarak 2 adalah

$$2t \left( \lfloor \frac{t}{2} \rfloor - 1 \right) \leq 2t \left( \frac{t+2t-1}{2t} - 1 \right) = t - 1.$$

Dengan demikian jumlah salinan maksimal yang dapat didominasi adalah  $t - 1$ . sehingga terdapat minimal satu salinan graf  $Shack(S_n, v_i, t)$  yang tidak didominasi, maka  $\gamma_2(Shack(S_n, v_i, t)) \neq \lfloor \frac{t}{4} \rfloor - 1$ . Sehingga dapat disimpulkan bahwa  $\lfloor \frac{t}{4} \rfloor$  adalah jumlah simpul pendominasi minimal yang mendominasi seluruh simpul  $Shack(S_n, v_i, t)$  maka  $\gamma_2(Shack(S_n, v_i, t)) = \lfloor \frac{t}{4} \rfloor$ .

**Teorema 4.4** Bilangan dominasi jarak dua pada graf Bintang  $S_n$  sebanyak  $t$  salinan dengan operasi *shackle* sisi adalah

$$\gamma_2(Shack(S_n, e_i, t)) = \lfloor \frac{t}{3} \rfloor, \text{ untuk } t \geq 2, n \geq 3$$

**Bukti.** Pembuktian untuk teorema ini tidak jauh berbeda dengan teorema sebelumnya. Karena  $diam(S_n) = 2$ , maka jika ambil simpul pendominasi yang merupakan elemen simpul-simpul pendant yang tidak termasuk simpul yang dilekatkan dengan graf Bintang yang lain maka satu simpul hanya dapat mendominasi simpul-simpul pada satu salinan graf Bintang tersebut karena  $d(S_2, V(S_{n+1})) \leq 3$ . Sebaliknya jika kita ambil simpul-simpul pendominasi yang merupakan simpul-simpul penghubung dari dua sisi yang dilekatkan antar graf Bintang ( $e_i$ ) maka satu simpul maksimal dapat mendominasi tiga salinan graf Bintang  $Shack(S_n, e_i, 3)$ . Oleh karena itu, jika terdapat  $t$  Salinan graf Bintang yang dioperasikan menggunakan *schakle* sisi maka akan dibutuhkan sebanyak  $\lfloor \frac{t}{3} \rfloor$  simpul untuk mendominasi semua simpul atau dapat dituliskan  $\gamma_2(Shack(S_n, e_i, t)) = \lfloor \frac{t}{3} \rfloor$ .

Andai  $\lfloor \frac{t}{3} \rfloor$  bukan simpul pendominasi yang minimal, atau kita asumsikan  $\lfloor \frac{t}{3} \rfloor - 1$  sebagai simpul pendominasi yang minimal, maka banyak simpul yang dapat didominasi adalah

$$3t \left( \lfloor \frac{t}{3} \rfloor - 1 \right) \leq 3t \left( \frac{t+3t-1}{3t} - 1 \right) = t - 1.$$

Karena simpul maksimal yang dapat didominasi hanya sebanyak  $t - 1$  salinan sehingga dengan kata lain terdapat satu salinan graf bintang *Schakle* sisi yang tidak dapat terdominasi. Maka  $\lfloor \frac{t}{3} \rfloor - 1$  bukan simpul pendominasi yang minimal sehingga  $\gamma_2(Shack(S_n, e_i, t)) = \lfloor \frac{t}{3} \rfloor$  adalah simpul pendominasi yang minimal.

**Teorema 4.5** Bilangan dominasi jarak dua pada graf Komplit *Berpendant*  $K_{n,n}$  sebanyak  $t$  salinan dengan operasi *shackle* titik adalah

$$\gamma_2(Shack(K_{n,n}, v_i, t)) = t, \text{ untuk } t \geq 2, n \geq 3$$

**Bukti.** Graf Komplit berpendant yang dioperasikan *Shackle* titik yang dimaksud dalam teorema ini yaitu dengan melekatkan titik pendant dari masing-masing  $K_n$  seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.5.

Graf Komplit berpendant merupakan graf dengan diameter sama dengan tiga ( $diam(K_{n,n}) = 3$ ). Dengan demikian dapat dikatakan bahwa  $\gamma_2(K_{n,n}) = 1$  dengan  $S_2 \notin$  simpul pendant, karena jika  $S_2 \in$  simpul pendant maka  $\gamma_2(K_{n,n}) > 1$  karena  $d(p_i, p_{i+1}) = 3$ ;  $p_i, p_{i+1}$  adalah simpul-simpul pendant pada  $K_{n,n}$ .

