

Dimensi Metrik dan Dimensi Partisi dari Famili Graf Tangga

Ilham Saifudin¹⁾

¹⁾Jurusan Teknik Informatika, Fakultas Teknik, Universitas Muhammadiyah Jember
Jl. Karimata No. 49 Jember Kode Pos 68121
Email : ¹⁾ ilham.saifudin@unmuhjember.com

ABSTRAK

Misal G sebuah graf terhubung dan $d(x,y)$ merupakan jarak antara titik x dan y dalam graf G . Untuk himpunan terurut yaitu $W = \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_k\}$ dari himpunan titik di graf terhubung G dan sebuah titik v di G , k -vektor $r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), d(v, w_3), \dots, d(v, w_k))$. Jarak minimum v ke W adalah himpunan penyelesaian di G atau dapat disebut dimensi metrik $\dim(G)$. Sedangkan, untuk sebuah titik v dari graf G dan sebuah himpunan bagian S pada $V(G)$, jarak antara v dan S adalah $d(v, S) = \min d(v, x) | x \in S$. Untuk k -partisi terurut $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, \dots, S_k\}$ dari $V(G)$ merupakan representasi v ke Π didefinisikan sebagai k -vektor $r(v|\Pi) = (d(v, S_1), d(v, S_2), d(v, S_3), \dots, d(v, S_k))$. Partisi Π disebut partisi pembeda, jika k -vektor $d(v|\Pi) = v \in V(G)$ adalah pembeda. Kardinalitas minimal dari partisi pembeda adalah dimensi partisi $pd(G)$. Pada artikel ini akan ditentukan nilai dari dimensi metrik dan dimensi partisi pada Famili Graf Tangga.

Kata kunci: Dimensi Metrik, Dimensi Partisi, Famili Graf Tangga

1. PENDAHULUAN

Graf adalah salah satu pokok bahasan Matematika Diskrit yang telah lama dikenalkan dan banyak diaplikasikan pada berbagai bidang. Dalam merepresentasikan visual dari suatu graf yaitu dengan menyatakan objek dengan simpul, noktah, bulatan, titik ataupun *vertex*. Sedangkan hubungan antara objek yang satu dengan lainnya dinyatakan dengan garis, sisi, atau *edge* (Harary, 1969). Secara umum, graf adalah pasangan himpunan (V, E) dimana V adalah himpunan tidak kosong dari titik dan E adalah himpunan tidak kosong atau yang menghubungkan sepasang titik pada suatu graf. Misalnya $V = v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ dan $E = e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ atau $E = (v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), \dots, (v_{n-1}, v_n)$, dimana $e = (v_i, v_j)$ yang artinya sisi yang menghubungkan titik v_i dan v_j (Munir, 2010).

Salah satu topik yang menarik pada teori graf adalah dimensi metrik dan

dimensi partisi. Dimensi metrik dan dimensi partisi sudah ada sejak tahun 1976 dengan jurnal yang berjudul *On Metric Dimension of The Graph* (Harary, et al, 1976). Selain itu, juga banyak diteliti diantaranya tentang dimensi partisi pada Graf Roda W_n oleh Tomescu, I Javaid, dan Slamim (Tomescu, et al, 2007). Contoh aplikasi yang menggunakan dimensi metrik dan dimensi partisi yaitu navigasi robot, dimana sebuah robot bergerak dari satu titik lokasi ke titik lainnya pada bidang dengan meminimalkan kesalahan yang terjadi dalam menerjemahkan petunjuk (kode) yang didapatkan dari titik-titik lokasi tersebut. Untuk itu, setiap titik lokasi pada bidang gerak robot harus memberikan kode yang berbeda dan unik. Jika titik lokasi dipandang sebagai titik dan lintasan robot dipandang sebagai sebuah sisi, maka pada bidang gerak robot dapat direpresentasikan sebagai graf. Agar robot dapat bergerak secara efisien, maka

robot harus cepat menerjemahkan kode titik-titik lokasi yang dilaluinya. Untuk itu, titik lokasi harus mempunyai komponen yang seminimal mungkin. Jika komponen kode titik lokasi menggunakan pengertian jarak, maka masalah ini disebut dimensi metrik (Khuller, et al, 1996).

Dalam artikel ini, akan membahas nilai dimensi metrik dan dimensi partisi beberapa Famili Graf Tangga. Graf yang digunakan diantaranya: Graf Tangga L_n , Graf Tangga Tiga-siklus TCL_n , dan Graf Tangga Permata DI_n . Beberapa keterangan di atas yang melatar belakangi peneliti untuk melakukan penelitian dengan judul Dimensi Metrik dan Dimensi Partisi dari Famili Graf Tangga.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Dimensi Metrik

Definisi jarak pada graf (Chartand, et al, 2000), dimana untuk titik u dan v di graf terhubung G , jarak $d(u, v)$ adalah panjang lintasan terpendek antara u dan v di G . Untuk himpunan terurut $W = \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_k\}$ dari himpunan titik di graf terhubung G dan sebuah titik v di G , k -vektor $r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), d(v, w_3), \dots, d(v, w_k))$, dimana koordinat metrik dari v terhadap W . Himpunan W disebut himpunan pembeda untuk G memiliki koordinat metrik yang berbeda. Sehingga minimum kardinalitas dari himpunan pembeda atau basis dari G disebut dimensi metrik atau dapat dinotasikan $dim(G)$.

2.2 Dimensi Partisi

Pada dimensi partisi dapat diilustrasikan sebagai berikut. Misalkan terdapat sebuah graf terhubung G dengan $V(G)$ adalah himpunan titik-titiknya, S adalah himpunan bagian dari $V(G)$ dan v titik di G , jarak antara v dan S dinotasikan

$d(v, S)$ didefinisikan sebagai $d(v, S) = \min \{d(v, x) | x \in S\}$. Misalkan terdapat sebuah graf terhubung G dan k -buah partisi $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, \dots, S_k\}$ dari $V(G)$ dan v di titik G . Koordinat v terhadap Π didefinisikan sebagai $r(v|\Pi) = ((v, S_1), (v, S_2), \dots, (v, S_k))$.

Partisi Π dinyatakan partisi pembeda, jika k -vektor $(r|\Pi)$ untuk setiap $v \in V(G)$ berbeda. Nilai minimum k agar terdapat partisi pembeda dari $V(G)$ adalah dimensi partisi dari G atau dapat dinotasikan $pd(G)$.

Pada dimensi partisi dan dimensi metrik memiliki keterkaitan. Keterkaitan tersebut dapat dilihat pada teorema berikut :

Teorema 2.1 (Chartrand, et al, 2000) Jika G adalah graf terhubung tidak trivial maka $pd(G) \leq dim(G) + 1$.

Bukti. Misalkan $dim(G) = k$ dan misal $W = \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_k\}$ adalah basis dari G . Anggap partisi terurut $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, \dots, S_{k+1}\}$ dari himpunan titik $V(G)$, dimana $S_i = \{w_i\}, (1 \leq i \leq k)$ dan $S_{k+1} = V(G) - W$. Oleh karena itu $r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), d(v, w_3), \dots, d(v, w_k), 0)$ untuk $v \in V(G) - W$ dan W adalah himpunan penyelesaian dari G . Hal ini mengakibatkan koordinat $r(v|\Pi)$, untuk $v \in S_{k+1}$ berbeda. Lebih lanjut, hanya koordinat $r(w_i|\Pi)$ untuk $1 \leq i \leq k$, memiliki elemen ke- i sama dengan 0 , yang mengakibatkan $r(v|\Pi) \neq r(w_i|\Pi)$ untuk semua $v \in V(G) - W$ dan semua i dengan $1 \leq i \leq k$. Jadi, Π adalah penyelesaian partisi $k + 1$ dari G dan $pd(G) \leq dim(G) + 1$.

Beberapa hasil penelitian terkait dimensi metrik dan dimensi partisi yang diterbitkan mulai tahun 2012, dapat dilihat pada rangkuman tabel 1.

Tabel 1. Hasil Penelitian (*dim*) dan (*pd*)

Graf	Hasil	Ket.
(Graf Gir); $n \geq 2$	$pd(G_{2n}) = k$	Riza, et al, 2012
(Graf Gir+anting G'_{2n}); $n \geq 2$	$pd(G'_{2n}) = 3; 2 \leq n \leq 4$ $pd(G'_{2n}) = k; n \geq 4$	Darmaji, et al, 2012
(Graf Korona $C_m \odot K_n$); $m \geq 3, n \geq 1$	$pd(C_m \odot K_n) = 3; n = 1$ $pd(C_m \odot K_n) = p; n \geq 1$	Yogi, et al, 2012
(Graf Sikel C_n); $n \geq 3$	$dim(C_n) = 2; n \geq 3$	Septiani, et al, 2012
(Graf Bipartit Komplit $K_{m,n}$)	$dim(K_{m,n}) = n - 2; n \geq$	Septiani, et al, 2012
(Graf Kipas F_n)	$pd(F_n) = 3; 4 \leq n \leq 8$ $pd(F_n) = 4; 9 \leq n \leq 13$	Noviansyah, et al, 2012
(Graf Kincir $[K_i]_n$); $n \geq 2$	$pd([K_i]_n) = \left\lfloor \frac{1}{2}(1 + \sqrt{8n + 1}) \right\rfloor$	Noviansyah, et al, 2012

3. METODE PENELITIAN

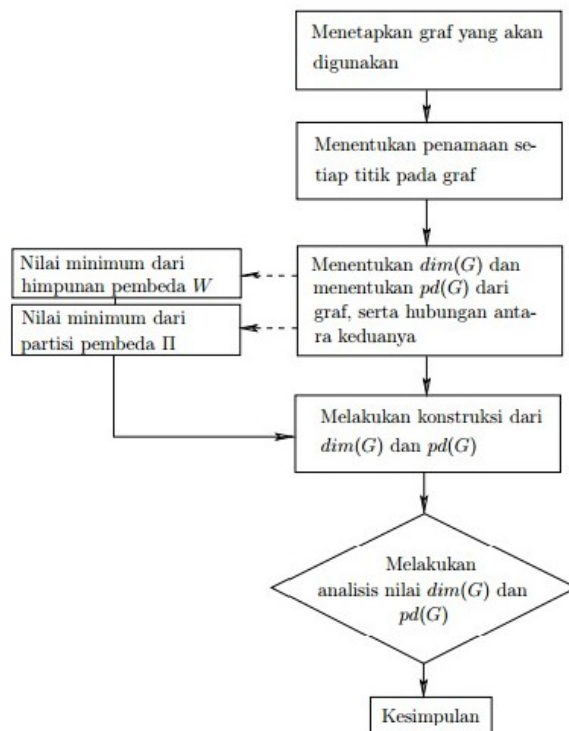
Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode pendeteksian pola (*pattern recognition*) dan deduktif aksiomatik. Metode pendeteksian pola yaitu mencari pola untuk dilakukan konstruksi himpunan pembeda pada dimensi metrik (*dim*) dan dimensi partisi (*pd*) sedemikian hingga nilai koordinat minimum dan berbeda. Sedangkan, deduktif aksiomatik yaitu metode penelitian yang menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dan logika matematika dengan menggunakan aksioma atau teorema yang telah ada untuk memecahkan suatu masalah. Kemudian metode tersebut diterapkan dalam dimensi metrik dan dimensi partisi pada beberapa Famili Graf Tangga diantaranya : Graf Tangga L_n , Graf Tangga Tiga-siklus TCL_n , dan Graf Tangga Permata DL_n .

Di bawah ini akan dijelaskan uraian rancangan penelitian beserta alur penelitian yang digunakan dalam penelitian, berikut uraiannya:

1. Menetapkan graf yang akan digunakan untuk dianalisa dimensi metrik dan

dimensi partisinya.

- Menentukan penamaan setiap titik sedemikian hingga titiknya berbeda dan menghasilkan formulasi yang memetakan himpunan titik.
- Menentukan dimensi metrik $dim(G)$ dan dimensi partisinya $pd(G)$ pada Famili Graf Tangga.
- Melakukan konstruksi terhadap titik koordinat dari dimensi metrik $dim(G)$ dan dimensi partisinya $pd(G)$ pada Famili Graf Tangga.
- Melakukan analisis dari nilai dimensi metrik $dim(G)$ dan dimensi partisinya $pd(G)$ pada Famili Graf Tangga.
- Melakukan penyimpulan dari analisis nilai dimensi metrik $dim(G)$ dan dimensi partisinya $pd(G)$ pada Famili Graf Tangga.



Gambar 1. Alur Penelitian

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam Penelitian ini diperoleh beberapa teorema dimensi metrik dan dimensi partisi dari beberapa Famili Graf Tangga, meliputi:

4.1 Graf Tangga

Graf Tangga dilambangkan dengan adalah graf sederhana tak berarah dan didefinisikan sebagai produk kartesian dari dan . Ketika dibentuk akan terlihat seperti tangga dengan anak tangga. Graf Tangga memiliki

$$V(L_n) = \{x_i; 1 \leq i \leq n; n \leq 2\} \cup \{y_i; 1 \leq i \leq n; n \leq 2\}$$

$$E(L_n) = \{x_i y_i; 1 \leq i \leq n; n \leq 2\} \cup \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n; n \leq 1\} \cup \{y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n; n \leq 1\}$$

$$|V| = 2n \quad \text{dan} \quad |E|$$

$$= n + 2(n - 1).$$

Sebelum disajikan Teorema dimensi partisi dari Graf Tangga L_n , disajikan terlebih dahulu Teorema dimensi metrik dari Graf Tangga L_n sebagai berikut.

Teorema 0.1 Untuk setiap bilangan bulat $n \geq 2$, nilai dimensi metrik Graf Tangga L_n adalah $dim(L_n) = 2$.

Bukti. Untuk $n \geq 2$, akan dibuktikan bahwa $dim(L_n) \geq 2$. Jika kardinalitas $dim(L_n) = 1$, maka pasti bukan himpunan pembeda dan pasti akan ditemukan sedikitnya dua titik dengan representasi yang sama. Untuk itu, maka sedikitnya ada 2 titik yang merupakan himpunan pembeda, sehingga $dim(L_n) \geq 2$.

Untuk mengetahui $dim(L_n) \leq 2$, maka dilakukan sebuah konstruksi. Misalnya diambil himpunan pembeda $W = \{w_1, w_2\}$, dimana $w_1 = x_1, w_2 = y_1$ atau dapat ditulis $W = \{x_1, y_1\}$, maka diperoleh representasi titik $V(L_n)$ terhadap W :

$$r(x_i | W) = (i - 1, i) \text{ untuk } 1 \leq i \leq n;$$

$$r(y_i | W) = (i, i - 1) \text{ untuk } 1 \leq i \leq n.$$

Dapat dilihat bahwa setiap titik $V(L_n)$ memiliki koordinat berbeda terhadap W dan memiliki kardinalitas minimal, sehingga $dim(L_n) \leq 2$. Oleh karena

$dim(L_n) \geq 2$ dan $dim(L_n) \leq 2$, maka $dim(L_n) = 2$.

Selanjutnya akan disajikan Teorema dimensi partisi dari Graf Tangga L_n .

Teorema 0.2 Untuk setiap bilangan bulat $n \geq 2$, nilai dimensi partisi Graf Tangga L_n adalah $pd(L_n) = 3$.

Bukti. Untuk $n \geq 2$, akan ditunjukkan $pd(L_n) \geq 3$. Jika kardinalitas $pd(L_n) = 2$, maka pasti bukan partisi pembeda dan pasti akan ditemukan sedikitnya dua titik dengan representasi yang sama. Untuk itu, sedikitnya ada 3 partisi yang merupakan partisi pembeda, sehingga $pd(L_n) \geq 3$.

Untuk mengetahui $pd(L_n) \leq 3$, maka dilakukan sebuah konstruksi, misalnya $dim(L_n) = 2$ dan $W = \{x_1, y_1\}$. Kemudian anggap partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$

$$S_k = \begin{cases} \{x_1\}; & \text{untuk } k = 1 \\ \{y_1\}; & \text{untuk } k = 2 \\ \{x_i, y_i | 2 \leq i \leq n\}; & \text{untuk } k = 3 \end{cases}$$

dimana jumlah titik $|S_3| = 2n - 2 < |V| = 2n$ diperoleh representasi yang berbeda pada setiap himpunan titik $V(L_n)$ terhadap Π :

$$r(x_1 | \Pi) = (0, 1, 1),$$

$$r(y_1 | \Pi) = (1, 0, 1),$$

$$r(x_i | \Pi) = (i - 1, i, 0) \text{ untuk } 2 \leq i \leq n,$$

$$r(y_i | \Pi) = (i, i - 1, 0) \text{ untuk } 2 \leq i \leq n.$$

Dapat dilihat bahwa setiap titik $V(L_n)$ memiliki koordinat yang berbeda terhadap Π dan memiliki kardinalitas minimal, karena berdasarkan Teorema 2.1 dinyatakan bahwa $pd(L_n) \leq dim(L_n) + 1 = 3$, sehingga $pd(L_n) \leq 3$. Oleh Karena $pd(L_n) \geq 3$ dan $pd \leq 3$, dengan demikian $pd(L_n) = 3$.