Jika satu salinan graf  $K_{n,n}$  memiliki bilangan dominasi jarak dua sama dengan satu, maka untuk  $\gamma_2(Shack(K_{n,n}, v_i, 2)) = 2$ ,  $\gamma_2(Shack(K_{n,n}, v_i, 3)) = 3$  begitu juga untuk  $t$  salinan graf  $K_{n,n}$  membutuhkan minimal  $t$  bilangan dominasi jarak dua,  $\gamma_2(Shack(K_{n,n}, v_i, t)) \leq t$  dan setiap simpul pendominasi minimal dapat mendominasi  $2n$  simpul.

Selanjutnya, akan diunjukkan apakah  $t$  adalah jumlah bilangan dominasi jarak dua yang minimal. Andai,  $\gamma_2(Shack(K_{n,n}, v_i, t)) = t - 1$ , maka banyak simpul yang dapat didominasi adalah

$$(t - 1)2n = 2nt - 2n < 2nt = |V((K_{n,n}, v_i, t))|$$

sehingga  $t - 1$  bukanlah simpul pendominasi yang minimal karena simpul-simpul yang didominasi kurang dari order atau banyaknya simpul pada graf  $K_{n,n}$  dengan  $t$  salinan operasi *shackle* titik. Maka  $t$  adalah jumlah simpul pendominasi yang maksimal, atau dengan kata lain  $\gamma_2(Shack(K_{n,n}, v_i, t)) \leq t$ . Maka terbukti bahwa  $\gamma_2(Shack(K_{n,n}, v_i, t)) = t$ .

**Teorema 4.6** Bilangan dominasi jarak dua pada graf Komplit *Berpendant*  $K_{n,n}$  sebanyak  $t$  salinan dengan operasi *shackle* sisi adalah

$$\gamma_2(Shack(K_{n,n}, e_i, t)) = t, \text{ untuk } t \geq 2, n \geq 3$$

**Bukti.** Dalam teorema ini graf Komplit berpendant yang dioperasikan *Shackle* sisi adalah sisi-sisi yang terhubung dengan pendant dari masing-masing  $K_n$  seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.6. Order atau banyaknya simpul dari graf komplit berpendant dengan operasi *shackle* sisi adalah  $2nt - t + 1$ .

Graf Komplit berpendant merupakan graf dengan diameter sama dengan tiga ( $diam(K_{n,n}) = 3$ ). Dengan demikian dapat dikatakan bahwa  $\gamma_2(K_{n,n}) = 1$  dengan  $S_2 \notin$  simpul pendant, karena jika  $S_2 \in$  simpul pendant maka  $\gamma_2(K_{n,n}) > 1$  karena  $d(p_i, p_{i+1}) = 3$ ;  $p_i, p_{i+1}$  adalah simpul-simpul pendant pada  $K_{n,n}$ . Apabila dua salinan graf Komplit berpendant dioperasikan menggunakan operasi *shackle* sisi maka sesuai definisi operasi *shackle* mengakibatkan dua sisi dari masing-masing graf  $K_{n,n}$  akan melekat menjadi satu sisi yang menyebabkan  $diam(Shack(K_{n,n}, e_i, 2)) = 5$  sehingga minimal terdapat dua simpul yang dapat mendominasi graf  $Shack(K_{n,n}, e_i, 2)$ . Hal ini juga berlaku untuk  $\gamma_2(Shack(K_{n,n}, e_i, 3)) = 3$ ,  $\gamma_2(Shack(K_{n,n}, e_i, 4)) = 4$  begitu juga untuk  $t$  salinan graf  $K_{n,n}$  membutuhkan minimal  $t$  bilangan dominasi jarak dua,

$\gamma_2(\text{Shack}(K_{n,n}, e_i, t)) \leq t$  dengan ketentuan dua simpul pendominasi minimal dapat mendominasi  $4n$  simpul atau satu simpul dapat mendominasi minimal  $2n$  simpul.

Oleh karena itu jika  $\gamma_2(\text{Shack}(K_{n,n}, e_i, t)) = t - 1$  adalah simpul pendominasi yang minimal maka banyak simpul yang dapat didominasi adalah

$$(t - 1)2n = 2nt - 2n < 2nt - t + 1; \text{ untuk } t > n \text{ maupun } n > t.$$

Sehingga  $t - 1$  bukanlah simpul pendominasi yang minimal karena simpul-simpul yang didominasi kurang dari order atau banyaknya simpul pada graf  $\text{Shack}(K_{n,n}, e_i, t)$ . Maka  $t$  adalah jumlah simpul pendominasi yang maksimal, atau dengan kata lain  $\gamma_2(\text{Shack}(K_{n,n}, e_i, t)) \leq t$ . Maka terbukti bahwa  $\gamma_2(\text{Shack}(K_{n,n}, e_i, t)) = t$ .

6

### KESIMPULAN

Kesimpulan yang diperoleh berdasarkan analisis dan pembahasan adalah sebagai berikut.