4.2 Graf Tangga Tiga-siklus L_n

Graf Tangga Tiga-siklus adalah salah satu famili dari Graf Tangga. Graf Tangga

Tiga-siklus dilambangkan dengan TCL_n , dimana memiliki

$$V(TCL_n) = \{x_i, y_j, z_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq n + 1\},$$

$$E(TCL_n) = \{y_j z_j; 1 \leq j \leq n - 1\} \cup \{y_j y_{j+1}; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_i y_i, x_i z_i, x_i y_{i+1}, x_i z_{i+1}; 1 \leq i \leq n\}$$

, $p = |V| = 3n + 2$, dan $q = |E| = 6n + 1$.

Sebelum disajikan Teorema dimensi partisi dari Graf tangga Tiga-siklus TCL_n , disajikan terlebih dahulu Teorema dimensi metrik dari Graf Tangga Tiga-siklus TCL_n .

Teorema 0.3 Nilai dimensi metrik Graf Tangga Tiga-siklus TCL_n adalah

$$dim(TCL_n) = \begin{cases} 2; & \text{untuk } 1 \leq n \leq 2 \\ n; & \text{untuk } n \geq 3 \end{cases}$$

Bukti. Untuk $1 \leq n \leq 2$, akan ditunjukkan bahwa $dim(TCL_n) \geq 2$. Misalnya, jika kardinalitas $dim(TCL_n) = 1$, maka pasti akan ditemukan sedikitnya dua titik dengan representasi yang sama. Untuk itu, sedikitnya ada 2 titik yang merupakan himpunan pembeda, sehingga $dim(TCL_n) \geq 2$. Sedangkan untuk mengetahui $dim(TCL_n) \leq 2$, maka dilakukan sebuah konstruksi. Misalnya diambil himpunan $W = \{z_1, z_2\}$, maka diperoleh representasi titik $V(TCL_n)$ terhadap W memiliki koordinat berbeda dan juga memiliki kardinalitas minimal, sehingga $dim(TCL_n) \leq 2$. Oleh karena $dim(TCL_n) \geq 2$ dan $dim(TCL_n) \leq 2$, maka $dim(TCL_n) = 2$.

Untuk $n \geq 3$, akan ditunjukkan bahwa $dim(TCL_n) \geq n$. Misalnya, jika kardinalitas $dim(TCL_n) = n - 1$, maka pasti bukan himpunan pembeda dan pasti akan ditemukan sedikitnya dua titik dengan representasi yang sama. Untuk itu, sedikitnya ada n titik yang merupakan himpunan pembeda. Sehingga, $dim(TCL_n) \geq n$. Sedangkan untuk mengetahui $dim(TCL_n) \leq n$, maka dilakukan sebuah konstruksi. Misalnya diambil himpunan pembeda

$W = \{x_i; 1 \leq i \leq n$ dan $|W| = n$, maka diperoleh representasi titik $V(TCL_n)$ terhadap W memiliki koordinat berbeda dan memiliki kardinalitas minimal, sehingga, $dim(TCL_n) \leq n$. Oleh karena $dim(TCL_n) \geq n$ dan $dim(TCL_n) \leq n$, maka $dim(TCL_n) = n$.

Selanjutnya akan disajikan Teorema dimensi partisi dari Graf Tangga Tiga-siklus.

Teorema 0.4 Nilai dimensi partisi Graf Tangga Tiga-siklus TCL_n adalah

$$pd(TCL_n) = \begin{cases} 3; & \text{untuk } 1 \leq n \leq 2 \\ n + 1; & \text{untuk } n \geq 3 \end{cases}$$

Bukti. Untuk $1 \leq n \leq 2$, akan ditunjukkan bahwa $pd(TCL_n) \geq 3$. Misalnya, jika kardinalitas $pd(TCL_n) = 2$, maka pasti bukan partisi pembeda dan pasti akan ditemukan sedikitnya dua titik dengan representasi yang sama. Untuk itu, sedikitnya ada 3 partisi yang merupakan partisi pembeda, sehingga $pd(TCL_n) \geq 3$. Sedangkan, untuk mengetahui $pd(TCL_n) \leq 3$, maka dilakukan sebuah konstruksi. Misalnya $dim(TCL_n) = 2$. Kemudian, untuk $n = 1$, anggap partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$, sedemikian hingga: $S_1 = \{z_1\}$, $S_2 = \{z_2\}$, dan $S_3 = \{x_1, y_1, y_2\}$ dan untuk $n = 2$ sedemikian hingga: $S_1 = \{z_1\}$, $S_2 = \{z_2\}$, dan $S_3 = \{x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, z_3\}$ diperoleh representasi yang berbeda pada setiap himpunan titik $V(TCL_n)$ terhadap Π dan memiliki kardinalitas minimal, karena berdasarkan Teorema 2.1 dinyatakan bahwa $pd(TCL_n) \leq dim(TCL_n) + 1 = 3$, sehingga $pd(TCL_n) \leq 3$. Oleh karena, $pd(TCL_n) \geq 3$ dan $pd(TCL_n) \leq 3$, dengan demikian $pd(TCL_n) = 3$.

Untuk $n \geq 3$, akan ditunjukkan bahwa $pd(TCL_n) \geq n + 1$. Jika kardinalitas $pd(TCL_n) = n$, maka pasti bukan partisi

pembeda dan pasti akan ditemukan sedikitnya dua titik dengan representasi yang sama. Untuk itu, sedikitnya ada $n + 1$ partisi yang merupakan partisi pembeda, sehingga $pd(TCL_n) \geq n + 1$.

Sedangkan untuk mengetahui $pd(TCL_n) \leq n + 1$, maka dilakukan sebuah konstruksi, misalnya $dim(TCL_n) = n$. Kemudian anggap partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, \dots, S_{n+1}\}$, sedemikian hingga:

$$S_k = \begin{cases} \{x_i | 1 \leq i \leq n\}; & \text{untuk } 1 \leq k \leq n \\ \{y_i, z_i | 1 \leq i \leq n + 1\}; & \text{untuk } k = n + 1 \end{cases}$$

dimana jumlah titik $|S_n| =$ dan $|S_{n+1}| = 2n + 1$ diperoleh representasi yang berbeda pada setiap himpunan titik $V(TCL_n)$ terhadap W dan memiliki kardinalitas minimal, karena berdasarkan Teorema 2.1 dinyatakan bahwa $pd(TCL_n) \leq dim(TCL_n) + 1 = n + 1$, maka $pd(TCL_n) \leq n + 1$. Oleh karena, $pd(TCL_n) \geq n + 1$ dan $pd(TCL_n) \leq n + 1$, dengan demikian $pd(TCL_n) = n + 1$.

4.3 Graf Tangga Permata

Graf Tangga Permata adalah juga salah satu Famili Graf Tangga. Graf Tangga Permata dilambangkan DI_n memiliki $V(DI_n) = \{x_i, y_i, z_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 2n\}$, dan $E(DI_n) = \{x_i x_{i+1}, y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{x_i y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_j z_{j+1}; 1 \leq j \leq 2n - 2, \text{ genap}\} \cup \{x_i z_{2i-1}, x_i z_{2i}, y_i z_{2i-1}, y_i z_{2i}; 1 \leq i \leq n\}$, $p = |V| = 4n$ dan $q = |E| = 8n - 3$. Sebelum disajikan Teorema dimensi partisi, terlebih dahulu disajikan Teorema dimensi metrik dari Graf Tangga Permata DI_n sebagai berikut.

Teorema 0.5 Setiap bilangan bulat $n \geq 2$, nilai dimensi metrik Graf Tangga Permata adalah $dim(DI_n) = \left\lceil 3 \binom{n+1}{2} \right\rceil - 2$.

Bukti. Untuk $n \geq 2$, akan ditunjukkan bahwa $dim(DI_n) \geq \left\lceil 3 \binom{n+1}{2} \right\rceil - 2$. Jika Kardinalitas $dim(DI_n) = \left\lceil 3 \binom{n+1}{2} \right\rceil - 3$, maka pasti bukan himpunan pembeda dan pasti akan ditemukan sedikitnya dua titik dengan representasi yang sama. Untuk itu, sedikitnya ada $\left\lceil 3 \binom{n+1}{2} \right\rceil - 2$ titik yang merupakan himpunan pembeda, sehingga $dim(DI_n) \geq \left\lceil 3 \binom{n+1}{2} \right\rceil - 2$.

Sedangkan untuk mengetahui $dim(DI_n) \leq \left\lceil 3 \binom{n+1}{2} \right\rceil - 2$, maka dilakukan konstruksi, misalnya diambil himpunan pembeda $W = \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_{\left\lceil 3 \binom{n+1}{2} \right\rceil - 2}\}$, sedemikian hingga:

$$w_k = \begin{cases} \{x_i | 1 \leq i \leq n, i \text{ genap}\}; & \text{untuk } 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \\ \{z_i | 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil}\}; & \text{untuk } \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \leq k \leq \left\lceil 3 \binom{n+1}{2} \right\rceil - 2 \end{cases}$$

dan jumlah titik $|W| = \left\lceil 3 \binom{n+1}{2} \right\rceil - 2$, maka diperoleh representasi titik $V(DI_n)$ terhadap W memiliki koordinat berbeda dan memiliki kardinalitas minimal, sehingga $dim(DI_n) \leq \left\lceil 3 \binom{n+1}{2} \right\rceil - 2$. Oleh karena, $dim(DI_n) \geq \left\lceil 3 \binom{n+1}{2} \right\rceil - 2$ dan $dim(DI_n) \leq \left\lceil 3 \binom{n+1}{2} \right\rceil - 2$, maka $dim(DI_n) = \left\lceil 3 \binom{n+1}{2} \right\rceil - 2$.

Selanjutnya, akan disajikan Teorema dimensi partisi dari Graf Tangga Permata Dl_n .

Teorema 0.6 Untuk setiap bilangan bulat $n \geq 2$, nilai dimensi partisi Graf Tangga Permata Dl_n adalah $pd(Dl_n) = \left\lceil 3 \left(\frac{n+1}{2} \right) \right\rceil - 1$.

Bukti. Untuk $n \geq 2$, akan ditunjukkan bahwa $pd(Dl_n) \geq \left\lceil 3 \left(\frac{n+1}{2} \right) \right\rceil - 1$. Jika kardinalitas $pd(Dl_n) = \left\lceil 3 \left(\frac{n+1}{2} \right) \right\rceil - 2$, maka pasti bukan partisi pembeda dan pasti akan ditemukan setidaknya dua titik dengan representasi yang sama. Untuk itu, setidaknya ada $\left\lceil 3 \left(\frac{n+1}{2} \right) \right\rceil - 1$ partisi yang merupakan partisi pembeda, sehingga $pd(Dl_n) \geq \left\lceil 3 \left(\frac{n+1}{2} \right) \right\rceil - 1$.

Untuk mengetahui $pd(Dl_n) \leq \left\lceil 3 \left(\frac{n+1}{2} \right) \right\rceil - 1$, maka dilakukan sebuah konstruksi, misalnya $dim(Dl_n) = \left\lceil 3 \left(\frac{n+1}{2} \right) \right\rceil - 2$. Kemudian anggap partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, \dots, S_{\left\lceil 3 \left(\frac{n+1}{2} \right) \right\rceil - 1}\}$, sedemikian hingga:

$$S_k = \begin{cases} \{x_i | 1 \leq i \leq n, i \text{ genap}\}; & \text{untuk } 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \\ \{z_i | 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil}\}; & \text{untuk } \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \leq k \leq \left\lceil 3 \left(\frac{n+1}{2} \right) \right\rceil - 2 \\ \{x_{i \text{ ganjil}}, y_i, z_{i \text{ genap}} | 1 \leq i \leq n\}; & \text{untuk } k = \left\lceil 3 \left(\frac{n+1}{2} \right) \right\rceil - 1 \end{cases}$$

dimana jumlah titik $|S| = \left\lceil 3 \left(\frac{n+1}{2} \right) \right\rceil -$ dan $|S_{\left\lceil 3 \left(\frac{n+1}{2} \right) \right\rceil - 1}| = \left\lfloor 5 \left(\frac{n+1}{2} \right) \right\rfloor -$ diperoleh representasi yang berbeda pada setiap himpunan titik $V(Dl)$ terhadap dan memiliki kardinalitas minimal, karena berdasarkan Teorema 2.1 dinyatakan bahwa $pd(Dl_n) \leq dim(Dl_n) + 1 = \left\lceil 3 \left(\frac{n+1}{2} \right) \right\rceil -$, sehingga $pd(Dl_n) \leq \left\lceil 3 \left(\frac{n+1}{2} \right) \right\rceil -$. Oleh Karena, $pd(Dl_n) \geq \left\lceil 3 \left(\frac{n+1}{2} \right) \right\rceil -$ dan $pd(Dl_n) \leq \left\lceil 3 \left(\frac{n+1}{2} \right) \right\rceil -$, dengan demikian $pd(Dl_n) = \left\lceil 3 \left(\frac{n+1}{2} \right) \right\rceil -$.

5 KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan penelitian di atas dapat disimpulkan bahwa nilai dimensi metrik dan dimensi partisi dari beberapa Famili Graf Tangga sebagai berikut :

1. Nilai dimensi metrik (dim) dari Famili Graf Tangga diantaranya:

a. Dimensi metrik Graf Tangga L_n dengan $n \geq 2$ adalah 2.

b. Dimensi metrik Graf Tangga Tiga-siklus TCL_n :

$$dim(TCL_n) = \begin{cases} 2; & \text{untuk } 1 \leq n \leq 2 \\ n; & \text{untuk } n \geq 3 \end{cases}$$

c. Dimensi metrik Graf Tangga Permata Dl_n dengan $n \geq 2$ adalah $\left\lceil 3 \left(\frac{n+1}{2} \right) \right\rceil - 2$.

2. Nilai dimensi partisi (pd) dari Famili Graf Tangga diantaranya:

a. Dimensi partisi Graf Tangga L_n dengan $n \geq 2$ adalah 3.

b. Dimensi partisi Graf Tangga Tiga-siklus TCL_n adalah

$$pd(TCL_n) = \begin{cases} 3; & \text{untuk } 1 \leq n \leq 2 \\ n + 1; & \text{untuk } n \geq 3 \end{cases}$$

c. Dimensi partisi Graf Tangga Permata Dl_n dengan $n \geq 2$ adalah $\left\lceil 3 \left(\frac{n+1}{2} \right) \right\rceil - 1$.

Setelah dilakukan penelitian mengenai dimensi metrik (*dim*) dan dimensi partisi (*pd*) pada beberapa Famili Graf Tangga, maka diberikan saran bagi pembaca yang berminat meneliti di bidang ini, yaitu nilai dimensi metrik dan dimensi partisi pada graf khusus dan graf hasil operasi lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

- Chartrand, G., Salehi, E., dan Zhang, P. 2000. *The Partition Dimension Of a Graph*. *Aequation Math*. Vol. 59, pp. 45-54
- Darmaji. 2011. *Dimensi Partisi Graf Multipartit dan Graf Hasil Korona Dua Graf Terhubung*. Disertasi: Tidak dipublikasi. Jurusan Matematika: ITB
- F. Harary, dan R. A. Melter. 1976. *On The Metric Dimension Of a Graph*. *Ars Combin*. Vol. 2, pp. 191-195
- Harary, F. 1969. *Graph Theory*. wesley Publishing Company, Inc
- Munir, R. 2010. *Matematika Diskrit*. Informatika Bandung: ITB
- R. Amalia, dan Darmaji. 2012. *Dimensi Partisi pada Graf Serupa Roda dengan Penambahan Anting*. *Jurnal: Teknik ITS*. No. 1, Vol: 1
- R. Riza. 2012. *Dimensi Partisi pada Graf Gir*. *Jurnal: FMIPA UNAND*. No. 12, Vol: 1
- Septiana, E, dan Budi, R. 2012. *Dimensi Metrik pada Graf Lintasan, Graf Komplit, Graf Sikel, Graf Bintang, dan Graf Bipartit Komplit*. *Jurnal: Universitas Negeri surabaya*. No. 1. Vol: 1
- S. Khuller, dab B, Rahavachari, A. 1996. *Resenfelt, Landmark in Graph, Discret. Appl. Math*. Vol. 70, pp. 217-229
- Tomescu, I., javaid, I., dan Slamini. 2007. *On The Partition Dimension and Connected Partition Of Wheels*. *Ars Combin*. Vol. 84, pp. 311-317

Bilangan Dominasi Jarak Dua Pada Graf Hasil Operasi Amalgamasi

Ilham Saifudin¹⁾

¹⁾Jurusan Teknik Informatika, Fakultas Teknik, Universitas Muhammadiyah Jember
Jl. Karimata No. 49 Jember Kode Pos 68121
Email : ¹⁾ilham.saifudin@unmuhjember.ac.id

ABSTRAK

Untuk setiap graf $G = (V, E), S \subseteq V(G)$ dapat dikatakan himpunan dominasi dari G jika setiap simpul $u \in V(G)$ bertetangga dengan S . Dengan demikian untuk setiap simpul $u \in V(G)$, ada simpul $v \in S$ dimana jarak antara u dan v maksimal satu. Kardinalitas minimum pada himpunan dominasi di graf G disebut dengan bilangan dominasi. Pada paper ini akan ditentukan himpunan dominasi jarak dua pada graf G yang didefinisikan dengan $S_2 \subseteq V(G)$, dimana untuk setiap simpul $u \in V(G)$ ada simpul $w \in S_2$ dimana jarak antara u dan w maksimal dua. Kardinalitas minimum pada himpunan dominasi jarak dua di graf G disebut dengan bilangan dominasi jarak dua. Graf G yang dimaksud pada paper ini yaitu graf hasil operasi amalgamasi, diantaranya graf hasil operasi amalgamasi graf Helm, graf hasil operasi amalgamasi graf Bunga, graf hasil operasi amalgamasi graf *Friendship*.

Kata Kunci : Bilangan Dominasi Jarak Dua, Graf Hasil Operasi Amalgamasi

1. PENDAHULUAN

Bilangan dominasi merupakan salah satu topik yang menarik pada teori graf. Bilangan dominasi sudah ada sejak tahun 1850, bilangan dominasi ini muncul pada kalangan penggemar catur di Eropa yaitu penentuan berapa banyaknya ratu yang harus ditempatkan pada papan catur 8×8 , sehingga semua petak pada papan catur dapat dikuasai oleh ratu dan jumlah ratu yang diletakkan pada papan catur harus minimal. Hasil penelitian sebelumnya diantaranya tentang bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi oleh Wicha dan Slamin.

Bilangan dominasi dapat dikatakan sebagai banyaknya simpul pendominasi dalam suatu graf yang dapat mendominasi simpul-simpul terhubung di sekitarnya, dengan simpul pendominasi berjumlah minimal. Bilangan dominasi dinotasikan dengan $\gamma(G)$. Bilangan dominasi juga telah banyak diaplikasikan

dalam kehidupan. Sebagai contoh pada penempatan mobil listrik pada lahan perkebunan, penempatan CCTV pada sudut-sudut tertentu agar dapat menjangkau area di sekitarnya pada jarak tertentu. Tujuan menerapkan himpunan dominasi pada penempatan mobil listrik ataupun CCTV yaitu agar lebih efisien dalam menempatkannya serta dapat meminimalisir jumlahnya, sehingga lebih maksimal dalam penggunaannya.

Dalam paper ini penulis meneliti bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi amalgamasi (Carlson, K. 2006) dan (Maryati, et al 2010), diantaranya adalah graf hasil operasi amalgamasi graf Helm atau $Amal(H_n, v, t)$, graf hasil operasi amalgamasi graf Bunga atau $Amal(Fl_n, v, t)$, dan graf hasil operasi amalgamasi graf *Friendship* atau $Amal(f_n, v, t)$.

2. TINJAUAN PUSTAKA

Himpunan dominasi (dominating set) S pada graf G adalah subset dari $V(G)$ sedemikian setiap simpul G yang bukan elemen S terhubung dan berjarak satu terhadap S (Harary, et al F. 1969) dan (Haynes, T. W, et al. 1996). Kardinalitas minimum di antara himpunan dominasi pada graf G disebut bilangan dominasi (dominating number) dari graf G yang dinotasikan dengan $\gamma(G)$.

Himpunan dominasi jarak dua dinotasikan dengan S_2 yaitu subset dari $V(G)$ sedemikian simpul G yang bukan elemen S_2 terhubung dan memiliki jarak maksimal 2 terhadap S_2 (Darmaji, et al. 2014), (Sridharan, N, et al. 2002), dan (Umilasari, R. 2015). Bilangan dominasi jarak dua dari suatu graf dinotasikan dengan $\gamma_2(G)$, yaitu kardinalitas minimum dari himpunan dominasi jarak dua. Dalam menentukan simpul dominasi pada sebarang graf dapat menggunakan sebuah algoritma yang dinamakan algoritma greedy (Hedetniemi, S. T, et al. 1986) dan (Munir, R. 2004).

Lema yang digunakan

Lema 1. *Bilangan dominasi jarak dua pada sebarang graf reguler G berderajat*

$$r \text{ adalah } \gamma_2(G) \geq \left\lfloor \frac{|V|}{r^2+1} \right\rfloor$$

Bukti. Graf G adalah graf reguler jumlah simpul sebanyak $|V|$ dan derajat setiap simpul adalah r . Berdasarkan observasi, simpul maksimal yang dapat didominasi oleh sebuah simpul pendominasi adalah $r^2 + 1$. Dengan demikian jumlah minimal simpul pendominasi adalah $\left\lfloor \frac{|V|}{r^2+1} \right\rfloor$. Jadi, $\gamma_2(G) \geq \left\lfloor \frac{|V|}{r^2+1} \right\rfloor$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\left\lfloor \frac{|V|}{r^2+1} \right\rfloor$ adalah jumlah simpul

pendominasi minimal yang dapat mendominasi semua simpul di graf G . Andaikan $\gamma_2(G) \geq \left\lfloor \frac{|V|}{r^2+1} \right\rfloor - 1$, maka banyak simpul maksimal yang dapat didominasi adalah $r^2 + 1 \left(\left\lfloor \frac{|V|}{r^2+1} \right\rfloor - 1 \right) \leq r^2 + 1 \left(\frac{|V|+r^2}{r^2+1} - 1 \right) = |V| - 1$. Artinya, banyak simpul maksimal yang dapat didominasi adalah $|V| - 1$, maka terdapat minimal satu simpul yang belum terdominasi. Dengan demikian $S_2 = \gamma_2(G) \neq \left\lfloor \frac{|V|}{r^2+1} \right\rfloor - 1$. Karena $\left\lfloor \frac{|V|}{r^2+1} \right\rfloor$ adalah jumlah minimal simpul pendominasi yang dapat mendominasi semua simpul di G maka $\gamma_2(G) \geq \left\lfloor \frac{|V|}{r^2+1} \right\rfloor$.

Lema 2. *Bilangan dominasi jarak dua pada sebarang graf G adalah*

$$\gamma_2(G) \geq \left\lfloor \frac{|V|}{1+\Delta(G) + \sum N_2} \right\rfloor.$$

(Vikade et al, 2016, 2016)

Bukti. Graf G adalah sebarang graf dengan jumlah simpul sebanyak $|V|$, misal x adalah sebuah simpul dengan derajat maksimal $\Delta(G)$ maka x sebagai himpunan dominasi dan $N_2[x]$ merupakan simpul berjarak dua dari x . Sehingga $\gamma_2(G) \geq \left\lfloor \frac{|V|}{1+\Delta(G) + \sum N_2} \right\rfloor$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\left\lfloor \frac{|V|}{1+\Delta(G) + \sum N_2} \right\rfloor$ adalah jumlah simpul pendominasi minimal. Andai $\gamma_2(G) \geq \left\lfloor \frac{|V|}{1+\Delta(G) + \sum N_2} \right\rfloor - 1$, maka banyak simpul maksimal yang dapat didominasi adalah $1 + \Delta(G) + \sum N_2 \left(\left\lfloor \frac{|V|}{1+\Delta(G) + \sum N_2} \right\rfloor - 1 \right) \leq 1 + \Delta(G) + \sum N_2 \left(\frac{|V|}{1+\Delta(G) + \sum N_2} - 1 \right) = |V| - 1$.

Artinya banyak simpul yang dapat didominasi adalah $|V| - 1$, maka terdapat minimal satu simpul yang tidak didominasi. Dengan demikian $S_2 =$

$$\gamma_2(G) \neq \left\lceil \frac{|V|}{1+\Delta(G)+\sum N_2} \right\rceil - 1, \quad \text{karena}$$

$$\left\lceil \frac{|V|}{1+\Delta(G)+\sum N_2} \right\rceil \text{ adalah jumlah simpul}$$

pendominasi minimal maka $\gamma_2(G) \geq \left\lceil \frac{|V|}{1+\Delta(G)+\sum N_2} \right\rceil$.

Teorema yang digunakan

Teorema 1. Diberikan sebarang graf terhubung G sebanyak t kopi maka bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi amalgamasi adalah

$$\gamma_2(\text{Amal}(G, v, t)) = \begin{cases} 1 & ; \text{untuk } \text{diam}(G) \leq 2 \\ \gamma_2(G)t - t + 1; & \text{untuk } \text{diam}(G) \text{ yang lain} \end{cases}$$

(Vikade et al, 2016, 2016)

Bukti. Diketahui $\text{Amal}(G, v, t)$ merupakan hasil operasi amalgamasi dari graf G sebanyak t kopi dengan v adalah simpul terminal. Jika sebuah graf G memiliki n simpul, maka $\text{Amal}(G, v, t)$ memiliki $nt - t + 1$ simpul. Berikut ini akan dibuktikan bilangan dominasi jarak dua pada hasil operasi amalgamasi sebarang graf G yang memiliki diameter $\text{diam}(G) \leq 2$.

Sebuah graf G dengan $\text{diam}(G) \leq 2$, jika dioperasikan amalgamasi, mengakibatkan hasil operasi amalgamasi $\text{Amal}(G, v, t)$ memiliki diameter kurang dari atau sama dengan 4. Sehingga sebuah simpul pendominasi yang diletakkan di simpul terminal akan dapat mendominasi semuruh simpul pada $\text{Amal}(G, v, t)$. Dengan demikian $\gamma_2(\text{Amal}(G, v, t)) = 1$ dengan $\text{diam}(G) \leq 4$.

Selanjutnya untuk membuktikan hasil operasi amalgamasi pada sebarang graf G dengan $\text{diam}(G) > 2$ akan dibagi menjadi dua kasus yaitu $v \in S_2$ dan v bukan elemen S_2 , dimana v adalah simpul

terminal pada graf $\text{Amal}(G, v, t)$ dan S_2 adalah himpunan simpul dominasi jarak dua pada suatu graf G .

Kasus 1. $v \in S_2$

Pada kasus dimana $v \in S_2$ untuk jumlah kopian ke-1 sampai kopian ke t , bilangan dominasi jarak dua pada $\text{Amal}(G, v, t)$ akan membentuk barisan aritmatika sebagai berikut.

$$\begin{aligned} t = 1 & \rightarrow \gamma_2(G) \\ t = 2 & \rightarrow 2\gamma_2(G) - 2 + 1 = 2\gamma_2(G) - 1 \\ t = 3 & \rightarrow 3\gamma_2(G) - 3 + 1 = 3\gamma_2(G) - 2 \\ & \vdots \\ t = t & \rightarrow \gamma_2(G)t - t + 1 \end{aligned}$$

Maka dengan menggunakan barisan aritmatika akan didapat bilangan dominasi jarak dua dari graf hasil operasi amalgamasi sebanyak t kopi adalah $\gamma_2(G)t - t + 1$. Berikutnya akan dibuktikan bilangan dominasi tersebut dengan menggunakan induksi matematika sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \gamma_2(\text{Amal}(G, v, t)) &= \gamma_2(G)t - t + 1 \\ \text{Akan dibuktikan untuk } t = 1 &\text{ adalah benar} \\ \gamma_2(\text{Amal}(G, v, 1)) &= \gamma_2(G) \cdot 1 - 1 + 1 \\ \Leftrightarrow \gamma_2(G) &= \gamma_2(G) \\ \text{Asumsikan untuk } t = k &\text{ adalah benar} \\ \gamma_2(\text{Amal}(G, v, k)) &= \gamma_2(G)k - k + 1 \\ \text{Akan dibuktikan untuk } t = k + 1 &\text{ juga benar} \\ \gamma_2(\text{Amal}(G, v, k + 1)) &= \gamma_2(\text{Amal}(G, v, k)) \\ &\quad + \text{ beda} \\ \Leftrightarrow \gamma_2(G)(k + 1) - (k + 1) + 1 &= \gamma_2(G)k - k + 1 \\ &\quad + \gamma_2(G) - 1 \\ \Leftrightarrow \gamma_2(G)k + \gamma_2(G) - k - 1 + 1 &= \gamma_2(G)k + \gamma_2(G) - k \\ \Leftrightarrow \gamma_2(G)k + \gamma_2(G) - k &= \gamma_2(G)k + \gamma_2(G) - k \end{aligned}$$

Dengan demikian pada kasus $v \in S_2$ graf hasil operasi amalgamasi memiliki $\gamma_2(Amal(G, v, t)) = \gamma_2(G)t - t + 1$.

Kasus 2. v bukan elemen S_2

Pada kasus dimana v bukan elemen S_2 untuk jumlah kopian ke-1 sampai kopian ke- t , bilangan dominasi jarak dua pada $Amal(G, v, t)$ akan membentuk barisan aritmatika sebagai berikut.

$$\begin{aligned} t = 1 &\rightarrow \gamma_2(G) \\ t = 2 &\rightarrow 2\gamma_2(G) \\ t = 3 &\rightarrow 3\gamma_2(G) \\ &\vdots \\ t = t &\rightarrow \gamma_2(G)t \end{aligned}$$

Maka dengan menggunakan barisan aritmatika akan didapat bilangan dominasi jarak dua dari graf hasil operasi amalgamasi sebanyak t kopi adalah $\gamma_2(G)t$. Berikutnya akan dibuktikan deret bilangan dominasi dengan menggunakan induksi matematika sebagai berikut.

$$\gamma_2(Amal(G, v, t)) = \gamma_2(G)t$$

Akan dibuktikan untuk $t = 1$ adalah benar

$$\gamma_2(Amal(G, v, 1)) = \gamma_2(G) \cdot 1$$

$$\Leftrightarrow \gamma_2(G) = \gamma_2(G)$$

Asumsikan untuk $t = k$ adalah benar

$$\gamma_2(Amal(G, v, k)) = \gamma_2(G)k$$

Akan dibuktikan untuk $t = k + 1$ juga benar

$$\begin{aligned} \gamma_2(Amal(G, v, k + 1)) &= \gamma_2(Amal(G, v, k)) \\ &\quad + \text{beda} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \gamma_2(G)(k + 1) &= \gamma_2(G)k + \gamma_2(G) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \gamma_2(G)k + \gamma_2(G)$$

$$= \gamma_2(G)k + \gamma_2(G)$$

Dengan demikian pada kasus v bukan elemen S_2 graf hasil operasi amalgamasi memiliki $\gamma_2(Amal(G, v, t)) = \gamma_2(G)t$.

Dari kasus 1 dan 2 dapat diketahui bahwa $\gamma_2(G)t - t + 1 \leq \gamma_2(G)t$ maka $\gamma_2(Amal(G, v, t)) = \gamma_2(G)t - t + 1$. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa

$\gamma_2(G)t - t + 1$ adalah jumlah simpul pendominasi minimal pada graf $Amal(G, v, t)$. Andaikan

$$\begin{aligned} |S_2(Amal(G, v, t))| &= \gamma_2(G)t - t + \\ 1 - 1 &= \gamma_2(G)t - t \quad \text{maka simpul} \\ &\text{maksimal yang dapat didominasi oleh } |S_2| \\ &\text{adalah } 1 + (N_1 + N_2)t \left(\left\lceil \frac{nt-t+1}{1+(N_1+N_2)t} \right\rceil - 1 \right) \leq \\ 1 + (N_1 + N_2)t &\left(\frac{nt-t+1+(N_1+N_2)t}{1+(N_1+N_2)t} - 1 \right) = \\ nt - t. \end{aligned}$$

Dengan demikian tidak semua simpul dapat didominasi, dengan demikian $|S_2(Amal(G, v, t))| \neq \gamma_2(G)t - t$. Karena $\gamma_2(G)t - t + 1 - 1$ adalah jumlah simpul pendominasi yang minimal maka terbukti bahwa $\gamma_2(Amal(G, v, t)) = \gamma_2(G)t - t + 1$.

3. METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah pendeteksian pola, yaitu dengan cara mencari himpunan dominasi sedemikian hingga ditemukan bilangan kardinalitas yang minimum. Selain itu metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah deduktif aksiomatik yaitu metode penelitian yang menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma atau teorema yang telah ada untuk memecahkan masalah.

Penelitian ini akan menghasilkan teorema-teorema baru yang telah dibuktikan secara deduktif sehingga kebenarannya berlaku secara umum.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada hasil penelitian akan dibahas tentang bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi amalgamasi, diantaranya adalah graf hasil operasi amalgamasi graf Helm atau $Amal(H_n, v, t)$, graf hasil operasi

amalgamasi graf Bunga atau $Amal(Fl_n, v, t)$, dan graf hasil operasi amalgamasi graf Friendship atau $Amal(f_n, v, t)$.

Bilangan Dominasi Jarak Dua pada Graf Hasil Operasi Amalgamasi Graf Helm

Pada bagian ini akan ditunjukkan teorema mengenai bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi amalgamasi graf Helm atau $Amal(H_n, v, t)$ dengan $n \geq 3$ dan $t \geq 2$.

♦ **Teorema 0.2** Diberikan graf Helm H_n sebanyak t salinan dengan $t \geq 2$ dan $n \geq 3$, maka hasil bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi amalgamasi adalah $\gamma_2(Amal(H_n, v, t)) = t$.