1. Bilangan dominasi jarak dua pada graf Komplit  $K_n$  sebanyak  $s$  salinan dengan operasi *shackle* titik adalah

$$\gamma_2(\text{Shack}(K_n, v_i, s)) = \left\lfloor \frac{s}{4} \right\rfloor, \text{ untuk } s \geq 2, n \geq 3$$

2. Bilangan dominasi jarak dua pada graf Komplit  $K_n$  sebanyak  $s$  salinan dengan operasi *shackle* sisi adalah

$$\gamma_2(\text{Shack}(K_n, e_i, s)) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{s}{5} \right\rfloor, & \text{untuk } s \geq 2, n = 3, 4 \\ \left\lfloor \frac{s}{4} \right\rfloor, & \text{untuk } s \geq 2, n \geq 5 \end{cases}$$

3. Bilangan dominasi jarak dua pada graf Bintang  $S_n$  sebanyak  $t$  salinan dengan operasi *shackle* titik adalah

$$\gamma_2(\text{Shack}(S_n, v_i, t)) = \left\lfloor \frac{t}{4} \right\rfloor, \text{ untuk } t \geq 2, n \geq 3$$

4. Bilangan dominasi jarak dua pada graf Bintang  $S_n$  sebanyak  $t$  salinan dengan operasi *shackle* sisi adalah

$$\gamma_2(\text{Shack}(S_n, e_i, t)) = \left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor, \text{ untuk } t \geq 2, n \geq 3$$

5. Bilangan dominasi jarak dua pada graf Komplit *Berpendant*  $K_{n,n}$  sebanyak  $m$  salinan dengan operasi *shackle* titik dan sisi adalah

$$\gamma_2(\text{Shack}(K_{n,n}, v, m)) = \gamma_2(\text{Shack}(K_{n,n}, e, m)) = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor, \text{ untuk } m, n \geq 2$$

### DAFTAR RUJUKAN

- [1] G. Chartrand, L. Lesniak, *Graphs and Digraph*, 3rd edition, Chapman & Hall/CRC, (1996), 2-6 Boundaru Row, London SE1 8HN, UK.
- [2] W. Goddard, M. A. Henning, *Independent Domination in Graphs: A Survey and Recent Results*, (2006), University of Johannesburg, South Africa.
- [3] S. Gravier, Total Domination Number of Grid Graph, *Discrete Applied Mathematics*, 121 (2002), 119-128.
- [4] J. Gross, J. Yellen, *Graph Theory and Its Applications*, Chapman & Hall/CRC, FL 33487-2742, (2006), Boca Raton, London.

- [5] <sup>1</sup> W. Haynes, Teresa, *Fundamental of Dominations in Graphs*, (1996), New York: Marcel Dekker, Inc.
- [6] S. Klav̆zar, *Dominating Cartesian Product of Cycles*, *Discrete Applied Mathematics*, 59 (1995), 129-136.
- [7] <sup>3</sup> T.K. Maryati, A.N.M. Salman, E.T. Baskoro, J. Ryan and M. Miller, *On H-Supermagic labelings for Ccertain *Shackles* and Amalgamations of a Connected Graph*, *Utilitas Math.* 83 (2010), 333-342.
- [8] <sup>2</sup> K. Snyder, *c-Dominating Sets for Families of Graphs*, (2011), University of Mary Washington.
- [9] Umilasari, R. 2015, *Bilangan Dominasi Jarak Dua pada Graf-graf Hasil Operasi Korona dan Comb*, Tidak Diterbitkan. Tesis. Surabaya: ITS.
- [10] <sup>2</sup> Vikade,W.D, 2016. *Bilangan Dominasi Jarak Dua pada Graf Hasil Operasi*, Tidak Diterbitkan. Tesis. Jember: UNEJ.

# BILANGAN DOMINASI JARAK DUA PADA GRAF HASIL OPERASI SHACKLE

## ORIGINALITY REPORT

20%

SIMILARITY INDEX

18%

INTERNET SOURCES

6%

PUBLICATIONS

7%

STUDENT PAPERS

## PRIMARY SOURCES

1	<a href="http://www.ijc.or.id">www.ijc.or.id</a> Internet Source	9%
2	<a href="http://repository.its.ac.id">repository.its.ac.id</a> Internet Source	7%
3	<a href="http://ajc.maths.uq.edu.au">ajc.maths.uq.edu.au</a> Internet Source	1%
4	Submitted to Universitas Muhammadiyah Surakarta Student Paper	1%
5	<a href="http://eprints.radenfatah.ac.id">eprints.radenfatah.ac.id</a> Internet Source	1%
6	<a href="http://library-ump.org">library-ump.org</a> Internet Source	<1%
7	<a href="http://media.neliti.com">media.neliti.com</a> Internet Source	<1%

Exclude quotes Off

Exclude bibliography Off

Exclude matches Off