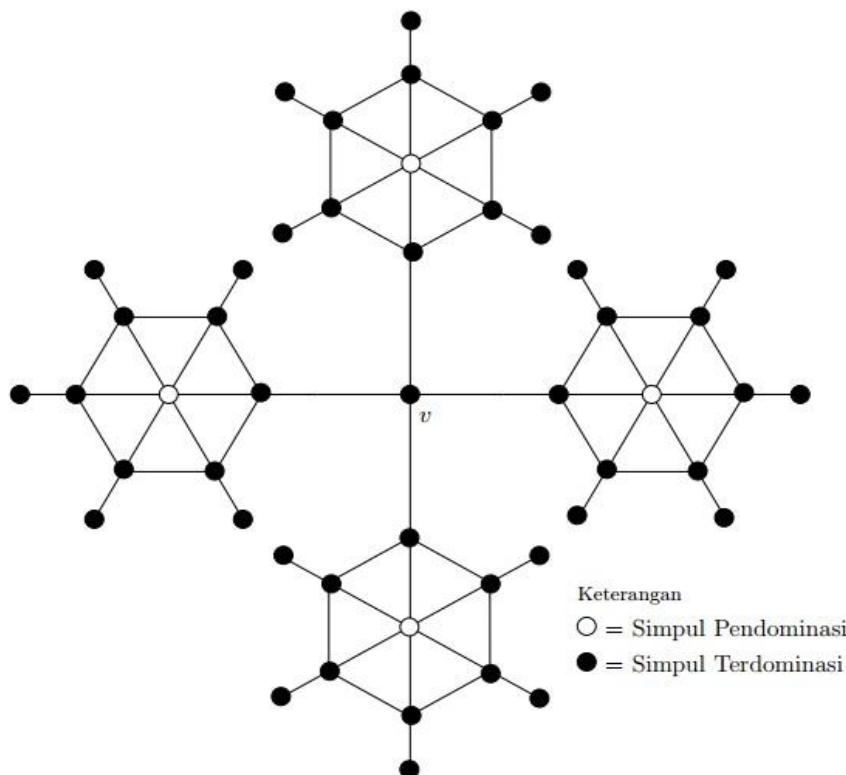
Bukti. Diketahui $Amal(H_n, v, t)$ merupakan hasil operasi amalgamasi dari

graf Helm H_n sebanyak t salinan dengan v adalah simpul terminal. Jika sebuah graf Helm H_n memiliki $2n + 1$ simpul, maka $Amal(H_n, v, t)$ memiliki $2nt + 1$ simpul. Selanjutnya akan ditunjukkan bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi $Amal(H_n, v, t)$ dengan barisan aritmatika yang dapat dilihat pada Tabel 1.

Table 1. Bilangan Dominasi Jarak Dua pada Graf Hasil Operasi $Amal(H_n, v, t)$

Jumlah Salinan (t)	Bilangan Kardinalitas (γ_2)
1	1
2	2
3	3
\vdots	\vdots
t	t

Untuk memperkuat bukti, disajikan contoh graf hasil operasi graf Helm seperti yang terlihat pada Gambar 1.



Gambar 1. Simpul Dominasi pada $Amal(H_6, v, 4)$

Maka dengan menggunakan barisan aritmatika akan didapatkan bilangan dominasi jarak dua dari graf hasil operasi amalgamasi pada graf Helm H_n adalah t . Berikutnya akan dibuktikan bilangan dominasi tersebut dengan menggunakan induksi matematika sebagai berikut.

$$\gamma_2(\text{Amal}(H_n, v, t)) = t$$

Akan dibuktikan untuk $t = 1$ adalah benar.

$$\gamma_2(\text{Amal}(H_n, v, 1)) = 1$$

Akan dibuktikan untuk $t = k$ adalah benar.

$$\gamma_2(\text{Amal}(H_n, v, k)) = k$$

Akan dibuktikan untuk $t = k + 1$ adalah benar.

$$\begin{aligned} \gamma_2(\text{Amal}(H_n, v, k + 1)) \\ = \gamma_2(\text{Amal}(H_n, v, k)) \\ + \text{beda} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \gamma_2(H_n)(k + 1) = k + 1$$

$$\Leftrightarrow \gamma_2(H_n)k + \gamma_2(H_n) = k + 1$$

$$\Leftrightarrow k + 1 = k + 1$$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa simpul pendominasi tersebut dapat mendominasi seluruh simpul $\text{Amal}(H_n, v, t)$ berdasarkan Lema 2 adalah $\text{Amal}(H_n, v, t) \geq \left\lceil \frac{|V|}{1+\Delta(G)+N_2} \right\rceil = \left\lceil \frac{2nt+1}{1+2n} \right\rceil = \lceil t \rceil$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa t adalah jumlah simpul pendominasi minimal. Andai $\gamma_2(\text{Amal}(H_n, v, t)) = t - 1$ maka banyak simpul maksimal yang akan didominasi adalah

$$1 + 2n \left(\left\lceil \frac{2nt+1}{1+2n} \right\rceil - 1 \right) \leq 1 + 2n \left(\frac{2nt+1+2n}{1+2n} - 1 \right) = 2nt.$$

Artinya banyak simpul yang didominasi adalah $2nt$, maka terdapat minimal satu simpul yang tidak didominasi. Dengan demikian $\gamma_2(\text{Amal}(H_n, v, t)) \neq t - 1$, karena t adalah jumlah minimal simpul pendominasi maka $\gamma_2(\text{Amal}(H_n, v, t)) = t$.

Bilangan Dominasi Jarak Dua pada Graf Hasil Operasi Amalgamasi Graf Bunga

Berikut ini akan dibahas bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi amalgamasi graf Bunga atau $\text{Amal}(Fl_n, v, t)$ yang dapat dilihat pada Teorema 0.3.

♦**Teorema 0.3** Diberikan graf Bunga Fl_n sebanyak t salinan dengan $t \geq 2$ dan $n \geq 3$, maka hasil bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi amalgamasi adalah $\gamma_2(\text{Amal}(Fl_n, v, t)) = 1$.

Bukti. Diketahui $\text{Amal}(Fl_n, v, t)$ merupakan hasil operasi amalgamasi dari graf Bunga Fl_n sebanyak t salinan dengan v adalah simpul terminal. Jika sebuah graf Bunga Fl_n memiliki $2n + 1$ simpul, maka $\text{Amal}(Fl_n, v, t)$ memiliki $2n + 1$ simpul.

Selanjutnya akan dibuktikan bilangan dominasi jarak dua pada graf $\text{Amal}(Fl_n, v, t)$ dengan membagi kedalam dua kasus sebagai berikut.

Kasus 1. $v \in S_2$

Pada kasus dimana $v \in S_2$ untuk jumlah salinan ke-1 sampai salinan ke- t , $\text{Amal}(Fl_n, v, t)$ memiliki sebuah simpul pendominasi yang diletakkan pada simpul terminal sehingga $\gamma_2(\text{Amal}(Fl_n, v, t)) = 1$.

Kasus 2. $v \notin S_2$

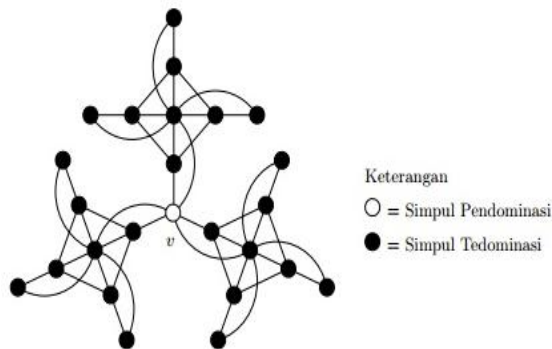
Pada kasus dimana $v \notin S_2$ untuk salinan ke-1 sampai salinan ke- t , bilangan dominasi jarak dua pada graf $\text{Amal}(Fl_n, v, t)$ akan membentuk barisan aritmatika sebagai berikut.

Tabel 2. Bilangan Dominasi Jarak Dua pada Graf Hasil Operasi $Amal(Fl_n, v, t)$

Jumlah Salinan (t)	Bilangan Kardinalitas (γ_2)
1	1
2	2
3	3
\vdots	\vdots
t	t

Maka dengan barisan aritmatika akan didapat bilangan dominasi jarak dua dari graf hasil operasi amalgamasi pada graf Bunga Fl_n adalah t .

Untuk memperkuat bukti, disajikan contoh graf hasil operasi graf Bunga seperti yang terlihat pada Gambar 2.



Gambar 2. Simpul Dominasi pada $Amal(Fl_4, v, 3)$

Berikut akan dibuktikan bilangan dominasi tersebut dengan menggunakan induksi matematika sebagai berikut.

$$\gamma_2(Amal(Fl_n, v, t)) = t$$

Akan dibuktikan untuk $t = 1$ adalah benar.

$$\gamma_2(Amal(Fl_n, v, 1)) = 1$$

Akan dibuktikan untuk $t = k$ adalah benar.

$$\gamma_2(Amal(Fl_n, v, k)) = k$$

Akan dibuktikan untuk $t = k + 1$ adalah benar.

$$\begin{aligned} \gamma_2(Amal(Fl_n, v, k + 1)) &= \gamma_2(Amal(Fl_n, v, k)) \\ &+ \text{beda} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \gamma_2(Fl_n)(k + 1) &= k \\ &+ 1 \\ \Leftrightarrow \gamma_2(Fl_n) k + \gamma_2(Fl_n) &= k \\ &+ 1 \\ \Leftrightarrow k + 1 &= k \\ &+ 1 \end{aligned}$$

Dengan demikian pada kasus $v \notin S_2 \gamma_2(Amal(Fl_n, v, t)) = t$.

Dari kasus 1 dan kasus 2 dapat diketahui bahwa $t \leq 1$ maka $\gamma_2(Amal(Fl_n, v, 1)) = 1$, karena berdasarkan definisi bilangan kardinalitas adalah jumlah minimal dari simpul pendominasi.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa simpul pendominasi tersebut dapat mendominasi seluruh simpul $Amal(Fl_n, v, t)$ berdasarkan Lema 2 adalah $\gamma_2(Amal(Fl_n, v, t)) \geq \left\lceil \frac{|V|}{1 + \Delta(G) + N_2} \right\rceil = \left\lceil \frac{2nt + 1}{2nt + 1} \right\rceil = \lceil 1 \rceil = 1$.

Bilangan Dominasi Jarak Dua pada Graf Hasil Operasi Amalgamasi Graf Friendship

Berikut ini akan dibahas bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi amalgamasi graf Friendship atau $Amal(f_n, v, t)$ yang dapat dilihat pada Teorema 0.4.

♦**Teorema 0.4** Diberikan graf Friendship f_n sebanyak t salinan dengan $t \geq 2$ dan $n \geq 3$, maka hasil bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi amalgamasi adalah $\gamma_2(Amal(f_n, v, t)) = 1$.

Bukti. Diketahui $Amal(f_n, v, t)$ merupakan hasil operasi amalgamasi dari graf Friendship f_n sebanyak t salinan dengan v adalah simpul terminal. Jika sebuah graf Friendship f_n memiliki $2n + 1$ simpul, maka $Amal(f_n, v, t)$ memiliki $2nt + 1$ simpul.

Kasus 1. $v \in S_2$

Pada kasus dimana $v \in S_2$ untuk jumlah salinan ke-1 sampai salinan ke- t , $Amal(f_n, v, t)$ memiliki sebuah simpul pendominasi yang diletakkan pada simpul terminal sehingga $\gamma_2(Amal(f_n, v, t)) = 1$.

Kasus 2. $v \notin S_2$

Pada kasus dimana $v \notin S_2$ untuk salinan ke-1 sampai salinan ke- t , bilangan dominasi jarak dua pada graf $Amal(f_n, v, t)$ akan membentuk barisan aritmatika sebagai berikut.

Tabel 3. Bilangan Dominasi Jarak Dua pada Graf Hasil Operasi $Amal(f_n, v, t)$

Jumlah Salinan (t)	Bilangan Kardinalitas (γ_2)
1	1
2	2
3	3
\vdots	\vdots
t	t

Maka dengan barisan aritmatika akan didapat bilangan dominasi jarak dua dari graf hasil operasi amalgamasi pada graf Friendship f_n adalah t . Berikut akan dibuktikan bilangan dominasi tersebut dengan menggunakan induksi matematika sebagai berikut.

$\gamma_2(Amal(f_n, v, t)) = t$
Akan dibuktikan untuk $t = 1$ adalah benar.

$\gamma_2(Amal(f_n, v, 1)) = 1$
Akan dibuktikan untuk $t = k$ adalah benar.

$\gamma_2(Amal(f_n, v, k)) = k$
Akan dibuktikan untuk $t = k + 1$ adalah benar.

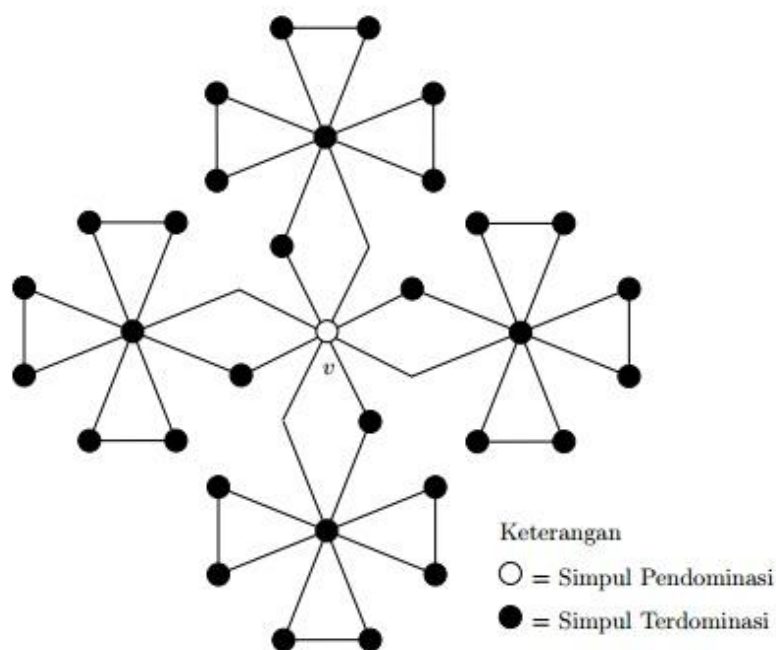
$$\begin{aligned} \gamma_2(Amal(f_n, v, k + 1)) &= \gamma_2(Amal(f_n, v, k)) + \text{beda} \\ &\Leftrightarrow \gamma_2(f_n)(k + 1) = k + 1 \\ &\Leftrightarrow \gamma_2(f_n)k + \gamma_2(f_n) = k + 1 \\ &\Leftrightarrow k + 1 = k + 1 \end{aligned}$$

Dengan demikian pada kasus $v \notin S_2$ $\gamma_2(Amal(f_n, v, t)) = t$.

Dari kasus 1 dan kasus 2 dapat diketahui bahwa $t \leq 1$ maka $\gamma_2(Amal(f_n, v, t)) = 1$, karena berdasarkan definisi bilangan kardinalitas adalah jumlah minimal dari simpul pendominasi.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa simpul pendominasi tersebut dapat mendominasi seluruh simpul $Amal(f_n, v, t)$ berdasarkan Lema 2 adalah $\gamma_2(Amal(f_n, v, t)) \geq \left\lceil \frac{|V|}{1 + \Delta(G) + N_2} \right\rceil = \left\lceil \frac{2nt + 1}{2nt + 1} \right\rceil = \lceil 1 \rceil = 1$.

Untuk memperkuat bukti, disajikan contoh graf hasil operasi graf Friendship seperti yang terlihat pada Gambar 3.



Gambar 3. Simpul Dominasi pada $Amal(f_4, v, 4)$

5. KESIMPULAN DAN SARAN

Kesimpulan yang diperoleh berdasarkan analisis dan pembahasan adalah sebagai berikut :

1. Bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi amalgamasi graf Helm atau $Amal(H_n, v, t)$ dengan $n \geq 3$ dan $t \geq 2$ adalah $\gamma_2(Amal(H_n, v, t)) = t$.
2. Bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi amalgamasi graf Bunga atau $Amal(Fl_n, v, t)$ dengan $n \geq 3$ dan $t \geq 2$ adalah $\gamma_2(Amal(Fl_n, v, t)) = 1$.
3. Bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi amalgamasi graf Friendship atau $Amal(f_n, v, t)$ dengan $n \geq 3$ dan $t \geq 2$ adalah $\gamma_2(Amal(f_n, v, t)) = 1$.

Berdasarkan hasil penelitian mengenai bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi amalgamasi, diantaranya adalah graf hasil operasi amalgamasi graf Helm, graf hasil operasi amalgamasi graf Bunga, graf hasil operasi amalgamasi graf Friendship. Maka

penelitian selanjutnya dapat dikembangkan dengan menentukan bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Carlson, K. 2006. *Generalized Books and Cm-Snakes are Prime Graphs*. Ars Combinatoria.

Darmaji dan Umilasari, R. 2014. "Dominating Set Berjarak Dua pada Graf Jahangir dan Prisma". Tidak Diterbitkan. Paper. Surabaya: ITS.

Harary, F. dan Frucht, R. 1969. *Graph Theory*. Philippines: Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Haynes, T. W., Hedetniemi, S. T., dan Slater, P. J. 1996. *Fundamental of Dominations in Graphs*. New York: Marcel Dekker, Inc.

Hedetniemi, S. T., Laskar, R., dan Pfaff, J. 1986. *A Linear Algorithm for Finding a Minimum Dominating Set in Cactus*. Discrete Applied Mathematics in North Holland. 13:

- 287-292.
- Maryati, Salman, Baskoro, Ryan, dan Miller. 2010. *On H-supermagic Labelings for Certain Shackles and Amalgamations of a Connected Graph*. *Utilitas Mathematica*. 83: 333-342.
- Munir, R. 2004. *Algoritma Greedy*. Departemen Teknik Informatika Institut Teknologi Bandung.
- Sridharan, N., Subramanian, V. S. A dan Elias, M. D. 2002. *Bounds on the Distance Two-Domination Number of Graph*. *Graphs and Combinatorics*. 18: 667-675.
- Umilasari, R. 2015. "Bilangan Dominasi Jarak Dua pada Graf-graf Hasil Operasi Korona dan Comb". Tidak Diterbitkan. Tesis. Surabaya: ITS.
- Vikade, W. D. 2016. "Bilangan Dominasi Jarak Dua pada Graf Hasil Operas". Tidak Diterbitkan. Tesis. Jember: Universitas Jember

TEKNIK PRAKTIS SKETSA/DESAIN MEJA DAN KURSI ROTAN MINIMALIS MENGGUNAKAN INTERPOLASI LINIER BEZIER, INTERPOLASI KURVA DAN KURVA PARAMETRIK

Ilham Saifudin

Program Studi Teknik Informatika Universitas Muhammadiyah Jember
ilham.saifudin@unmuhjember.ac.id

Abstrak

Paper ini bertujuan untuk mendapatkan sketsa/desain meja dan kursi rotan minimalis dengan menggunakan program Maple. Dalam pembuatan desain, diperoleh dari penggabungan interpolasi linier bezier, interpolasi kurva dan kurva parametrik. Hasil penelitian yang diperoleh berupa prosedur untuk memodelisasi/mendesain benda industri yaitu meja dan kursi rotan dengan langkah-langkah sebagai berikut: (1) membagi daerah-daerah pada meja dan kursi yang akan disusun; (2) mengidentifikasi bangun-geometri yang akan disusun; (3) memodelisasi bangun-geometri yang akan disusun menjadi desain meja dan kursi.

Abstract

This paper aims to get a minimalist rattan table and chair design using maple program Maple. Design is derived from the incorporation of linear bezier interpolations, curve interpolation and parametric curves. The result obtained are procedure for designing industrial object that are rattan and chair with the following steps: (1) partitioning the area of industrial object to be constructed; (2) to the identify the geometry to be constructed; (3) constructing the geometry into a table and chair design.

Keywords: Meja dan Kursi, Interpolasi Linier Bezier, Interpolasi Kurva, dan Kurva Parametrik.

PENDAHULUAN

Meja dan kursi rotan merupakan produk benda industri yang dibuat oleh masyarakat tradisional Indonesia. Namun demikian, produk yang dihasilkan memiliki nilai seni yang tinggi dan unik. Meja dan kursi rotan ini sudah merambah di pasar internasional. Keunggulan meja dan kursi rotan buatan Indonesia memiliki nilai estetika tersendiri. Untuk mendukung hal tersebut, di era modern ini kita dapat membuat sketsa/desain meja dan kursi rotan dengan menggunakan teknologi. Salah satunya dengan menggunakan program Maple.

Program Maple merupakan paket aplikasi matematika yang dapat digunakan untuk melakukan berbagai perhitungan matematis baik secara eksak (analitik) maupun numerik. Selain itu, banyak permasalahan fungsi yang dirasa sulit untuk diselesaikan, baik dari segi perhitungan maupun dalam penggambaran dalam grafik. Namun, seiring dengan perkembangan teknologi, untuk mempelajari fungsi kita dapat menggunakan perangkat komputer dengan Maple 13. Software ini dirancang untuk mempermudah dalam pembelajaran fungsi, baik secara perhitungan maupun penggambarannya.

Dalam pembuatan sketsa/desain meja dan kursi rotan, diperoleh dari penggabungan interpolasi linier bezier, interpolasi kurva permukaan maupun kurva parametrik (Kusno, 2006 dan 2008). Sehingga akan dihasilkan bentuk meja dan kursi. Inspirasi desain bersumber dari “Kursi Rotan Minimalis” yang ada pada mebel.

KAJIAN PUSTAKA

a. Bentuk Aljabar dan Geometri

Pemilihan bentuk persamaan kurva atau permukaan adalah sangat penting guna memudahkan operasi rancang bangun benda. Tujuan mempelajari penyajian kurva dengan pendekatan bentuk aljabar dan geometri adalah untuk memudahkan perancangan obyek (Kusno, 2009).

Misalnya kurva kubik parametrik $P(u)$ dinyatakan dalam aljabar.

$$x(u) = a_{0x} + a_{1x}u + a_{2x}u^2 + a_{3x}u^3 \quad (1)$$

$$y(u) = a_{0y} + a_{1y}u + a_{2y}u^2 + a_{3y}u^3$$

$$z(u) = a_{0z} + a_{1z}u + a_{2z}u^2 + a_{3z}u^3$$

Dengan parameter u dibatasi dalam interval $0 \leq u \leq 1$ atau $u \in [0,1]$. Pembatasan terhadap harga parameter u ini dimaksudkan agar segmen kurva yang terbangun terbatas dan mudah dikontrol (Purcell, et al, 1987). Dalam penyajian (1), didapatkan 12 koefisien konstan yang disebut sebagai koefisien aljabar. Setiap himpunan 12 koefisien tersebut, maka mendefinisikan sebuah kurva yang unik (tunggal). Sebaliknya, untuk setiap dua kurva ruang yang berbeda, maka kita dapatkan dua himpunan 12 koefisien yang berbeda. Selanjutnya dari kurva bentuk (1) kedalam fungsi vektorial (parametrik).

$$P(u) = a_0 + a_1u + a_2u^2 + a_3u^3 \quad (2)$$

Kemudian, tetapkan beberapa kondisi berikut.

$$P(0) = a_0 \quad (3)$$

$$P(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$$

$$P^u(0) = \frac{dP(0)}{du} = a_1$$

$$P^u(1) = \frac{dP(1)}{du} = a_1 + 2a_2 + 3a_3$$

Dengan a_0 , a_1 , a_2 dan a_3 merupakan vektor-vektor yang ekuivalen dengan koefisien-koefisien skala aljabar.

Jika sistem persamaan (3) diselesaikan, maka harga vektor-vektor a_0 , a_1 , a_2 dan a_3 diperoleh:

$$a_0 = P(0) \quad (4)$$

$$a_1 = P^u(0)$$

$$a_2 = -3P(0) + 3P(1) - 2P^u(0) - P^u(1)$$

$$a_3 = 2P(0) - 2P(1) + P^u(0) + P^u(1)$$

Jika persamaan (4) ini selanjutnya disubstitusikan ke persamaan (2), maka didapatkan bentuk kurva Hemit (Monterson, 1985).

$$P(u) = P(0)H_1(u) - P(1)H_2(u) + P^u(0)H_3(u) + P^u(1)H_4(u) \quad (5)$$

Dinotasikan $P(u) = P(0)H_1(u) - P(1)H_2(u) + P^u(0)H_3(u) + P^u(1)H_4(u)$

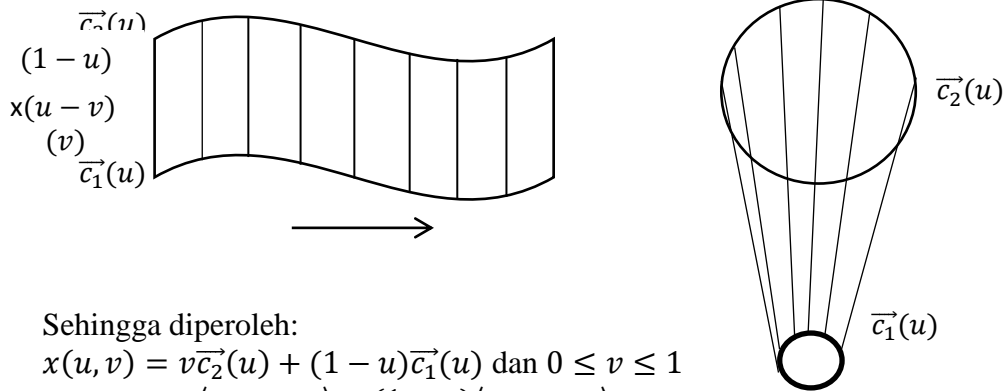
dengan fungsi-fungsi basis $H_1(u)$, $H_2(u)$, $H_3(u)$ dan $H_4(u)$ berharga

$$H_1(u) = 2u^3 - 3u^2 + 1 \quad H_2(u) = -2u^3 + 3u^2 \quad (6)$$

$$H_3(u) = u^3 - 2u^2 + u \quad H_4(u) = u^3 - u^2$$

Bentuk persamaan (5) disebut sebagai penyajian kurva dalam bentuk geometrik dan P_0, P_1, P_0^u dan P_1^u disebut koefisien geometrik. Sedangkan fungsi-fungsi $H_1(u), H_2(u), H_3(u)$ dan $H_4(u)$ dalam persamaan (6) disebut basis Hemit.

b. Permukaan Interpolasi Linier



Sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
 x(u, v) &= v\bar{c}_2(u) + (1 - u)\bar{c}_1(u) \text{ dan } 0 \leq v \leq 1 \\
 &= v\langle x_1, y_1, z_1 \rangle + (1 - u)\langle x_2, y_2, z_2 \rangle \\
 &= \langle vx_1 + (1 - u)x_2, vy_1 + (1 - u)y_2, vz_1 + (1 - u)z_2 \rangle
 \end{aligned}$$

c. Penggabungan 2 Kurva Parametrik

Penggabungan 2 kurva parametrik memiliki bentuk (Kusno, 2002):

$$\begin{aligned}
 \bar{c}_1(t) &= \langle x_1(t), y_1(t), z_1(t) \rangle; 0 \leq t \leq 1 \\
 \bar{c}_2(t) &= \langle x_2(t), y_2(t), z_2(t) \rangle; 0 \leq t \leq 1
 \end{aligned}$$

Order 0:

$$\begin{aligned}
 x_1(1) &= x_2(0) \\
 y_1(1) &= y_2(0) \\
 z_1(1) &= z_2(0)
 \end{aligned}$$

d. Kurva dan Permukaan Bezier

Kurva non-rasional Bezier derajat n dinyatakan dalam bentuk (Bezier, 1987):

$$C(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^n(t); 0 \leq t \leq 1$$

Dimana $B_i^n(t) = C_i^n(1 - t)^{n-i} \cdot t^i$ dan $C_i^n = \frac{n!}{i!(n-i)!}$. Pada persamaan tersebut, titik-titik P_i disebut koefisien geometrik atau titik kontrol kurva $C(t)$. Titik-titik tersebut berharga real.

METODE

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah prosedur untuk memodelisasi/mendesain benda industri yaitu meja dan kursi rotan dengan langkah-langkah sebagai berikut: (1) membagi daerah-daerah pada meja dan kursi yang akan disusun; (2) mengidentifikasi bangun-bangun geometri yang akan disusun; (3) memodelisasi bangun-bangun yang akan disusun menjadi desain meja dan kursi.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pembagian daerah-daerah pada meja dan kursi rotan.

1. Bagian-bagian sketsa/desain pada meja yang akan disusun dari bagian atas sampai pada bagian bawah meja

- a. Bagian paling atas dari meja berbentuk bidang lingkaran jari-jari R berpusat di (x_1, y_1, z_1) dan berketinggian $z_1 = 8$:

$$a(u, v) = \langle 13 \sin(v) \cos(u), 13 \sin(v) \sin(u), 8 \rangle \text{ dengan } 0 \leq u \leq 2\pi \text{ dan } 0 \leq v \leq 2\pi$$

- b. Bagian kedua merupakan bidang berbentuk silinder (terbuka) dengan jari-jari R melalui sumbu (x_1, y_1, z_1) :

$$b(u, v) = \langle 13 \cos(u), 13 \sin(u), v \rangle \text{ dengan } -\pi \leq u \leq \pi \text{ dan } 5 \leq v \leq 8$$

- c. Bagian ketiga merupakan bidang berbentuk bidang lingkaran jari-jari R=13 berpusat di (x_1, y_1, z_1) dan berketinggian $z_1 = 5$:

$$c(u, v) = \langle 13 \sin(v) \cos(u), 13 \sin(v) \sin(u), 5 \rangle \text{ dengan } 0 \leq u \leq 2\pi \text{ dan } 0 \leq v \leq 2\pi$$

- d. Bagian keempat memiliki bidang berbentuk elipsoida dengan jari-jari R dan berpusat di (x_1, y_1, z_1) dengan keratan elipsoida dipotong terhadap sumbu z berjari-jari R=13:

$$d(u, v) = \langle 13 \sin(v) \sin(u), 13 \sin(v) \cos(u), 15 \cos(v) \rangle \text{ dengan } 0 \leq u \leq 2\pi \text{ dan } 2 \leq v \leq 0,3\pi$$

- e. Bagian kelima berbentuk silinder (terbuka) dengan jari-jari R melalui sumbu (x_1, y_1, z_1) dengan posisi berada $x_1 - 8$ dan $y_1 - 8$, dimana bagian ini sebagai kaki ke-1 dari meja:

$$e(u, v) = \langle 1 \cos(u) - 8, 1 \sin(u) - 8, -2v \rangle \text{ dengan } 0 \leq u \leq 2\pi \text{ dan } 0,5 \leq v \leq 5$$

- f. Bagian keenam berbentuk silinder (terbuka) dengan jari-jari R melalui sumbu (x_1, y_1, z_1) dengan posisi berada $x_1 + 8$ dan $y_1 + 8$ dimana bagian ini sebagai kaki ke-2 dari meja:

$$e(u, v) = \langle 1 \cos(u) + 8, 1 \sin(u) + 8, -2v \rangle \text{ dengan } 0 \leq u \leq 2\pi \text{ dan } 0,5 \leq v \leq 5$$

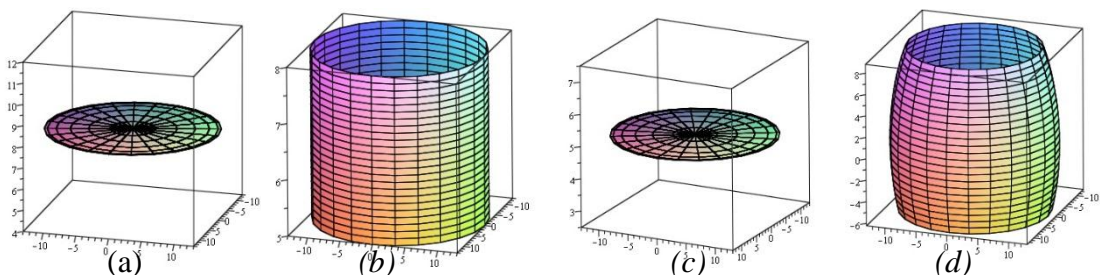
- g. Bagian ketujuh berbentuk silinder (terbuka) dengan jari-jari R melalui sumbu (x_1, y_1, z_1) dengan posisi berada $x_1 - 8$ dan $y_1 + 8$ dimana bagian ini sebagai kaki ke-3 dari meja:

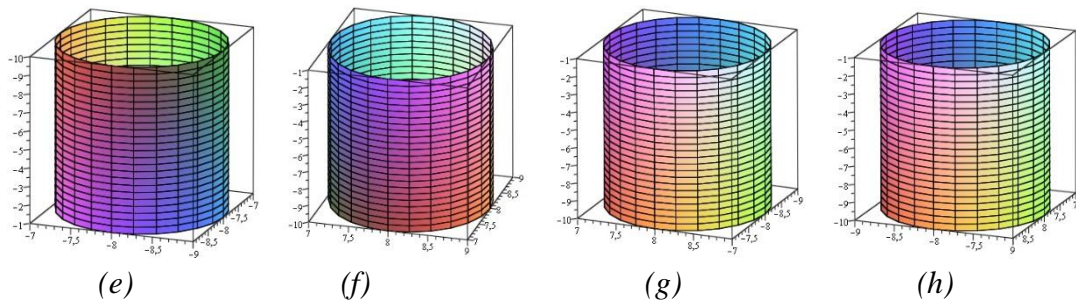
$$e(u, v) = \langle 1 \cos(u) - 8, 1 \sin(u) + 8, -2v \rangle \text{ dengan } 0 \leq u \leq 2\pi \text{ dan } 0,5 \leq v \leq 5$$

- h. Bagian kedelapan berbentuk silinder (terbuka) dengan jari-jari R melalui sumbu (x_1, y_1, z_1) dengan posisi berada $x_1 + 8$ dan $y_1 - 8$ dimana bagian ini sebagai kaki ke-4 dari meja:

$$e(u, v) = \langle 1 \cos(u) + 8, 1 \sin(u) - 8, -2v \rangle \text{ dengan } 0 \leq u \leq 2\pi \text{ dan } 0,5 \leq v \leq 5$$

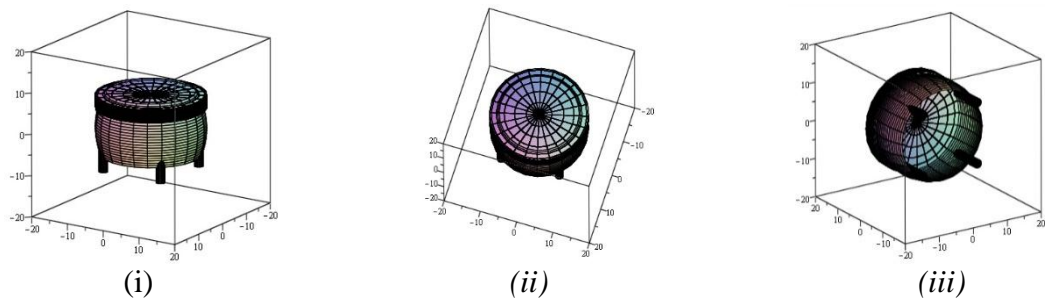
Sehingga diperoleh gambar hasil plot 3d sebagai berikut:





Gambar 1. (a), (b), (c), (d), (e), (f), (g), dan (h) merupakan susunan desain meja

Jika dilakukan penggabungan akan dihasilkan sebuah sketsa/desain meja sebagai berikut:



Gambar 2. (i) tampak dari samping, (ii) tampak dari atas, dan (iii) tampak dari bawah meja

2. Bagian-bagian sketsa/desain pada kursi yang akan disusun dari bagian atas sampai pada bagian bawah kursi

a. Bagian atas dari kursi berupa sandaran yang berada di depan diperoleh dari kurva permukaan Bezier. Bentuk persamaannya yaitu:

$$a(u, v) = \langle [\sin(u). \sin(10(1 - 2v + v^2) + 30(2v - v^2) + 26(-v + v^2)) , \cos(u). (10(1 - 2v + v^2) + 30(2v - v^2) + 26(-v + v^2) , (9,5(1 - 2v + v^2) + 30(2v - v^2) - 30(-v + v^2))] \rangle$$

dengan $0 \leq u \leq \pi$ dan $0 \leq v \leq 1$

b. Bagian kedua dari kursi berupa sandaran yang berada di belakang diperoleh dari kurva permukaan Bezier. Bentuk persamaannya yaitu:

$$b(u, v) = \langle [\sin(u). \sin(14(1 - 2v + v^2) + 30(2v - v^2) + 26(-v + v^2)) , \cos(u). (12(1 - 2v + v^2) + 30(2v - v^2) + 26(-v + v^2) , (8(1 - 2v + v^2) + 30(2v - v^2) - 30(-v + v^2))] \rangle$$

dengan $0 \leq u \leq \pi$ dan $0 \leq v \leq 1$

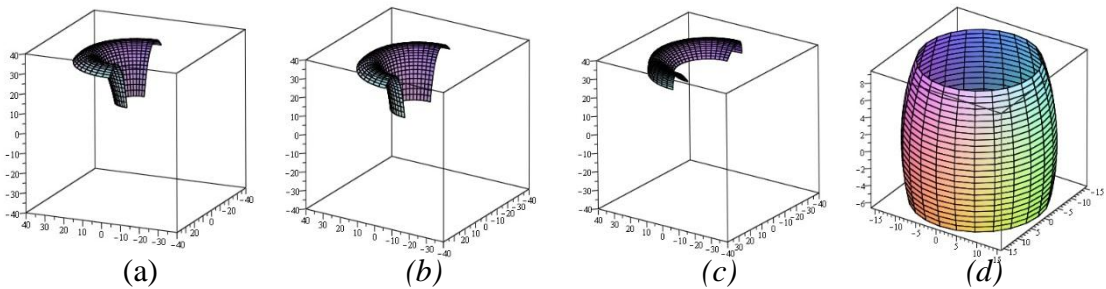
c. Bagian ketiga dari kursi berupa tutup sandaran yang berada paling atas kursi diperoleh dari kurva permukaan Bezier. Bentuk persamaannya yaitu:

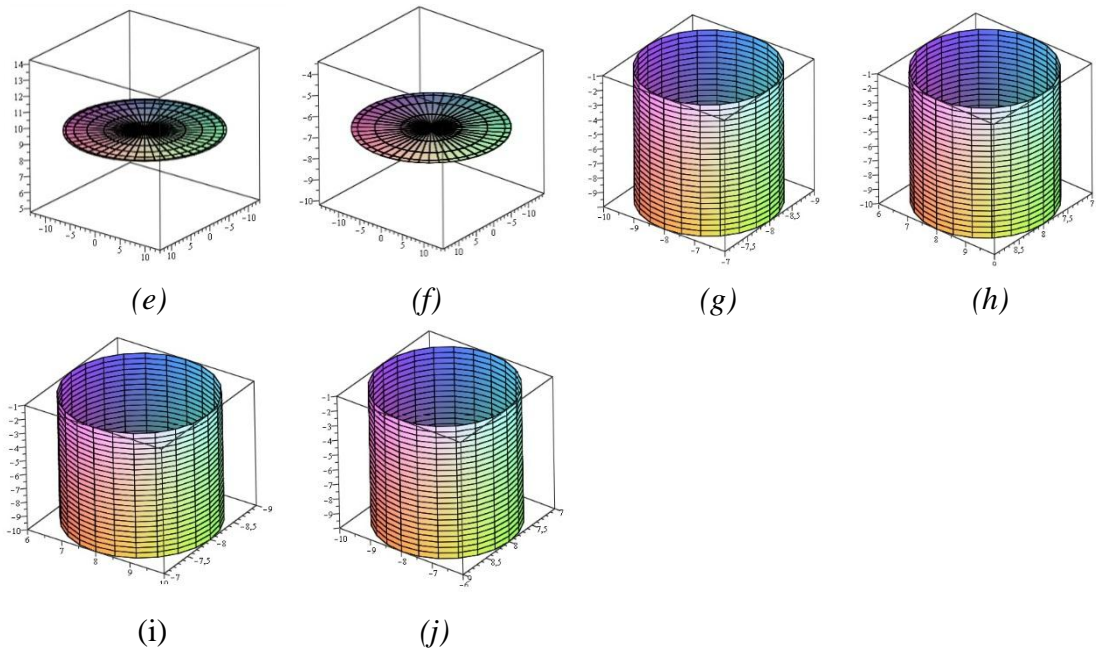
$$c(u, v) = \langle [\sin(u). \sin(17(1 - 2v + v^2) + 30(2v - v^2) - 0(-v + v^2)) , \cos(u). (17(1 - 2v + v^2) + 30(2v - v^2) - 0(-v + v^2) , (30(1 - 2v + v^2) + 30(2v - v^2) - 30(-v + v^2))] \rangle$$

dengan $0 \leq u \leq \pi$ dan $0 \leq v \leq 1$

- d. Bagian keempat dari kursi berupa elipsoida dengan jari-jari R dan berpusat di (x_1, y_1, z_1) dengan keratan elipsoida dipotong terhadap sumbu z berjari-jari R=16:
 $d(u, v) = \langle 16 \sin(v) \sin(u), 16 \sin(v) \cos(u), 16 \cos(v) \rangle$ dengan
 $0 \leq u \leq 2\pi$ dan $2 \leq v \leq 0,3\pi$
- e. Bagian kelima dari kursi berupa bidang lingkaran jari-jari R berpusat di (x_1, y_1, z_1) dan berketinggian $z_1 = 9,5$:
 $e(u, v) = \langle 13 \sin(v) \cos(u), 13 \sin(v) \sin(u), 9,5 \rangle$ dengan
 $0 \leq u \leq \pi$ dan $0 \leq v \leq 2\pi$
- f. Bagian keenam dari kursi berupa bidang lingkaran jari-jari R berpusat di (x_1, y_1, z_1) dan berketinggian $z_1 = -6,8$:
 $f(u, v) = \langle 14,5 \sin(v) \cos(u), 14,5 \sin(v) \sin(u), -6,8 \rangle$ dengan
 $0 \leq u \leq \pi$ dan $0 \leq v \leq 3\pi$
- g. Bagian ketujuh berbentuk silinder (terbuka) dengan jari-jari R melalui sumbu (x_1, y_1, z_1) dengan posisi berada $x_1 - 8$ dan $y_1 - 8$, dimana bagian ini sebagai kaki ke-1 dari kursi:
 $g(u, v) = \langle 1 \cos(u) - 8, 1 \sin(u) - 8, -2v \rangle$ dengan $0 \leq u \leq 2\pi$ dan
 $0,5 \leq v \leq 5$
- h. Bagian kedelapan berbentuk silinder (terbuka) dengan jari-jari R melalui sumbu (x_1, y_1, z_1) dengan posisi berada $x_1 + 8$ dan $y_1 + 8$ dimana bagian ini sebagai kaki ke-2 dari kursi:
 $h(u, v) = \langle 1 \cos(u) + 8, 1 \sin(u) + 8, -2v \rangle$ dengan $0 \leq u \leq 2\pi$ dan
 $0,5 \leq v \leq 5$
- i. Bagian kesembilan berbentuk silinder (terbuka) dengan jari-jari R melalui sumbu (x_1, y_1, z_1) dengan posisi berada $x_1 - 8$ dan $y_1 + 8$ dimana bagian ini sebagai kaki ke-3 dari kursi:
 $i(u, v) = \langle 1 \cos(u) - 8, 1 \sin(u) + 8, -2v \rangle$ dengan $0 \leq u \leq 2\pi$ dan
 $0,5 \leq v \leq 5$
- j. Bagian kesepuluh berbentuk silinder (terbuka) dengan jari-jari R melalui sumbu (x_1, y_1, z_1) dengan posisi berada $x_1 + 8$ dan $y_1 - 8$ dimana bagian ini sebagai kaki ke-4 dari kursi:
 $j(u, v) = \langle 1 \cos(u) + 8, 1 \sin(u) - 8, -2v \rangle$ dengan $0 \leq u \leq 2\pi$ dan
 $0,5 \leq v \leq 5$

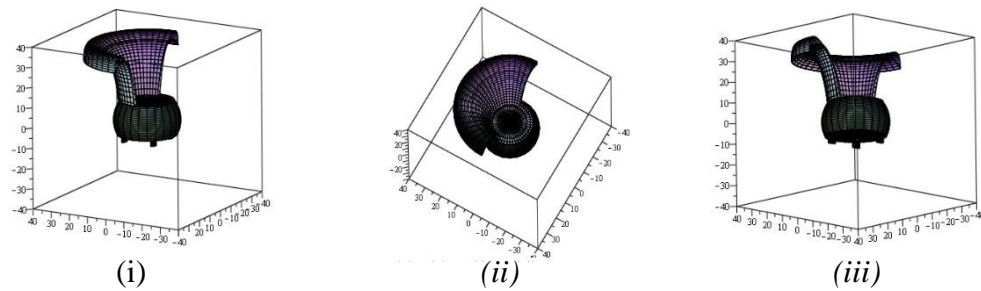
Sehingga diperoleh gambar hasil plot 3d sebagai berikut:



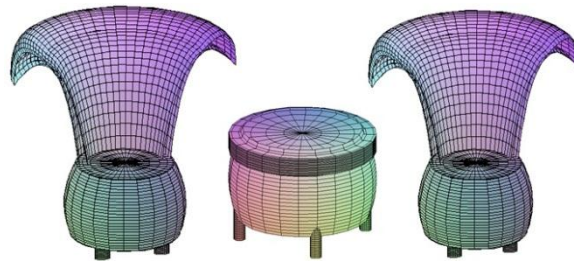


Gambar 3. (a), (b), (c), (d), (e), (f), (g), (h), (i), dan (j) merupakan susunan desain kursi

Jika dilakukan penggabungan akan dihasilkan sebuah sketsa/desain kursi rotan sebagai berikut:



Gambar 4. (i) tampak dari samping, (ii) tampak dari atas, dan (iii) tampak dari bawah kursi rotan



Gambar 5. Sketsa/desain meja dan kursi rotan

Dengan demikian diperoleh sketsa/desain dari meja dan kursi rotan dari penggabungan interpolasi linier bezier, interpolasi kurva permukaan maupun kurva parametrik.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan didapatkan desain meja dan kursi rotan dengan menggabungkan interpolasi linier bezier, interpolasi kurva permukaan maupun kurva parametrik. Selain itu diperlukan langkah-langkah sebagai berikut untuk dapat membangun desain meja dan kursi rotan, diantaranya: (1) membagi daerah-daerah pada meja dan kursi yang akan disusun; (2) mengidentifikasi bangun-bangun geometri yang akan disusun; (3) memodelisasi bangun-bangun yang akan disusun menjadi desain meja dan kursi. Sehingga menghasilkan bentuk meja dan kursi yang unik, memiliki seni dan indah.

Saran dari penulis untuk peneliti yang tertarik meneliti bidang riset pemodelan benda-benda industri pada geometri dapat mendesain bangun ruang lainnya dan memiliki manfaat bagi industri maupun nilai seni.

DAFTAR RUJUKAN

- Bezier, P. 1087. *Mathematiques et CAO. Volume 4: Courbes et Ssurfaces*. Hermes, Paris Frances.
- Kusno. 2002. *Kekontinyuan Parametrik dan Geometri Order-2 Kurva dan Survas dalam "Computer Aided Geometri Desain"*. Natural Volume 6. Universitas Brawijaya.
- Kusno. 2002. *Survey Rancang Bangun Kurva dengan Kurva dan Permukaan*. Jurnal Matematika, Ilmu Pengetahuan Alam dan Pengajarannya. Tahun 22, Nomor 1.
- Kusno. 2002. *Realisasi Permukaan Plat dalam Bentuk Kepingan Permukaan Bezier*. MIHMI. Volume 8. No. 1. Jurusan Matematika ITB.
- Kusno. 2006. *Membangun Kurva dan Permukaan dengan Menggunakan Maple 6*. Jurusan Matematika FMIPA. Universitas Jember
- Kusno, Hidayat, H., Santoso, K. A. 2006. *Penggunaan Kurva Bezier untuk Desain Benda Pecah Belah dan Plastik Karakter Simetrik dan Putar*. Proseding Konferensi Nasional Matematika XIII. Universitas Negeri Semarang. P 747-756.
- Kusno, Hidayat, H., Julianto, B. 2008. *Studi Rancang Bangun Bentuk Evolutif Bahan Besi, Gelas, dan Plastik*. Lemlit UNEJ.
- Kusno. 2009. *Geometri Rancang Bangun*. Departemen Matematika Universitas Jember.
- Mortenson, M, E. 1985. *Geometrik Modeling*. JWS. New York.
- Pucell, E, J. Dan Varberg, D. 1987. *Kalkulus dan Geometri Analitis (Terjemahan)*. Erlangga. Jakarta.

Penempatan Anjungan Tunai Mandiri (ATM) pada Kecamatan Sumpersari Kabupaten Jember Menggunakan Teori Bilangan Dominasi

Ilham Saifudin¹⁾, Reni Umilasari²⁾

^{1,2)} Program Studi Teknik Informatika, Fakultas Teknik, Universitas Muhammadiyah Jember
Jl. Karimata No. 49 Jember Kode Pos 68121
Email: ¹⁾ilham.saifudin@unmuhjember.ac.id, ²⁾reni.umilasari@unmuhjember.ac.id

ABSTRAK

Untuk setiap graf $G = (V, E)$, $S \subseteq V(G)$ dapat dikatakan himpunan dominasi dari G jika setiap simpul $u \in V(G)$ bertetangga dengan S . Dengan demikian untuk setiap simpul $u \in V(G)$, ada simpul $v \in S$ dimana jarak antara u dan v maksimal satu. Kardinalitas minimum pada himpunan dominasi di graf G disebut dengan bilangan dominasi. Pada paper ini akan ditentukan himpunan dominasi jarak dua pada graf G yang didefinisikan dengan $S_2 \subseteq V(G)$, dimana untuk setiap simpul $u \in V(G)$ ada simpul $w \in S_2$ dimana jarak antara u dan w maksimal dua. Kardinalitas minimum pada himpunan dominasi jarak dua di graf G disebut dengan bilangan dominasi jarak dua. Pada Paper ini akan dicari bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi Shackle dengan subgraf sebagai penghubung (*linkage*), diantaranya : $Shack(C_n, P_m, k)$, $Shack(C_n, P_m, k)$, dengan $m \leq \frac{n}{2}$ dan $Shack(C_n, P_m, k)$ dengan $m = 2n$. Serta akan dibahas studi kasus bilangan dominasi jarak dua pada penempatan Anjungan Tunai Mandiri (ATM) pada Kecamatan Sumpersari Kabupaten Jember, dikarenakan penempatannya sembarang dan tidak menjangkau wilayah di sekitar Kecamatan Sumpersari.

Kata Kunci: Bilangan Dominasi jarak dua, Graf Hasil Operasi Shackle dengan subgraf sebagai penghubung (*linkage*), Penempatan ATM.

1. PENDAHULUAN

Bilangan dominasi merupakan salah satu topik yang menarik pada teori graf. Bilangan dominasi sudah ada sejak tahun 1850, bilangan dominasi ini muncul pada kalangan penggemar catur di Eropa yaitu penentuan berapa banyaknya ratu yang harus ditempatkan pada papan catur 8×8 , sehingga semua petak pada papan catur dapat dikuasai oleh ratu dan jumlah ratu yang diletakkan pada papan catur harus minimal. Hasil penelitian sebelumnya diantaranya tentang bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi oleh Wicha dan Slamet (Slamet, 2009).

Bilangan dominasi dapat dikatakan sebagai banyaknya simpul pendominasi dalam suatu graf yang dapat mendominasi simpul-simpul terhubung

disekitarnya, dengan simpul pendominasi berjumlah minimal. Bilangan dominasi dinotasikan dengan $\gamma(G)$. Bilangan dominasi juga telah banyak diaplikasikan dalam kehidupan. Sebagai contoh pada penempatan mobil listrik pada lahan perkebunan, penempatan CCTV pada sudut-sudut tertentu agar dapat menjangkau area di sekitarnya pada jarak tertentu, dan lain-lain. Tujuan menerapkan himpunan dominasi pada penempatan mobil listrik ataupun CCTV yaitu agar lebih efisien dalam menempatkannya serta dapat meminimalisir jumlahnya, sehingga lebih maksimal dalam penggunaannya.

Dalam paper ini penulis meneliti bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi shackle dengan subgraf

sebagai penghubung (*linkage*), diantaranya: $Shack(C_n, P_m, k)$ dengan $m \leq \frac{n}{2}$, $Shack(C_n, C_m, k)$ dengan $m \leq \frac{n}{2}$ dan $Shack(C_n, S_m, k)$ dengan $m = 2n$. Serta akan dibahas studi kasus bilangan dominasi jarak dua paada penempatan Anjungan Tunai Mandiri (ATM) pada Kecamatan Summersari Kabupaten Jember. Alasannya, dikarenakan penempataannya sembarang dan tidak menjangkau wilayah di sekitar Kecamatan Summersari.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Himpunan Dominasi dan Bilangan Dominasi

Himpunan dominasi (*dominating set*) S pada graf G adalah subset dari $V(G)$ sedemikian setiap simpul G yang bukan elemen S terhubung dan berjarak satu terhadap S (Haynes, T. W, et al. 1996). Kardinalitas minimum di antara himpunan dominasi pada graf G disebut bilangan dominasi (*dominating number*) dari graf G yang dinotasikan dengan $\gamma(G)$.

Himpunan dominasi jarak dua dinotasikan dengan S_2 yaitu subset dari $V(G)$ sedemikian simpul G yang bukan elemen S_2 terhubung dan memiliki jarak maksimal 2 terhadap S_2 (Darmaji, et al. 2014), (Sridharan, N, et al. 2002), dan (Umilasari, R. 2015). Bilangan dominasi jarak dua dari suatu graf dinotasikan dengan $\gamma_2(G)$, yaitu kardinalitas minimum dari himpunan dominasi jarak dua. Dalam menentukan simpul dominasi pada sebarang graf dapat menggunakan sebuah algoritma yang dinamakan algoritma greedy (Munir, R. 2004).

Lema yang digunakan.

Lema 1. *Bilangan dominasi jarak dua pada sebarang graf reguler G berderajat*

$$r \text{ adalah } \gamma_2(G) \geq \left\lceil \frac{|V|}{r^2+1} \right\rceil$$

Bukti. Graf G adalah graf reguler jumlah simpul sebanyak $|V|$ dan derajat setiap simpul adalah r . Berdasarkan observasi, simpul maksimal yang dapat didominasi oleh sebuah simpul pendominasi adalah $r^2 + 1$. Dengan demikian jumlah minimal simpul pendominasi adalah $\left\lceil \frac{|V|}{r^2+1} \right\rceil$. Jadi, $\gamma_2(G) \geq \left\lceil \frac{|V|}{r^2+1} \right\rceil$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\left\lceil \frac{|V|}{r^2+1} \right\rceil$ adalah jumlah simpul pendominasi minimal yang dapat mendominasi semua simpul di graf G . Andaikan $\gamma_2(G) \geq \left\lceil \frac{|V|}{r^2+1} \right\rceil - 1$, maka banyak simpul maksimal yang dapat didominasi adalah $r^2 + 1 \left(\left\lceil \frac{|V|}{r^2+1} \right\rceil - 1 \right) - 1 \leq r^2 + 1 \left(\frac{|V|+r^2}{r^2+1} - 1 \right) = |V| - 1$. Artinya, banyak simpul maksimal yang dapat didominasi adalah $|V| - 1$, maka terdapat minimal satu simpul yang belum terdominasi. Dengan demikian $S_2 = \gamma_2(G) \neq \left\lceil \frac{|V|}{r^2+1} \right\rceil - 1$. Karena $\left\lceil \frac{|V|}{r^2+1} \right\rceil$ adalah jumlah minimal simpul pendominasi yang dapat mendominasi semua simpul di G maka $\gamma_2(G) \geq \left\lceil \frac{|V|}{r^2+1} \right\rceil$.

Lema 2. *Bilangan dominasi jarak dua pada sebarang graf G adalah*

$$\gamma_2(G) \geq \left\lceil \frac{|V|}{1+\Delta(G)+\sum N_2} \right\rceil.$$

(Vikade et al, 2016)

Bukti. Graf G adalah sebarang graf dengan jumlah simpul sebanyak $|V|$, misal x adalah sebuah simpul dengan derajat maksimal $\Delta(G)$ maka x sebagai himpunan dominasi dan $N_2[x]$ merupakan simpul berjarak dua dari x . Sehingga $\gamma_2(G) \geq \left\lceil \frac{|V|}{1+\Delta(G)+\sum N_2} \right\rceil$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\left\lceil \frac{|V|}{1+\Delta(G)+\sum N_2} \right\rceil$ adalah jumlah simpul pendominasi minimal. Andai $\gamma_2(G) \geq \left\lceil \frac{|V|}{1+\Delta(G)+\sum N_2} \right\rceil - 1$, maka banyak simpul

maksimal yang dapat didominasi adalah $1 + \Delta(G) + \sum N_2 \left(\left\lfloor \frac{|V|}{1 + \Delta(G) + \sum N_2} \right\rfloor - 1 \right) \leq 1 + \Delta(G) + \sum N_2$
 $\left(\frac{|V|}{1 + \Delta(G) + \sum N_2} - 1 \right) = |V| - 1$. Artinya banyak simpul yang dapat didominasi adalah $|V| - 1$, maka terdapat minimal satu simpul yang tidak didominasi. Dengan demikian $S_2 = \gamma_2(G) \neq \left\lfloor \frac{|V|}{1 + \Delta(G) + \sum N_2} \right\rfloor - 1$, karena $\left\lfloor \frac{|V|}{1 + \Delta(G) + \sum N_2} \right\rfloor$ adalah jumlah simpul pendominasi minimal maka $\gamma_2(G) \geq \left\lfloor \frac{|V|}{1 + \Delta(G) + \sum N_2} \right\rfloor$.

2.2 Operasi Shackle dengan Subgraf Sebagai Penghubung (Linkage)

Graf Shackle dengan subgraf sebagai penghubung (linkage) dinotasikan $Shack(G, H, k)$, dimana Graf $Shack(G, H, k)$ merupakan graf hasil operasi Shackle pada graf (G) dengan subgraf pada graf (H) sebagai penghubung sebanyak $k - \text{salinan}$.

3. METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah pendeteksian pola, yaitu dengan cara mencari himpunan dominasi sedemikian hingga ditemukan bilangan kardinalitas yang minimum. Selain itu metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah deduktif aksiomatik yaitu metode penelitian yang menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma atau teorema yang telah ada untuk memecahkan masalah. Penelitian ini akan menghasilkan teorema-teorema baru yang telah dibuktikan secara deduktif sehingga kebenarannya berlaku secara umum.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada hasil penelitian akan dibahas tentang bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi Shackle dengan subgraf sebagai penghubung yaitu $Shack(C_n, P_m, k)$ dengan $m \leq \frac{n}{2}$, $Shack(C_n, C_m, k)$ dengan $m \leq \frac{n}{2}$ dan $Shack(C_n, S_m, k)$ dengan $m = 2n$. Selain itu dibahas juga mengenai aplikasi bilangan dominasi berupa penempatan Anjungan Tunai Mandiri (ATM) pada Kecamatan Summersari Kabupaten Jember menggunakan Teori Bilangan Dominasi. Untuk lebih jelasnya dapat dilihat penjelasan dibawah ini.

4.1 Bilangan Dominasi Jarak Dua pada Graf $Shack(C_n, P_m, k)$

Berikut disajikan Teorema 1 mengenai bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi $Shack(C_n, P_m, k)$ dengan $m \leq \frac{n}{2}$.

◇ **Teorema 1.** Diberikan graf C_n sebanyak k salinan, maka bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi Shackle sub graf P_m adalah

$$\gamma_2(Shack(C_n, P_m, k)) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor & \text{untuk } n < 5 \\ k \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor - (k - 1) \left\lfloor \frac{m}{5} \right\rfloor & \text{untuk } n \geq 5 \end{cases}$$

Bukti.

Untuk $n < 5$ dan $m = 2$ dapat mendominasi maksimal sebanyak 2 salinan graf G . Dengan demikian jumlah simpul pendominasi yang dibutuhkan pada graf $Shack(C_n, P_m, k)$ dengan $n < 5$ dan $m = 2$ adalah $\gamma_2(Shack(C_n, P_m, k)) = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$ adalah simpul pendominasi minimal yang dapat mendominasi semua simpul pada $Shack(C_n, P_m, k)$. Andai

$\gamma_2(Shack(C_n, P_m, k)) = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 1$, maka salinan maksimal yang dapat didominasi sampai jarak 2 adalah $2k \left(\lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 1 \right) \leq 2k \left(\frac{k+2k-1}{2k} - 1 \right) = k - 1$. Dengan demikian jumlah salinan maksimal yang dapat didominasi adalah $k - 1$, sehingga terdapat minimal satu salinan graf yang tidak dapat didominasi, maka $\gamma_2(Shack(C_n, P_m, k)) \neq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 1$. Karena $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ adalah jumlah simpul pendominasi minimal yang dapat mendominasi semua salinan graf, maka $\gamma_2(Shack(C_n, P_m, k)) = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$.

Untuk $n \geq 5$ dengan jumlah salinan ke-1 sampai salinan ke- k , bilangan dominasi jarak dua pada graf $Shack(C_n, P_m, k)$ akan membentuk barisan aritmatika sebagai berikut.

Tabel 1. Bilangan Dominasi Jarak Dua pada Graf Hasil Operasi $Shack(C_n, P_m, k)$

Jumlah Salinan (k)	Bilangan Kardinalitas (γ_2)
1	$\lfloor \frac{n}{5} \rfloor$
2	$2 \lfloor \frac{n}{5} \rfloor - \lfloor \frac{m}{5} \rfloor$
3	$3 \lfloor \frac{n}{5} \rfloor - 2 \lfloor \frac{m}{5} \rfloor$
4	$4 \lfloor \frac{n}{5} \rfloor - 3 \lfloor \frac{m}{5} \rfloor$
\vdots	\vdots
k	$k \lfloor \frac{n}{5} \rfloor - (k - 1) \lfloor \frac{m}{5} \rfloor$

Maka dengan menggunakan barisan aritmatika akan didapat bilangan dominasi jarak dua dari graf $Shack(C_n, P_m, k)$ sebanyak k salinan adalah $k \lfloor \frac{n}{5} \rfloor - (k - 1) \lfloor \frac{m}{5} \rfloor$. Selanjutnya akan dibuktikan bilangan dominasi tersebut dengan menggunakan induksi matematika sebagai berikut.

- Akan dibuktikan untuk $k = 1$ adalah benar.

$$\begin{aligned} \gamma_2(Shack(C_n, P_m, k)) &= k \lfloor \frac{n}{5} \rfloor - (k - 1) \lfloor \frac{m}{5} \rfloor \\ \Leftrightarrow \gamma_2(Shack(C_n, P_m, k)) &= k \lfloor \frac{n}{5} \rfloor - (k - 1) \lfloor \frac{m}{5} \rfloor \\ \Leftrightarrow \gamma_2(Shack(C_n, P_m, k)) &= 1 \lfloor \frac{n}{5} \rfloor - (1 - 1) \lfloor \frac{m}{5} \rfloor \\ \Leftrightarrow \lfloor \frac{n}{5} \rfloor &= \lfloor \frac{n}{5} \rfloor \end{aligned}$$

- Asumsikan untuk $k = t$ adalah benar.

$$\begin{aligned} \gamma_2(Shack(C_n, P_m, t)) &= t \lfloor \frac{n}{5} \rfloor - (t - 1) \lfloor \frac{m}{5} \rfloor \end{aligned}$$

- Akan dibuktikan untuk $k = t + 1$ juga benar.

$$\begin{aligned} \gamma_2(Shack(C_n, P_m, t + 1)) &= \gamma_2(Shack(C_n, P_m, t + 1)) \\ &\quad + \text{beda barisan} \\ t + 1 \lfloor \frac{n}{5} \rfloor - (t + 1 - 1) \lfloor \frac{m}{5} \rfloor &= t \lfloor \frac{n}{5} \rfloor - (t - 1) \lfloor \frac{m}{5} \rfloor + \\ \lfloor \frac{n}{5} \rfloor - \lfloor \frac{m}{5} \rfloor & \\ t + 1 \lfloor \frac{n}{5} \rfloor - t \lfloor \frac{m}{5} \rfloor &= t + 1 \lfloor \frac{n}{5} \rfloor - t \lfloor \frac{m}{5} \rfloor \end{aligned}$$

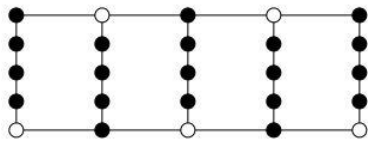
Dengan demikian $\gamma_2(Shack(C_n, P_m, k)) = k \lfloor \frac{n}{5} \rfloor - (k - 1) \lfloor \frac{m}{5} \rfloor$ untuk $n \geq 5$. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $k \lfloor \frac{n}{5} \rfloor - (k - 1) \lfloor \frac{m}{5} \rfloor$ adalah jumlah simpul pendominasi minimal pada graf $Shack(C_n, P_m, k)$. Andaikan

$$\begin{aligned} |S_2(Shack(C_n, P_m, k))| &= k \lfloor \frac{n}{5} \rfloor - \\ (k - 1) \lfloor \frac{m}{5} \rfloor - 1, &\text{ maka simpul pendominasi} \\ \text{oleh } |S_2| &\text{ adalah } 1 + 3 + N_2 \left(\left\lfloor \frac{kn - (k-1)m}{1+3+N_2} \right\rfloor - \right. \\ &\left. 1 \right) \leq 4 + N_2 \left(\frac{kn - (k-1)m + 4 + N_2 - 1}{4 + N_2} - 1 \right) = \\ &kn - (k - 1)m - 1. \text{ Dengan demikian} \\ \text{tidak semua simpul didominasi, sehingga} & \\ |S_2(Shack(C_n, P_m, k))| &\neq k \lfloor \frac{n}{5} \rfloor - \\ (k - 1) \lfloor \frac{m}{5} \rfloor - 1. &\text{ Karena } k \lfloor \frac{n}{5} \rfloor - (k - 1) \lfloor \frac{m}{5} \rfloor \end{aligned}$$

adalah jumlah simpul pendominasi minimal, maka terbukti bahwa

$$\gamma_2(Shack(C_n, P_m, k)) = k \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil - (k - 1) \left\lceil \frac{m}{5} \right\rceil \blacksquare$$

Untuk memperkuat bukti disajikan contoh graf yang dapat dilihat pada Gambar 1. Pada gambar tersebut merupakan graf $Shack(C_{10}, P_5, 4)$ yang dikonstruksi dari graf Sikel C_{10} sebanyak 4 salinan dengan graf P_5 sebagai penghubung (*linkage*) sub graf yang menghubungkan antara G_i dan G_{i+1} . Graf Sikel C_{10} memiliki $\gamma_2(P_5) = 1$. Maka berdasarkan Teorema 1 hasil dari $\gamma_2(Shack(C_{10}, P_5, 4)) = 5$.



Gambar 1. Graf Hasil Operasi $Shack(C_{10}, P_5, 4)$ dengan simpul putih adalah simpul pendominasi

4.2 Bilangan Dominasi Jarak Dua pada Graf $Shack(C_n, C_m, k)$

Berikut disajikan Teorema 2 mengenai bilangan dominasi jarak dua pada graf $Shack(C_n, C_m, k)$ dengan $m \leq \frac{n}{2}$.

◇ **Teorema 2.** Diberikan graf C_n sebanyak k salinan, maka bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi Shackle sub graf C_m adalah

$$\gamma_2(Shack(C_n, C_m, k)) = k \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil - (k - 1) \left\lceil \frac{m}{5} \right\rceil; \text{ untuk } n \geq 5$$

Bukti.

Untuk $n \geq 5$ dengan jumlah salinan ke-1 sampai salinan ke- k , bilangan dominasi jarak dua pada graf $Shack(C_n, C_m, k)$ akan membentuk barisan aritmatika sebagai berikut.

Tabel 2. Bilangan Dominasi Jarak Dua pada Graf Hasil Operasi $Shack(C_n, C_m, k)$

Jumlah Salinan (k)	Bilangan Kardinalitas (γ_2)
1	$\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil$
2	$2 \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil - \left\lceil \frac{m}{5} \right\rceil$
3	$3 \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil - 2 \left\lceil \frac{m}{5} \right\rceil$
4	$4 \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil - 3 \left\lceil \frac{m}{5} \right\rceil$
⋮	⋮
k	$k \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil - (k - 1) \left\lceil \frac{m}{5} \right\rceil$

Maka dengan menggunakan barisan aritmatika akan didapat bilangan dominasi jarak dua dari graf $Shack(C_n, C_m, k)$ sebanyak k salinan adalah $k \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil - (k - 1) \left\lceil \frac{m}{5} \right\rceil$. Selanjutnya akan dibuktikan bilangan dominasi tersebut dengan menggunakan induksi matematika sebagai berikut.

- Akan dibuktikan untuk $k = 1$ adalah benar.

$$\begin{aligned} \gamma_2(Shack(C_n, C_m, k)) &= k \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil - (k - 1) \left\lceil \frac{m}{5} \right\rceil \\ &\Leftrightarrow \gamma_2(Shack(C_n, C_m, k)) \\ &= k \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil - (k - 1) \left\lceil \frac{m}{5} \right\rceil \\ &\Leftrightarrow \gamma_2(Shack(C_n, C_m, k)) \\ &= 1 \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil - (1 - 1) \left\lceil \frac{m}{5} \right\rceil \\ &\Leftrightarrow \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil \end{aligned}$$

- Asumsikan untuk $k = t$ adalah benar.

$$\begin{aligned} \gamma_2(Shack(C_n, C_m, t)) \\ &= t \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil - (t - 1) \left\lceil \frac{m}{5} \right\rceil \end{aligned}$$

- Akan dibuktikan untuk $k = t + 1$ juga benar.

$$\begin{aligned} \gamma_2(Shack(C_n, C_m, t + 1)) \\ &= \gamma_2(Shack(C_n, C_m, t + 1)) \\ &+ \text{beda barisan} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t + 1 \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil - (t + 1 - 1) \left\lceil \frac{m}{5} \right\rceil \\
 = t \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil - (t - 1) \left\lceil \frac{m}{5} \right\rceil + \\
 \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil - \left\lceil \frac{m}{5} \right\rceil \\
 t + 1 \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil - t \left\lceil \frac{m}{5} \right\rceil = t + 1 \left\lceil \frac{m}{5} \right\rceil - t \left\lceil \frac{m}{5} \right\rceil
 \end{aligned}$$

Dengan demikian

$$\gamma_2(Shack(C_n, C_m, k)) = k \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil - (k - 1) \left\lceil \frac{m}{5} \right\rceil$$

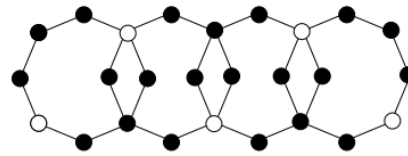
untuk $n \geq 5$, selanjutnya akan dibuktikan bahwa $k \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil - (k - 1) \left\lceil \frac{m}{5} \right\rceil$ adalah jumlah simpul pendominasi minimal pada graf $Shack(C_n, C_m, k)$. Andaikan

$$\begin{aligned}
 |S_2(Shack(C_n, C_m, k))| = k \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil - \\
 (k - 1) \left\lceil \frac{m}{5} \right\rceil - 1, \text{ maka simpul maksimal} \\
 \text{yang dapat didominasi oleh } |S_2| \text{ adalah} \\
 1 + 3 + N_2 \left(\left\lceil \frac{kn - (k-1)m}{1 + 3 + N_2} \right\rceil - 1 \right) \leq 4 + \\
 N_2 \left(\frac{kn - (k-1)m + 4 + N_2 - 1}{4 + N_2} \right) = kn - (k - 1)m - \\
 1.
 \end{aligned}$$

Dengan demikian tidak semua simpul didominasi, sehingga

$$\begin{aligned}
 |S_2(Shack(C_n, C_m, k))| \neq k \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil - \\
 (k - 1) \left\lceil \frac{m}{5} \right\rceil - 1. \text{ Alasannya, karena} \\
 k \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil - (k - 1) \left\lceil \frac{m}{5} \right\rceil \text{ adalah jumlah simpul} \\
 \text{pendominasi minimal, maka terbukti} \\
 \text{bahwa } \gamma_2(Shack(C_n, C_m, k)) = k \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil - \\
 (k - 1) \left\lceil \frac{m}{5} \right\rceil. \blacksquare
 \end{aligned}$$

Untuk memperkuat bukti disajikan contoh graf yang dapat dilihat pada Gambar 2. Pada gambar tersebut merupakan graf $Shack(C_8, C_4, 4)$ yang dikonstruksi dari graf sikel C_8 sebanyak 4 salinan dengan graf C_4 sebagai linkage sub graf yang menghubungkan antara G_i dan G_{i+1} . Graf sikel C_8 memiliki $\gamma_2(C_4) = 1$. Maka berdasarkan Teorema 2 hasil dari $\gamma_2(Shack(C_8, C_4, 4)) = 5$.



Gambar 2. Graf Hasil Operasi $Shack(C_8, C_4, 4)$ dengan simpul putih adalah simpul pendominasi

4.3 Bilangan Dominasi Jarak Dua pada Graf $Shack(C_n, S_m, k)$

Berikut disajikan Teorema 3 mengenai bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi $Shack(C_n, S_m, k)$ dengan $m = 2n$.

◇ **Teorema 3.** Diberikan graf C_n sebanyak k salinan, maka bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi Shackle sub graf S_m adalah

$$\begin{aligned}
 \gamma_2(Shack(C_n, S_m, k)) \\
 = \begin{cases} \frac{k - 1}{2} & \text{untuk } k \text{ ganjil} \\ k & \text{untuk } k \text{ genap} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Bukti.

Untuk jumlah salinan k ganjil, bilangan dominasi jarak dua pada graf $Shack(C_n, S_m, k)$ akan membentuk barisan aritmatika sebagai berikut.

Tabel 3. Bilangan Dominasi Jarak Dua pada Graf Hasil Operasi $Shack(C_n, S_m, k)$ dengan k Ganjil

Jumlah Salinan (k)	Bilangan Kardinalitas (γ_2)
3	$\frac{3 - 1}{2}$
5	$\frac{5 - 1}{2}$
7	$\frac{7 - 1}{2}$
9	$\frac{9 - 1}{2}$
⋮	⋮
k	$\frac{k - 1}{2}$

Maka dengan menggunakan barisan aritmatika akan didapat bilangan dominasi jarak dua dari graf $Shack(C_n, S_m, k)$ sebanyak k salinan dengan k ganjil adalah $\frac{k-1}{2}$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\frac{k-1}{2}$ adalah jumlah simpul pendominasi minimal pada graf $Shack(C_n, S_m, k)$. Andaikan $|S_2(Shack(C_n, S_m, k))| = \frac{k-1}{2} - 1$, maka simpul maksimal yang dapat didominasi oleh $|S_2|$ adalah $2n + 3 \left(\left\lfloor \frac{kn+k-1}{2n+3} \right\rfloor - 1 \right) \leq 2n + 3 \left(\frac{kn+k-1+2n+3-1}{2n+3} - 1 \right) = kn + k - 2$. Dengan demikian tidak semua simpul didominasi, sehingga $|S_2(Shack(C_n, S_m, k))| \neq \frac{k-1}{2} - 1$. Alasannya, karena $\frac{k-1}{2}$ adalah jumlah simpul pendominasi minimal, maka terbukti bahwa $\gamma_2(Shack(C_n, S_m, k)) = \frac{k-1}{2}$ untuk k ganjil.

Untuk jumlah salinan k genap, bilangan dominasi jarak dua pada graf $Shack(C_n, S_m, k)$ akan membentuk barisan aritmatika yang dapat dilihat pada tabel berikut ini.

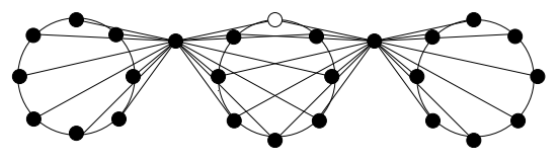
Tabel 4. Bilangan Dominasi Jarak Dua pada Graf Hasil Operasi $Shack(C_n, S_m, k)$ dengan k Genap

Jumlah Salinan (k)	Bilangan Kardinalitas (γ_2)
2	$\frac{2}{2}$
4	$\frac{4}{2}$
6	$\frac{6}{2}$
8	$\frac{8}{2}$
\vdots	\vdots
k	$\frac{k}{2}$

Maka dengan menggunakan barisan aritmatika didapat bilangan dominasi jarak dua dari graf $Shack(C_n, S_m, k)$ sebanyak k salinan dengan k genap adalah $\frac{k}{2}$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\frac{k}{2}$ adalah jumlah simpul pendominasi minimal pada graf $Shack(C_n, S_m, k)$. Andaikan $|S_2(Shack(C_n, S_m, k))| = \frac{k}{2} - 1$, maka simpul maksimal yang dapat didominasi oleh $|S_2|$ adalah $2n + 3 \left(\left\lfloor \frac{kn+k-1}{2n+3} \right\rfloor - 1 \right) \leq 2n + 3 \left(\frac{kn+k-1+2n+3-1}{2n+3} - 1 \right) = kn + k - 2$. Dengan demikian tidak semua simpul didominasi sehingga $|S_2(Shack(C_n, S_m, k))| \neq \frac{k}{2} - 1$. Alasannya, karena $\frac{k}{2}$ adalah jumlah simpul pendominasi minimal, maka terbukti bahwa $\gamma_2(Shack(C_n, S_m, k)) = \frac{k}{2}$ untuk k genap.

Untuk memperkuat bukti disajikan contoh graf yang dapat dilihat pada Gambar 3. Pada gambar tersebut merupakan graf $Shack(C_8, S_8, 3)$ yang dikonstruksi dari graf sikel C_8 sebanyak 3 salinan dengan graf S_8 sebagai *linkage* sub graf yang menghubungkan antara G_i dan G_{i+1} . Graf sikel C_8 memiliki $\gamma_2(S_8)$. Maka berdasarkan Teorema 3 hasil dari $\gamma_2(Shack(C_8, S_8, 3)) = 1$.



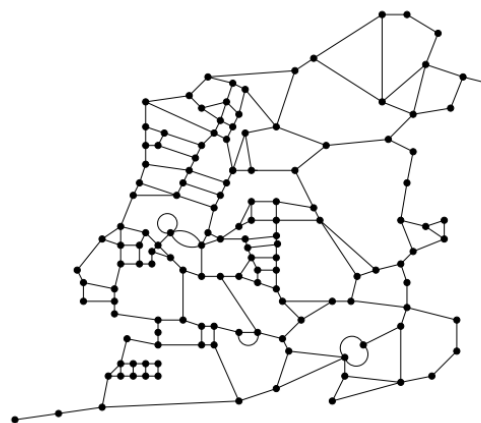
Gambar 3. Graf Hasil Operasi $Shack(C_8, S_8, 3)$ dengan simpul putih adalah simpul pendominasi

4.4 Studi Kasus Bilangan Dominasi Jarak Dua pada Peta Kecamatan Sumpersari Kabupaten Jember

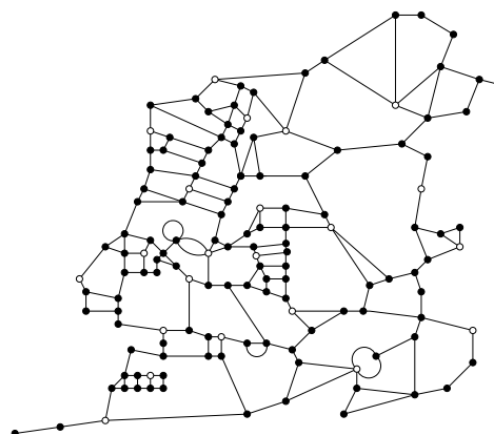
Pada bagian ini akan dibahas mengenai morfologi peta Kecamatan Sumpersari Kabupaten Jember. Peta Kecamatan Sumpersari dapat dilihat pada Gambar 4. Langkah awal adalah menentukan peta ke dalam sebuah graf. Kemudian gambar tersebut direpresentasikan menjadi *J - Graf*, dimana *J - Graf* merupakan merepresntasikan graf dengan persimpangan jalan sebagai simpul dan setiap jalan direpresentasikan sebagai sisi. Representasi *J - Graf* dari peta Kecamatan Sumpersari dapat dilihat pada Gambar 5. Dari representasi graf tersebut akan ditetapkan lokasi Anjungan Tunai Mandiri (ATM) pada simpul-simpul tertentu, sehingga dengan menggunakan Teori Bilangan Dominasi jarak 2 akan didapat jumlah ATM seminimal mungkin tanpa mengurangi efisiensinya.



Gambar 4. Peta Kecamatan Sumpersari Jember



Gambar 5. J-Graf Peta Kecamatan Sumpersari



Gambar 6. J-Graf Peta Kecamatan Sumpersari dengan Simpul Putih adalah Simpul Pendominasi

Berdasarkan analisis terhadap Gambar 6 diperoleh bilangan dominasi sebanyak 23. Analisis dilakukan terhadap simpul-simpul pendominasi yang dapat mendominasi simpul terhubung berjarak maksimal dua. Simpul-simpul pendominasi tersebut dapat dilihat pada Gambar 6. Sehingga penempatan ATM dapat diletakkan pada simpul-simpul pendominasi dan hanya dibutuhkan 23 mesin ATM pada Kecamatan Sumpersari.

Menurut Haynes et al (1996) telah menemukan batas bawah dan batas atas pada bilangan dominasi jarak satu yaitu $\left\lceil \frac{p}{1+\Delta(G)} \right\rceil \leq \gamma(G) \leq p - \Delta(G)$. Pada *J - Graf* Kecamatan Sumpersari Jember memiliki

simpul sebanyak 135 dan derajat maksimal $\Delta(J - Graf)$ adalah 5. Dengan demikian bilangan dominasi jarak dua sesuai dengan batas yaitu $23 \leq \gamma_2(J - Graf) \leq 130$.

5. KESIMPULAN

Kesimpulan yang diperoleh berdasarkan analisis dan pembahasan adalah sebagai berikut:

- 1) bilangan dominasi jarak dua graf hasil operasi Shackle dengan sub graf sebagai penghubung (*linkage*) yaitu $Shack(C_n, P_m, k)$ dengan $m \leq \frac{n}{2}$ adalah

$$\gamma_2(Shack(C_n, P_m, k)) = \begin{cases} \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil & \text{untuk } n < 5 \\ k \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil - (k-1) \left\lceil \frac{m}{5} \right\rceil & \text{untuk } n \geq 5 \end{cases}$$

- 2) bilangan dominasi jarak dua graf hasil operasi Shackle dengan sub graf sebagai penghubung (*linkage*) yaitu $Shack(C_n, C_m, k)$ dengan $m \leq \frac{n}{2}$ adalah

$$\gamma_2(Shack(C_n, C_m, k)) = k \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil - (k-1) \left\lceil \frac{m}{5} \right\rceil; \text{ untuk } n \geq 5$$

- 3) bilangan dominasi jarak dua graf hasil operasi Shackle dengan sub graf sebagai penghubung (*linkage*) yaitu $Shack(C_n, S_m, k)$ dengan $m = 2n$ adalah

$$\gamma_2(Shack(C_n, S_m, k)) = \begin{cases} \frac{k-1}{2} & \text{untuk } k \text{ ganjil} \\ \frac{k}{2} & \text{untuk } k \text{ genap} \end{cases}$$

- 4) $J - Graf$ yaitu Peta Kecamatan Sumbersari Kabupaten Jember menggunakan Teori Bilangan Dominasi $\gamma_2(J - Graf)$ adalah 23.

Berdasarkan hasil penelitian mengenai bilangan dominasi jarak dua, maka peneliti memberikan masalah terbuka kepada pembaca yang berminat meneliti di bidang ini yaitu menentukan batas atas dan bawah bilangan dominasi jarak dua pada sebarang graf.

DAFTAR PUSTAKA

- Darmaji dan Umilasari, R. 2014. "Dominating Set Berjarak Dua pada Graf Jahangir dan Prisma". Tidak Diterbitkan. Paper. Surabaya: ITS.
- Haynes, T. W., Hedetniemi, S. T., dan Slater, P. J. 1996. *Fundamental of Dominations in Graphs*. New York: Marcel Dekker, Inc.
- Munir, R. 2004. *Algoritma Greedy*. Departemen Teknik Informatika Institut Teknologi Bandung.
- Slamin. 2009. *Desain Jaringan Pendekatan Teori Graf*. Jember: Universitas Jember
- Sridharan, N., Subramanian, V. S. A dan Elias, M. D. 2002. *Bounds on the Distance Two-Domination Number of Graph*. *Graphs and Combinatorics*. 18: 667-675.
- Umilasari, R. 2015. "Bilangan Dominasi Jarak Dua pada Graf-graf Hasil Operasi Korona dan Comb". Tidak Diterbitkan. Tesis. Surabaya: ITS.
- Vikade, W. D. 2016. "Bilangan Dominasi Jarak Dua pada Graf Hasil Operasi". Tidak Diterbitkan. Tesis. Jember: Universitas Jember.